Cálculo de varias variables

Cuarta edición

Dennis G. Zill • Warren S. Wright



Cálculo de varias variables

Cálculo de varias variables

Cuarta edición

Dennis G. Zill
Loyola Marymount University

Warren S. Wright
Loyola Marymount University

Revisión técnica:

Marlene Aguilar Ábalo
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Ciudad de México

Fidel Castro López
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica (ESIME),
Instituto Politécnico Nacional, México

Rocío Cerecero López
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Cuernavaca, México

José Job Flores Godoy
Universidad Iberoamericana,
Ciudad de México

Enrique Arturo Galván Flores
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica (ESIME),
Instituto Politécnico Nacional, México

Joel Ibarra Escutia
Instituto Tecnológico de Toluca,
Toluca, México

Linda Margarita Medina Herrera
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Ciudad de México

Carlos Enrique Peralta Santa Cruz
Universidad Continental de Ciencias e Ingeniería,
Huancayo, Perú

John Alexander Pérez Sepúlveda
Universidad Nacional de Colombia,
Medellín, Colombia

Jorge Augusto Pérez Alcázar
Escuela Colombiana de Ingeniería,
Bogotá, Colombia

Ramiro Saldaña Acosta
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores
de Monterrey (ITESM),
Campus Laguna, México

Petr Zhevandrov
Facultad de Ingeniería,
Universidad de la Sabana, Bogotá, Colombia



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • MADRID • NUEVA YORK
SAN JUAN • SANTIAGO • SÃO PAULO • AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL
NUEVA DELHI • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos
Editor sponsor: Pablo E. Roig Vázquez
Coordinadora editorial: Marcela I. Rocha M.
Editor de desarrollo: Edmundo Carlos Zúñiga Gutiérrez
Supervisor de producción: Zeferino García García

Traductores: Gabriel Nagore Cázares

CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES
Cuarta edición



ISBN 13: 978-607-15-0500-2

Translated from the 4th edition of: *Calculus. Early transcendentals* by Dennis G. Zill and Warren S. Wright.

978-0-7637-5995-7

1234567890 1098765432101

Impreso en China *Printed in China*

Prefacio

Para el instructor

Filosofía

La cuarta edición de *Cálculo*: *trascendentes tempranas* constituye una revisión sustancial de la última edición. Aunque en esta edición hay mucho material nuevo, he intentado preservar intacto mi objetivo original de compilar un texto de cálculo que no sea sólo una colección de definiciones y teoremas, habilidades y fórmulas para memorizar, así como problemas para resolver, sino un libro que se comunique con sus lectores más importantes: los estudiantes. Deseo que estos cambios hagan más relevante e interesante el texto tanto para el estudiante como para el profesor.

Características de esta edición

Secciones y ejercicios La mayor parte del material se ha actualizado y, en algunos casos, reorganizado. Muchas secciones y conjuntos de ejercicios se han reescrito por completo; asimismo, se les han agregado muchos problemas nuevos, en especial aplicaciones, problemas que requieren el uso de calculadora y computadora, problemas conceptuales y problemas de proyectos. En su mayoría, las aplicaciones agregadas pertenecen al ámbito de la "vida real" en el sentido de que se han investigado exhaustivamente usando fuentes originales. También se han agregado problemas relacionados con la interpretación de gráficas. Además, se ha hecho énfasis en las funciones trigonométricas tanto en los ejemplos como en los conjuntos de ejercicios a lo largo del texto. En esta edición hay más de 7 300 problemas.

Como ayuda en la asignación de problemas, cada conjunto de ejercicios está dividido claramente en grupos de problemas identificados con títulos como *Fundamentos*, *Aplicaciones*, *Modelos matemáticos*, *Proyectos*, *Problemas con calculadora/SAC*, etcétera. Creo que la mayoría de los títulos son autosuficientes, de modo que los problemas que aparecen bajo el encabezado *Piense en ello* tratan aspectos conceptuales del material cubierto en esa sección y son idóneos como tareas o para discutir en clase. En el texto no se proporciona respuesta alguna para estos problemas. Algunos están identificados como *Clásicos matemáticos* y reflejan el hecho de que han existido durante largo tiempo, aparecen en la mayor parte de los textos o presentan algún detalle interesante, mientras que otros problemas identificados como *Un poco de historia* muestran algún aspecto histórico.

En este texto las ecuaciones diferenciales aparecen en dos capítulos: 8 (el cual se incluye en el libro *Cálculo de una variable*) y 16. Las ecuaciones de primer orden se consideran en el capítulo 8 del libro *Cálculo de una variable* para beneficio de aquellos estudiantes que encuentren sus aplicaciones en cursos de física e ingeniería. En el capítulo 16 se consideran la solución y las aplicaciones de ecuaciones diferenciales de orden superior. Por supuesto, los capítulos 8 y 16 pueden combinarse y cubrirse como una unidad en cualquier punto del curso, una vez que se haya concluido el capítulo 4 del libro *Cálculo de una variable*. En el apéndice se proporcionan demostraciones de algunos de los teoremas más largos. Al final de las secciones correspondien-

tes aparecen esbozos biográficos de algunos matemáticos que han impactado de manera importante el desarrollo del cálculo bajo la rúbrica de *Posdata: Un poco de historia*.

Características especiales Cada capítulo empieza con su propia tabla de contenido y una introducción al material referido en ese capítulo. En la parte final del libro, después del apéndice, el lector encontrará la sección *Fórmulas matemáticas*, que constituye una revisión compacta de conceptos básicos de álgebra, geometría, trigonometría y cálculo: las leyes de los exponentes, fórmulas de factorización, desarrollos binomiales, triángulo de Pascal, fórmulas de geometría, gráficas y funciones, funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, y fórmulas de diferenciación e integración.

La sección denominada *Autoevaluación,* que fue introducida en la última edición, consta de 56 reactivos sobre cuatro amplias áreas de precálculo en matemáticas. Esta evaluación intenta alentar a los estudiantes a revisar por sí mismos algunos de los temas de prerrequisito esenciales, como valores absolutos, plano cartesiano, ecuaciones de rectas, círculos, etc., que se aplican a lo largo del texto. En la sección de respuestas se proporcionan las soluciones a todos estos reactivos.

Los usuarios de las tres ediciones previas han sido muy receptivos a las *Observaciones* con las que a menudo termina una sección. En consecuencia, el número de éstas ha aumentado y se les ha denominado *Notas desde el aula*. Se pretende que estas notas sean análisis informales dirigidos directamente al estudiante. Estos análisis varían desde advertencias sobre errores algebraicos, de procedimiento y de notación comunes, pasando por la interpretación errónea de teoremas y consejos, hasta preguntas que piden al estudiante pensar en el tema y ampliar las ideas recién presentadas.

También, a solicitud de los usuarios, se ha incrementado el número de notas al margen y anotaciones de orientación en los ejemplos.

Figuras, definiciones, teoremas Debido a la gran cantidad de figuras, definiciones y teoremas que hay en este texto, he cambiado a un sistema de numeración doble decimal. Por ejemplo, la interpretación de “figura 10.2.3” es

Capítulo Sección del capítulo 10
↓ ↓
10.2.3 ← Tercera figura de la sección 10.2

Considero que este tipo de numeración facilita encontrar, por ejemplo, un teorema o una figura a la que se hace referencia en una sección o en un capítulo posterior. Además, para relacionar mejor una figura con el texto, la *primera* referencia textual a cada figura aparece con el mismo estilo y color de letra que el número de la figura. Por ejemplo, la primera referencia a la primera figura en la sección 11.5 se proporciona como FIGURA 11.5.1, y todas las referencias subsecuentes se escriben en el estilo tradicional de la figura 11.5.1. También, en esta edición cada figura en el texto presenta un breve subtítulo explicatorio.

Materiales de apoyo

Esta obra cuenta con interesantes complementos para fortalecer los procesos de enseñanza-aprendizaje y su evaluación, y se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información respecto de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

Para el estudiante

Usted se ha matriculado en uno de los cursos más interesantes de matemáticas. Hace muchos años, cuando yo era estudiante de Cálculo I, me sorprendieron el poder y la belleza del material. Era distinto de cualquier tipo de matemáticas que hubiera estudiado hasta ese momento. Era divertido, emocionante y constituía un desafío. Después de enseñar matemáticas universitarias por muchos años, he conocido infinidad de tipos de estudiante, desde el genio incipiente que inventó su propio cálculo hasta estudiantes que luchaban por dominar la mecánica más elemental del tema. A lo largo de estos años también he sido testigo de un fenómeno triste: algunos estudiantes fracasan en cálculo no porque encuentren que el tema es imposible, sino porque tienen habilidades deficientes de álgebra y un conocimiento inadecuado del trabajo en trigonometría. El cálculo construye de inmediato sobre su conocimiento y habilidades previos, donde hay

mucho terreno nuevo por cubrir. En consecuencia, hay muy poco tiempo para repasar las bases en el planteamiento formal del aula. Así, quienes enseñamos cálculo debemos asumir que usted puede factorizar, simplificar y resolver ecuaciones, resolver desigualdades, manejar valores absolutos, usar una calculadora, aplicar las leyes de los exponentes, encontrar ecuaciones de rectas, graficar puntos, trazar gráficas elementales y aplicar importantes identidades logarítmicas y trigonométricas, la habilidad de hacer álgebra y trigonometría, trabajar con exponentes y logaritmos, así como trazar *a mano,* con rapidez y precisión, gráficas básicas que son claves para tener éxito en un curso de cálculo.

En la página xiii encontrará la sección "Autoevaluación", que contiene 56 preguntas. Esta "prueba" es una oportunidad para que usted verifique sus conocimientos acerca de algunos temas que se tratan en este texto. Relájese, tome su tiempo, lea y trabaje cada pregunta, y luego compare sus respuestas con las que se proporcionan en la página RES-1. Sin tomar en cuenta su "calificación", lo alentamos a que revise material de precálculo en algún texto acerca de la materia.

Unas palabras para los estudiantes que han cursado cálculo en preparatoria: por favor, no asuman que pueden lograrlo con un esfuerzo mínimo porque identifican algunos de los temas en cálculo diferencial e integral. Un sentimiento de familiaridad con el tema combinado con una actitud de complacencia a menudo es la razón del fracaso de algunos estudiantes.

Aprender matemáticas no es como aprender a andar en bicicleta: en que una vez que se aprende, la habilidad permanece para siempre. Las matemáticas son más como aprender otro idioma o tocar un instrumento musical: requiere tiempo, esfuerzo y mucha práctica para desarrollar y mantener la habilidad. Aun los músicos experimentados continúan practicando escalas fundamentales. Por lo anterior, usted, el estudiante, sólo puede aprender matemáticas (es decir, hacer "que se le pegue") mediante el trabajo arduo de hacer matemáticas. Aunque he intentado hacer más claros para el lector *la mayoría* de los detalles en la solución de un ejemplo, inevitablemente usted tiene que completar los pasos faltantes. No puede leer un texto de este tipo como si fuese una novela; debe abrirse camino a lo largo de él con lápiz y papel en mano.

En conclusión, le deseo la mejor de las suertes en este curso.

Agradecimientos

Compilar un libro de texto de esta complejidad es una tarea monumental. Además de los autores, mucha gente invirtió tiempo y energía en el proyecto. En primer lugar, me gustaría expresar mi aprecio para los equipos editorial, de producción y mercadotecnia de Jones y Bartlett, y a los siguientes revisores de esta edición y las ediciones previas, quienes contribuyeron con numerosas sugerencias, críticas válidas e incluso ocasionalmente con algunas palabras de apoyo:

Scott Wilde, *Baylor University*
Salvatore Anastasio, *SUNY*, *New Paltz*
Thomas Bengston, *Penn State University, Delaware County*
Steven Blasberg, *West Valley College*
Robert Brooks, *University of Utah*
Dietrich Burbulla, *University of Toronto*
David Burton, *Chabot College*
Maurice Chabot, *University of Southern Maine*
H. Edward Donley, *Indiana University of Pennsylvania*
John W. Dulin, *GMI Engineering & Management Institute*
Arthur Dull, *Diablo Valley College*
Hugh Easler, *College of William and Mary*
Jane Edgar, *Brevard Community College*
Joseph Egar, *Cleveland State University*
Patrick J. Enright, *Arapahoe Community College*
Peter Frisk, *Rock Valley College*
Shirley Goldman, *University of California at Davis*
Joan Golliday, *Santa Fe Community College*
David Green, Jr., *GMI Engineering & Management Institute*
Harvey Greenwald, *California Polytechnic State University*
Walter Gruber, *Mercy College of Detroit*
Dave Hallenbeck, *University of Delaware*
Noel Harbetson, *California State University at Fresno*
Bernard Harvey, *California State University, Long Beach*
Christopher E. Hee, *Eastern Michigan University*
Jean Holton, *Tidewater Community College*
Rahim G. Karimpour, *Southern Illinois University*
Martin Kotler, *Pace University*
Carlon A. Krantz, *Kean College of New Jersey*
George Kung, *University of Wisconsin at Stevens Point*
John C. Lawlor, *University of Vermont*
Timothy Loughlin, *New York Institute of Technology*
Antonio Magliaro, *Southern Connecticut Slate University*
Walter Fred Martens, *University of Alabama at Birmingham*
William E. Mastrocola, *Colgate University*
Jill McKenney, *Lane Community College*
Edward T. Migliore, *Monterey Peninsula College*
Carolyn Narasimhan, *DePaul University*
Harold Olson, *Diablo Valley College*
Gene Ortner, *Michigan Technological University*
Aubrey Owen, *Community College of Denver*

Marvin C. Papenfuss, *Loras College*
Don Poulson, *Mesa Community College*
Susan Prazak, *College of Charleston*
James J. Reynolds, *Pennsylvania State University*, *Beaver Campus*
Susan Richman, *Penn State University, Harrisburg*
Rodd Ross, *University of Toronto*
Donald E. Rossi, *De Anza College*
Lillian Seese, *St. Louis Community College at Meramec*
Donald Sherbert, *University of Illinois*
Nedra Shunk, *Santa Clara University*
Phil R. Smith, *American River College*
Joseph Stemple, *CUNY Queens College*
Margaret Suchow, *Adirondack Community College*
John Suvak, *Memorial University of Newfoundland*
George Szoke, *University of Akron*
Hubert Walczak, *College of St. Thomas*
Richard Werner, *Santa Rosa Junior College*
Loyd V. Wilcox, *Golden West College*
Jack Wilson, *University of North Carolina, Asheville*

También me gustaría extender un agradecimiento extraespecial para las siguientes personas:

- Jeff Dodd, Jacksonville State University, por el proyecto del problema 37 de los ejercicios 8.3.
- John David Dionisio, Loyola Marymount University, y Brian y Melanie Fulton, High Point University, por proporcionar las soluciones de problemas y ejercicios.
- Roger Cooke, University of Vermont, y Fred S. Roberts, Rutgers University, por haber dedicado tiempo de sus ocupados programas y contribuido con los excelentes ensayos de cálculo.
- Carol Wright, por su ayuda en las etapas finales de preparación del manuscrito de éste y otros textos.
- David Pallai, distribuidor, y Tim Anderson, editor, por soportar toda la liberación verbal de mis frustraciones.
- Jennifer Bagdigian, gerente de producción, por coordinar amablemente las fases de producción y por su paciencia para aguantar mis cambios de carácter sin fin, y a
- Irving Drooyan y Charles Carico, por iniciar todo.

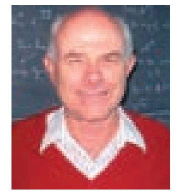
Incluso con toda la ayuda mencionada, la precisión de cada letra, palabra, símbolo, ecuación y figura contenidos en este producto final es responsabilidad del autor. Estaré muy agradecido de contar con el aviso de cualquier error o errores tipográficos que llamen la atención. Las correcciones pueden enviarse a

pablo_roig@mcgraw-hill.com

En conclusión, doy la bienvenida a Warren Scott Wright, mi colega desde hace mucho tiempo en Loyola Marymount University, y autor de muchos de los suplementos que acompañan mis textos, como coautor de este texto.



Dennis G. Zill



Warren S. Wright

Contenido











Autoevaluación

Las respuestas a todas las preguntas están en la página RES-29.

Como preparación para el cálculo

≡ Matemáticas básicas

1. (Falso/verdadero) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. __________

2. (Falso/verdadero) Para $a > 0$, $(a^{4/3})^{3/4} = a$. __________

3. (Falso/verdadero) Para $x \neq 0$, $x^{-3/2} = \dfrac{1}{x^{2/3}}$. __________

4. (Falso/verdadero) $\dfrac{2^n}{4^n} = \dfrac{1}{2^n}$. __________

5. (Llene el espacio en blanco) En el desarrollo de $(1 - 2x)^3$, el coeficiente de x^2 es __________.

6. Sin usar calculadora, evalúe $(-27)^{5/3}$.

7. Escriba lo siguiente como una expresión sin exponentes negativos:

$$x^2\frac{1}{2}(x^2 + 4)^{-1/2}2x + 2x\sqrt{x^2 + 4}.$$

8. Complete el trinomio cuadrado: $2x^2 + 6x + 5$.

9. Resuelva las ecuaciones:

***a*)** $x^2 = 7x$ ***b*)** $x^2 + 2x = 5$ ***c*)** $\dfrac{1}{2x - 1} - \dfrac{1}{x} = 0$ ***d*)** $x + \sqrt{x - 1} = 1$

10. Factorice completamente:

***a*)** $10x^2 - 13x - 3$
***b*)** $x^4 - 2x^3 - 15x^2$
***c*)** $x^3 - 27$
***d*)** $x^4 - 16$

≡ Números reales

11. (Falso/verdadero) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$. __________

12. (Falso/verdadero) $\sqrt{(-9)^2} = -9$. __________

13. (Falso/verdadero) Si $a < 0$, entonces $\dfrac{-a}{a} < 0$. __________

14. (Llene el espacio en blanco) Si $|3x| = 18$, entonces $x =$ __________ o $x =$ _______.

15. (Llene el espacio en blanco) Si $a - 5$ es un número negativo, entonces $|a - 5| =$ __________.

16. ¿Cuáles de los siguientes números son racionales?

***a*)** 0.25 ***b*)** 8.131313 … ***c*)** π
***d*)** $\dfrac{22}{7}$ ***e*)** $\sqrt{16}$ ***f*)** $\sqrt{2}$
***g*)** 0 ***h*)** -9 ***i*)** $1\frac{1}{2}$
***j*)** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ ***k*)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ***l*)** $\dfrac{-2}{11}$

17. Relacione el intervalo dado con la desigualdad idónea.

i) $(2, 4]$ *ii*) $[2, 4)$ *iii*) $(2, 4)$ *iv*) $[2, 4]$
***a*)** $|x - 3| < 1$ ***b*)** $|x - 3| \leq 1$ ***c*)** $0 \leq x - 2 < 2$ ***d*)** $1 < x - 1 \leq 3$

18. Exprese el intervalo $(-2, 2)$ como

***a*)** una desigualdad y ***b*)** una desigualdad que implique valores absolutos.

19. Trace la gráfica de $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ en la recta numérica.

20. Encuentre todos los números reales x que satisfacen la desigualdad $|3x - 1| > 7$. Escriba su solución usando notación de intervalos.

21. Resuelva la desigualdad $x^2 \geq -2x + 15$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

22. Resuelva la desigualdad $x \leq 3 - \dfrac{6}{x+2}$ y escriba su solución usando notación de intervalos.

☰ Plano cartesiano

23. (Llene el espacio en blanco) Si (a, b) es un punto en el tercer cuadrante, entonces $(-a, b)$ es un punto en el __________ cuadrante.

24. (Llene el espacio en blanco) El punto medio del segmento de recta desde $P_1(2, -5)$ hasta $P_2(8, -9)$ es __________.

25. (Llene el espacio en blanco) Si $(-2, 6)$ es el punto medio del segmento de recta desde $P_1(x_1, 3)$ hasta $P_2(8, y_2)$, entonces $x_1 =$__________ y $y_2 =$ __________.

26. (Llene los espacios en blanco) El punto (1, 5) está en una gráfica. Proporcione las coordenadas de otro punto de la gráfica si la gráfica es:

a) simétrica con respecto al eje x. __________

b) simétrica con respecto al eje y. __________

c) simétrica con respecto al origen. __________

27. (Llene los espacios en blanco) Las intersecciones x y y de la gráfica de $|y| = 2x + 4$ son, respectivamente, __________ y __________.

28. ¿En cuáles cuadrantes del plano cartesiano es negativo el cociente x/y?

29. La coordenada y de un punto es 2. Encuentre la coordenada x del punto si la distancia del punto a (1, 3) es $\sqrt{26}$.

30. Encuentre una ecuación del círculo para el cual $(-3, -4)$ y $(3, 4)$ son los puntos extremos de un diámetro.

31. Si los puntos P_1, P_2 y P_3 son colineales como se muestra en la FIGURA A.1, encuentre una ecuación que relacione las distancias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$, y $d(P_1, P_3)$.

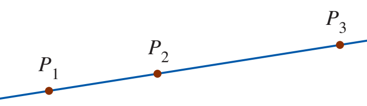


FIGURA A.1 Gráfica para el problema 31

32. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones describe mejor el círculo de la FIGURA A.2? Los símbolos a, b, c, d y e representan constantes diferentes de cero.

a) $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$

b) $ax^2 + ay^2 + cx + dy + e = 0$

c) $ax^2 + ay^2 + cx + dy = 0$

d) $ax^2 + ay^2 + c = 0$

e) $ax^2 + ay^2 + cx + e = 0$

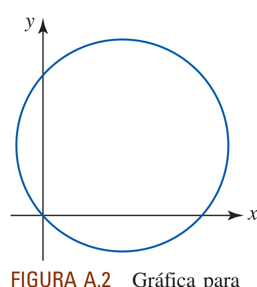


FIGURA A.2 Gráfica para el problema 32

☰ Rectas

33. (Falso/verdadero) Las rectas $2x + 3y = 5$ y $-2x + 3y = 1$ son perpendiculares. __________

34. (Llene el espacio en blanco) Las rectas $6x + 2y = 1$ y $kx - 9y = 5$ son paralelas si $k =$ __________.

35. (Llene el espacio en blanco) Una recta con intercepción x $(-4, 0)$ e intersección y $(0, 32)$ tiene pendiente __________.

36. (Llene los espacios en blanco) La pendiente y las intersecciones x y y de la recta $2x - 3y + 18 = 0$ son, respectivamente, __________, __________, y __________.

37. (Llene el espacio en blanco) Una ecuación de la recta con pendiente -5 e intersección y $(0, 3)$ es __________.

38. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(3, -8)$ y es paralela a la recta $2x - y = -7$.

39. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos (−3, 4) y (6, 1).

40. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el origen y por el punto de intersección de las gráficas de $x + y = 1$ y $2x - y = 7$.

41. Una recta tangente a un círculo en un punto P del círculo es una recta que pasa por P y es perpendicular a la recta que pasa por P y el centro del círculo. Encuentre la ecuación de la recta tangente L indicada en la FIGURA A.3.

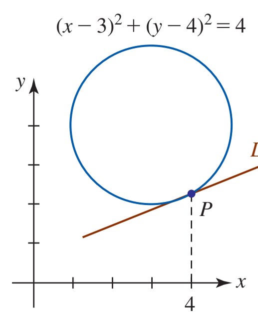
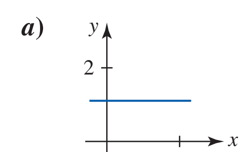
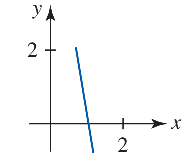


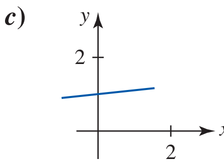
FIGURA A.3 Gráfica para el problema 41

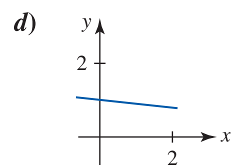
42. Relacione la ecuación dada con la gráfica idónea en la FIGURA A.4.

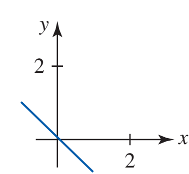
i) $x + y - 1 = 0$ *ii)* $x + y = 0$ *iii)* $x - 1 = 0$
iv) $y - 1 = 0$ *v)* $10x + y - 10 = 0$ *vi)* $-10x + y + 10 = 0$
vii) $x + 10y - 10 = 0$ *viii)* $-x + 10y - 10 = 0$

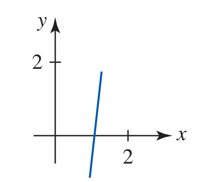
a)


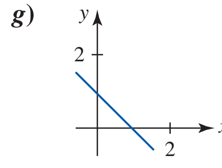
b)


c)


d)


e)


f)


g)


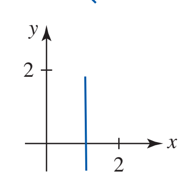
h)


FIGURA A.4 Gráficas para el problema 42

≡ Trigonometría

43. (Falso/verdadero) $1 + \sec^2\theta = \tan^2\theta$. __________

44. (Falso/verdadero) sen(2t) = 2 sen t. __________

45. (Llene el espacio en blanco) El ángulo 240 grados es equivalente a __________ radianes.

46. (Llene el espacio en blanco) El ángulo $\pi/12$ radianes es equivalente a __________ grados.

47. (Llene el espacio en blanco) Si tan $t = 0.23$, tan$(t + \pi)$ = __________.

48. Encuentre cos t si sen $t = \frac{1}{3}$ y el lado terminal del ángulo t está en el segundo cuadrante.

49. Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas del ángulo θ dado en la FIGURA A.5.

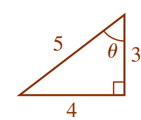


FIGURA A.5 Triángulo para el problema 49

50. Exprese las longitudes b y c de la FIGURA A.6 en términos del ángulo θ.

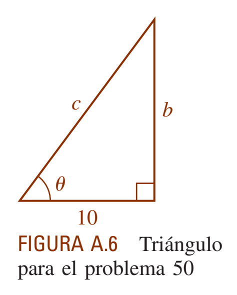


FIGURA A.6 Triángulo para el problema 50

Logaritmos

51. Exprese el símbolo k en la declaración exponencial $e^{(0.1)k} = 5$ como un logaritmo.

52. Exprese la declaración logarítmica $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$ como una declaración exponencial equivalente.

53. Exprese $\log_b 5 + 3\log_b 10 - \log_b 40$ como un logaritmo simple.

54. Use una calculadora para evaluar $\dfrac{\log_{10} 13}{\log_{10} 3}$.

55. (Llene el espacio en blanco) $b^{3\log_b 10} =$ __________.

56. (Falso/verdadero) $(\log_b x)(\log_b y) = \log_b(y^{\log_b x})$. __________

Ensayo

La historia del cálculo

Por Roger Cooke
University of Vermont

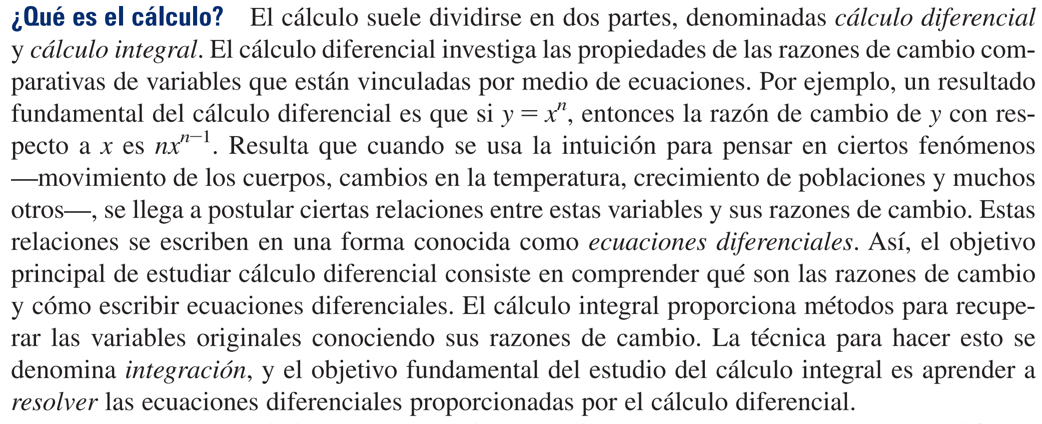


Isaac Newton



Gottfried Leibniz

Suele considerarse que el cálculo es una creación de los matemáticos europeos del siglo XVII, cuyo trabajo más importante fue realizado por Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1711). Esta percepción tradicional en general es correcta. No obstante, cualquier teoría a gran escala es un mosaico cuyas baldosas fueron colocadas a lo largo de mucho tiempo; y en cualquier teoría viviente las baldosas continúan colocándose de manera continua. La declaración más poderosa que los historiadores se arriesgan a hacer es que un patrón se hizo evidente en cierto momento y lugar. Es el caso del cálculo. Podemos afirmar con cierta confianza que los primeros trabajos del tema aparecieron en el siglo XVII y que el patrón se aclaró mucho más gracias al trabajo de Newton y Leibniz. Sin embargo, muchos de los principios esenciales del cálculo se descubrieron desde mucho antes, en la época de Arquímedes (287-211 a.C.), y algunos de esos mismos descubrimientos se lograron de manera independiente en China y en Japón. Además, si se escudriña con más profundidad en los problemas y métodos del cálculo, uno pronto se encuentra en la persecución de problemas que conducen a las áreas modernas de la teoría de funciones analíticas, geometría diferencial y funciones de una variable real. Para cambiar la metáfora del arte al transporte, podemos pensar que el cálculo es una gran estación de ferrocarril, donde los pasajeros que llegan de muchos sitios diferentes están juntos durante un tiempo breve antes de embarcarse hacia destinos diversos. En este ensayo tratamos de mirar en ambas direcciones desde esta estación, hacia los puntos de origen y los destinos. Empecemos con la descripción de la estación.



¿Qué es el cálculo? El cálculo suele dividirse en dos partes, denominadas *cálculo diferencial* y *cálculo integral*. El cálculo diferencial investiga las propiedades de las razones de cambio comparativas de variables que están vinculadas por medio de ecuaciones. Por ejemplo, un resultado fundamental del cálculo diferencial es que si $y = x^n$, entonces la razón de cambio de y con respecto a x es nx^{n-1}. Resulta que cuando se usa la intuición para pensar en ciertos fenómenos —movimiento de los cuerpos, cambios en la temperatura, crecimiento de poblaciones y muchos otros—, se llega a postular ciertas relaciones entre estas variables y sus razones de cambio. Estas relaciones se escriben en una forma conocida como *ecuaciones diferenciales*. Así, el objetivo principal de estudiar cálculo diferencial consiste en comprender qué son las razones de cambio y cómo escribir ecuaciones diferenciales. El cálculo integral proporciona métodos para recuperar las variables originales conociendo sus razones de cambio. La técnica para hacer esto se denomina *integración*, y el objetivo fundamental del estudio del cálculo integral es aprender a *resolver* las ecuaciones diferenciales proporcionadas por el cálculo diferencial.

A menudo estos objetivos están encubiertos en libros de cálculo, donde el cálculo diferencial se utiliza para encontrar los valores máximo y mínimo de ciertas variables, y el cálculo integral se usa para calcular longitudes, áreas y volúmenes. Hay dos razones para recalcar estas aplicaciones en un libro de texto. Primero, la utilización completa del cálculo usando ecuaciones diferenciales implica una teoría más bien complicada que debe presentarse de manera gradual; entre tanto, al estudiante debe enseñársele *algún* uso de las técnicas que se proponen. Segundo,

estos problemas fueron la fuente de las ideas que condujeron al cálculo; los usos que ahora hacemos del tema sólo se presentaron después del descubrimiento de aquél.

Al describir los problemas que llevaron al cálculo y los problemas que pueden resolverse usando cálculo, aún no se han indicado las técnicas fundamentales que hacen de esta disciplina una herramienta de análisis mucho más poderosa que el álgebra y la geometría. Estas técnicas implican el uso de lo que alguna vez se denominó *análisis infinitesimal*. Todas las construcciones y las fórmulas de la geometría y el álgebra de preparatoria poseen un carácter finito. Por ejemplo, para construir la tangente de un círculo o para bisecar un ángulo se realiza un número finito de operaciones con regla y compás. Aunque Euclides sabía considerablemente más geometría que la que se enseña en cursos actuales modernos de preparatoria, él también se autoconfinó esencialmente a procesos finitos. Sólo en el contexto limitado de la teoría de las proporciones permitió la presencia de lo infinito en su geometría, y aun así está rodeado por tanto cuidado lógico que las demostraciones implicadas son extraordinariamente pesadas y difíciles de leer. Lo mismo ocurre en álgebra: para resolver una ecuación polinomial se lleva a cabo un número finito de operaciones de suma, resta, multiplicación, división y extracción de raíz. Cuando las ecuaciones pueden resolverse, la solución se expresa como una fórmula finita que implica coeficientes.

Sin embargo, estas técnicas finitas cuentan con un rango limitado de aplicabilidad. No es posible encontrar las áreas de la mayoría de las figuras curvas mediante un número finito de operaciones con regla y compás, y tampoco resolver ecuaciones polinomiales de grado mayor o igual que cinco usando un número finito de operaciones algebraicas. Lo que se quería era escapar de las limitaciones de los métodos finitos, y esto condujo a la creación del cálculo. Ahora consideraremos algunos de los primeros intentos por desarrollar técnicas para manipular los problemas más difíciles de la geometría, luego de lo cual trataremos de resumir el proceso mediante el que se trabajó el cálculo, y finalmente exhibiremos algo de los frutos que ha producido.

Las fuentes geométricas del cálculo Uno de los problemas más antiguos en matemáticas es la cuadratura del círculo; es decir, construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Como se sabe, este problema no puede resolverse con regla y compás. Sin embargo, Arquímedes descubrió que si es posible trazar una espiral, empezando en el centro de un círculo que hace exactamente una revolución antes de llegar al círculo, entonces la tangente a esa espiral, en su punto de intersección con el círculo, forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuya área es exactamente igual al círculo (vea la figura 1). Entonces, si es posible trazar esta espiral y su tangente, también lo es cuadrar el círculo. Arquímedes, no obstante, guardó silencio sobre cómo podría trazarse esta tangente.

Observamos que uno de los problemas clásicos en matemáticas puede resolverse sólo si es posible trazar cierta curva y su tangente. Este problema, y otros parecidos, originaron que el problema puramente matemático de encontrar la tangente a una curva se volviera importante. Este problema constituye la fuente más importante del cálculo diferencial. El truco "infinitesimal"

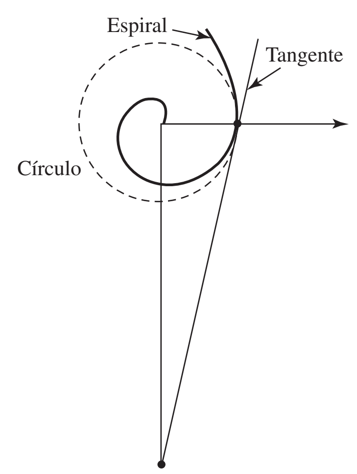


FIGURA 1 *La espiral de Arquímedes.* La tangente al final de la primera vuelta de la espiral y los dos ejes forman un triángulo con área igual a la del círculo centrado en el origen y que pasa por el punto de la tangente

que permite la solución del problema es considerar la tangente como la recta determinada por dos puntos en la curva "infinitamente próximos" entre sí. Otra forma de decir lo mismo es que una pieza "infinitamente corta" de la curva es recta. El problema es que resulta difícil ser preciso sobre los significados de las frases "infinitamente próximos" e "infinitamente cortos".

Poco avance se logró en este problema hasta la invención de la geometría analítica en el siglo XVII por Pierre de Fermat (1601-1665) y René Descartes (1596-1650). Una vez que se pudo representar una curva por medio de una ecuación, fue posible afirmar con más confianza lo que se entendía por puntos "infinitamente próximos", al menos para ecuaciones polinomiales como $y = x^2$. Con simbolismo algebraico para representar puntos en la curva, era posible considerar dos puntos sobre la curva con coordenadas x_0 y x_1, de modo que $x_1 - x_0$ es la distancia entre las coordenadas x. Cuando la ecuación de la curva se escribía en cada uno de estos puntos y una de las dos ecuaciones se restaba de la otra, un lado de la ecuación resultante contenía el factor $x_1 - x_0$, que entonces podía eliminarse por división. Por lo tanto, si $y_0 = x_0^2$ y $y_1 = x_1^2$, entonces $y_1 - y_0 = x_1^2 - x_0^2 = (x_1 - x_0) = (x_1 + x_0)$, de modo que $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = x_1 + x_0$. Cuando $(x_1 = x_0)$, se concluye que $(y_1 = y_0)$, y la expresión $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ carece de sentido. Sin embargo, la expresión $x_1 + x_0$ tiene el valor perfectamente definido $2x_0$. Entonces, es posible considerar a $2x_0$ como la razón de la diferencia infinitamente pequeña en y; es decir, $y_1 - y_0$ a la diferencia infinitamente pequeña en x; es decir, $x_1 - x_0$, cuando el punto (x_1, y_1) está infinitamente cerca del punto (y_1, y_0) sobre la curva $y = x^2$. Como aprenderá al estudiar cálculo, esta razón proporciona suficiente información para trazar la recta tangente a la curva $y = x^2$.

Excepto por pequeños cambios en la notación, el razonamiento anterior es exactamente la forma en que Fermat encontró la tangente a una parábola. Sin embargo, estaba abierta a una objeción lógica: en un momento, ambos lados de la ecuación se dividen entre $x_1 - x_0$, entonces en un paso posterior decidimos que $x_1 - x_0 = 0$. Puesto que la división entre cero es una operación ilegal, parece que estamos tratando de comernos nuestro pastel y no hacerlo; es decir, no se pueden hacer ambas cosas. Tuvo que pasar algún tiempo para responder de manera convincente a esta objeción.

Hemos visto que Arquímedes no pudo resolver el problema fundamental del cálculo diferencial: trazar la tangente a una curva. Sin embargo, Arquímedes *pudo* resolver algunos de los problemas fundamentales del cálculo integral. De hecho, encontró el volumen de una esfera mediante un sistema extremadamente ingenioso: consideró un cilindro que contenía un cono y una esfera e imaginó cortar esta figura en una infinidad de rebanadas delgadas. Al suponer las áreas de estas secciones del cono, la esfera y el cilindro, pudo demostrar cómo el cilindro equilibraría al cono y a la esfera si las figuras se colocan en los platos opuestos de una balanza. Este equilibrio proporcionó una relación entre las figuras, y como Arquímedes ya conocía los volúmenes del cono y del cilindro, entonces pudo calcular el volumen de la esfera.

Este razonamiento ilustra la segunda técnica infinitesimal que se encuentra en los fundamentos del cálculo: un volumen puede considerarse como una pila de figuras planas, y un área puede considerarse como una pila de segmentos de rectas, en el sentido de que si cada sección horizontal de una región es igual a la misma sección horizontal de otra región, entonces las dos regiones son iguales. Durante el Renacimiento europeo este principio se volvió de uso muy común bajo el nombre de *método de los indivisibles* para encontrar las áreas y los volúmenes de muchas figuras. Hoy en día se denomina principio de Cavalieri en honor de Bonaventura Cavalieri (1598-1647), quien lo usó para demostrar muchas de las fórmulas elementales que ahora forman parte del cálculo integral. El principio de Cavalieri también fue descubierto en otras tierras donde jamás llegó la obra de Euclides. Por ejemplo, los matemáticos chinos del siglo V Zu Chongzhi y su hijo Zu Geng hallaron el volumen de una esfera usando una técnica bastante parecida al método de Arquímedes.

Así, encontramos matemáticos que anticiparon el cálculo integral usando métodos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes en una etapa muy temprana de la geometría, tanto en la Grecia como la China antiguas. Así ocurre con el método infinitesimal para trazar tangentes; no obstante, este método para encontrar áreas y volúmenes estaba sujeto a objeciones. Por ejemplo, el volumen de cada sección plana de una figura es cero; ¿cómo es posible reunir una colección de ceros para obtener algo que no es cero? Además, ¿por qué el método no funciona en una dimensión? Considere las secciones de un triángulo rectángulo paralelas a uno de sus catetos.

Cada sección corta a la hipotenusa y al otro cateto en figuras congruentes; a saber, en un punto a cada uno. Sin embargo, la hipotenusa y el otro cateto no miden lo mismo. Objeciones como ésta eran preocupantes. Los resultados obtenidos con estos métodos fueron espectaculares. No obstante, los matemáticos prefirieron aceptarlos como un acto de fe, seguir usándolos e intentar construir sus fundamentos más tarde, justo como en un árbol cuando la raíz y las ramas crecen al mismo tiempo.

La invención del cálculo A mediados del siglo XVII se conocían muchas de las técnicas y hechos elementales del cálculo, incluso métodos para encontrar las tangentes de curvas simples y fórmulas de áreas acotadas por estas curvas. En otras palabras, muchas de las fórmulas que usted encontrará en los primeros capítulos de cualquier libro de texto de cálculo ya eran conocidas antes de que Newton y Leibniz iniciaran su obra. Lo que faltaba hasta fines del siglo XVII era tomar conciencia de que estos dos tipos de problemas están relacionados entre sí.

Para ver cómo se descubrió la relación, es necesario abundar más en las tangentes. Ya mencionamos que para trazar una tangente a una curva en un punto dado se requiere saber cómo encontrar un segundo punto en la recta. En la etapa inicial de la geometría analítica este segundo punto solía tomarse como el punto en que la tangente corta al eje x. La proyección sobre el eje x de la porción de la tangente entre el punto de tangencia y la intersección con el eje x se denominaba *subtangente*. En el estudio de las tangentes surgió un problema muy natural: *reconstruir una curva, dada la longitud de su subtangente en cualquier punto*. Por medio del estudio de este problema fue posible percibir que las ordenadas de cualquier curva son proporcionales al área bajo una segunda curva cuyas ordenadas son las longitudes de las subtangentes a la curva original. El resultado es el teorema fundamental del cálculo. El honor de haber reconocido de manera explícita esta relación pertenece a Isaac Barrow (1630-1677), quien lo indicó en un libro denominado *Lectiones Geometricae* en 1670. Barrow planteó varios teoremas semejantes al teorema fundamental del cálculo. Uno de ellos es el siguiente: *Si se traza una curva de modo que la razón de su ordenada a su subtangen*te [esta razón es precisamente lo que ahora se denomina derivada] *es proporcional a la ordenada de una segunda curva, entonces el área bajo la segunda curva es proporcional a la ordenada de la primera*.

Estas relaciones proporcionaron un principio unificado para el gran número de resultados particulares sobre tangentes y áreas que se habían encontrado con el método de indivisibles a principios del siglo XVII: para encontrar el área bajo una curva había que hallar una segunda curva para la cual la razón de la ordenada a la subtangente sea igual a la ordenada de la curva dada. Así, la ordenada de esa segunda curva proporciona el área bajo la primera curva.

En este punto el cálculo estaba preparado para surgir. Sólo requería de alguien que proporcionara métodos sistemáticos para el cálculo de tangentes (en realidad, subtangentes) e invertiera ese proceso para encontrar áreas. Es el trabajo realizado por Newton y Leibniz. Estos dos gigantes de la creatividad matemática siguieron senderos bastante distintos en sus descubrimientos.

El método de Newton era algebraico y desarrolló el problema de encontrar un método eficiente para extraer las raíces de un número. Aunque apenas empezó a estudiar álgebra en 1662, ya alrededor de 1665 las reflexiones de Newton sobre el problema de extraer raíces lo condujeron al descubrimiento de la serie infinita que actualmente se denomina teorema del binomio; es decir, la relación

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}r^3 + \cdots$$

Al combinar el teorema del binomio con técnicas infinitesimales, Newton pudo deducir las fórmulas básicas del cálculo diferencial e integral. Crucial en el enfoque de Newton fue el uso de series infinitas para expresar las variables en cuestión, y el problema fundamental que Newton no resolvió fue establecer que tales series podían manipularse justo como sumas finitas. Por tanto, en un sentido Newton llevó al infinito desde una entrada a su madriguera sólo para encontrar que una cara estaba frente a la otra.

A partir de la consideración de las variables como cantidades físicas que cambian su valor con el tiempo, Newton inventó nombres para las variables y sus razones de cambio que reflejaban esta intuición. Según Newton, un *fluent* (x) es una cantidad en movimiento o que fluye; su *fluxión* (x) es su razón de flujo, lo que ahora se denomina velocidad o *derivada*. Newton expuso

sus resultados en 1671 en un tratado denominado *Fluxions* escrito en latín, pero su obra no fue publicada sino hasta que apareció una versión en inglés en 1736. (La versión original en latín fue publicada por primera vez en 1742.)

A pesar de la notación y de sus razonamientos que parecen insuficientes y rudimentarios hoy en día, el tremendo poder del cálculo brilla a través del *método de las fluxiones* de Newton en la solución de problemas tan difíciles como encontrar la longitud de arco de una curva. Se pensaba que esta "rectificación" de una curva era imposible, pero Newton demostró que era posible encontrar un número finito de curvas cuya longitud podía expresarse en términos finitos.

El método de Newton para el cálculo era algebraico, como hemos visto, y heredó el teorema fundamental de Barrow. Por otro lado, Leibniz trabajó el resultado fundamental desde 1670, y su enfoque era diferente al de Newton. Se considera a Leibniz como el pionero de la lógica simbólica, y su opinión acerca de la importancia de la buena notación simbólica era mucho mejor que la de Newton. Inventó la notación dx y dy que sigue en uso. Para él, dx era una abreviación de "diferencia en x", y representaba la diferencia entre dos valores infinitamente próximos de x. En otras palabras, expresaba exactamente lo que teníamos en mente hace poco cuando consideramos el cambio infinitamente pequeño $x_1 - x_0$. Leibniz consideraba que dx era un número "infinitesimal", diferente de cero, pero tan pequeño que ninguno de sus múltiplos podía exceder cualquier número ordinario. Al ser diferente de cero, podía servir como denominador en una fracción, y así dy/dx era el cociente de dos cantidades infinitamente pequeñas. De esta forma esperaba superar las objeciones al nuevo método establecido para encontrar tangentes.

Leibniz también realizó una aportación fundamental en la técnica controvertida de encontrar áreas al sumar secciones. En lugar de considerar el área [por ejemplo, el área bajo una curva $y = f(x)$] como una colección de segmentos de recta, la consideraba como la suma de las áreas de rectángulos "infinitamente delgados" de altura $y = f(x)$ y base infinitesimal dx. Por tanto, la diferencia entre el área hasta el punto $x + dx$ y el área hasta el punto x era la diferencia infinitesimal en área $dA = f(x)\,dx$, y el área total se encontraba sumando estas diferencias infinitesimales en área. Leibniz inventó la S alargada (el signo integral $\int$) que hoy en día se usa universalmente para expresar este proceso de suma. Así expresaba el área bajo la curva $y = f(x)$ como $A = \int dA = \int f(x)\,dx$, y cada parte de este símbolo expresaba una idea geométrica simple y clara.

Con la notación de Leibniz, el teorema fundamental del cálculo de Barrow simplemente indica que el par de ecuaciones

$$A = \int f(x)\,dx, \qquad dA = f(x)\,dx$$

son equivalentes. Debido a lo que acaba de plantearse, esta equivalencia es casi evidente.

Tanto Newton como Leibniz lograron grandes avances en matemáticas, y cada uno posee bastante crédito por ello. Resulta lamentable que la estrecha coincidencia de su obra haya conducido a una enconada discusión sobre la prioridad entre sus seguidores.

Algunas partes del cálculo, que implican series infinitas, fueron inventadas en India durante los siglos XIV y XV. Jyesthadeva, matemático indio de fines del siglo XV, proporcionó la serie

$$\theta = r\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3\cos^3\theta} + \frac{\operatorname{sen}^5\theta}{5\cos^5\theta} - \cdots\right)$$

para la longitud de un arco de círculo, demostró este resultado y de manera explícita planteó que esta serie converge sólo si θ no es mayor que 45°. Si se escribe $\theta = \arctan x$ y se usa el hecho de que $\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = x$, esta serie se convierte en la serie normal para $\arctan x$.

De modo independiente, otras series fueron desarrolladas en Japón casi al mismo tiempo que en Europa. El matemático japonés Katahiro Takebe (1664-1739) encontró un desarrollo en serie equivalente a la serie para el cuadrado de la función arcsen. Él consideró el cuadrado de la mitad de arco a la altura h en un círculo de diámetro d; esto resultó ser la función $f(h) = \left(\dfrac{d}{2}\operatorname{arcsen}\dfrac{h}{d}\right)^2$. Takebe carecía de notación para el término general de una serie, aunque descubrió patrones en los coeficientes al calcular geométricamente la función en el valor particular de $h = 0.000001$, $d = 10$ hasta un valor muy grande de cifras decimales —más de 50—, y luego al usar esta precisión extraordinaria para refinar la aproximación al sumar sucesivamente términos correctivos.

Al proceder de esta manera pudo discernir un patrón en las aproximaciones sucesivas, a partir de lo cual, por extrapolación, pudo plantear el término general de la serie:

$$f(h) = dh\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}\left(\frac{h}{d}\right)^n\right]$$

Después de Newton y de Leibniz quedaba el problema de dar contenido al esqueleto inventado por estos dos genios. La mayor parte de su obra fue completada por matemáticos de la Europa continental, en especial por el círculo creado por los matemáticos suizos James Bernoulli (1655-1705) y John Bernoulli (1667-1748), así como el estudiante de este último, el marqués de L´Hôpital (1661-1704). Éstos y otros matemáticos trabajaron las conocidas fórmulas para las derivadas e integrales de funciones elementales que aún se encuentran en libros de texto actuales. Las técnicas esenciales de cálculo eran conocidas a principios del siglo XVIII, y un libro de texto del siglo XVIII como la *Introducción al análisis del infinito,* de Euler (1748), en caso de haber estado traducida al español se vería bastante como un libro de texto moderno.

El legado del cálculo Una vez que hemos abordado las fuentes del cálculo y el procedimiento con el que fue elaborado, a continuación analizaremos brevemente los resultados que produjo.

El cálculo obtuvo una cantidad impresionante de triunfos en sus dos primeros siglos. Resultó que docenas de fenómenos físicos previamente oscuros que implican calor, fluidez, mecánica celeste, elasticidad, luz, electricidad y magnetismo poseían propiedades mensurables cuyas relaciones podían describirse como ecuaciones diferenciales. La física se comprometió para siempre en hablar el lenguaje del cálculo.

Sin embargo, de ninguna manera fueron resueltos todos los problemas surgidos de la física. Por ejemplo, no era posible encontrar, en términos de funciones elementales conocidas, el área bajo una curva cuya ecuación implicaba la raíz cuadrada de un polinomio cúbico. Estas integrales surgieron a menudo tanto en geometría como en física, y llegaron a conocerse como *integrales elípticas* porque el problema de encontrar la longitud sólo podía comprenderse cuando la variable real x se sustituye por una variable compleja $z = x + iy$. El replanteamiento del cálculo en términos de variables complejas condujo a mucho descubrimientos fascinantes, que terminaron por ser codificados como una nueva rama de las matemáticas denominada teoría de funciones analíticas.

La definición idónea de integración siguió siendo un problema durante algún tiempo. Como consecuencia del uso de procesos infinitesimales para encontrar áreas y volúmenes surgieron las integrales. ¿Debía la integral definirse como una "suma de diferencias infinitesimales" o como la inversa de la diferenciación? ¿Qué funciones podían integrarse? En el siglo XIX se propusieron muchas definiciones de la integral, y la elaboración de estas ideas llevó al tema conocido actualmente como análisis real.

Mientras las aplicaciones del cálculo han continuado cosechando cada vez más triunfos en un flujo interminable durante los últimos trescientos años, sus fundamentos permanecieron en un estado insatisfactorio durante la primera mitad de este periodo. El origen de la dificultad era el significado que había de asociarse a la dx de Leibniz. ¿Qué era esta cantidad? ¿Cómo podía no ser positiva ni cero? De ser cero, no podía usarse como denominador; de ser positiva, entonces las ecuaciones en que aparecía no eran realmente ecuaciones. Leibniz consideraba que los infinitesimales eran entes verdaderos, que las áreas y los volúmenes podían sintetizarse al "sumar" sus secciones, como habían hecho Zu Chongzhi, Arquímedes y otros. Newton tenía menos confianza acerca de la validez de los métodos infinitesimales, e intentó justificar sus razonamientos en formas que pudiesen cumplir las normas del rigor euclideano. En su *Principia Mathematica* escribió:

> Estos lemas tienen el cometido de evitar el tedio de deducir *ad absurdum* demostraciones implícitas, según el método de los geómetras de la antigüedad. Las demostraciones son más breves según el método de indivisibles, pero debido a que la hipótesis de indivisibles parece ser algo más dura y, en consecuencia, ese método se acepta como menos geométrico, en lugar de ello elijo reducir las demostraciones de las siguientes proposiciones a las sumas y razones primera y última de cantidades que desaparecen; es decir, a los límites de estas sumas y razones... En consecuencia, si en lo sucesivo debo considerar que las cantidades están formadas de partículas, o debo usar pocas líneas curvas por las [rectas] idóneas, no debe interpretarse que estoy queriendo decir cantidades indivisibles, sino cantidades divisibles que desaparecen. . .

. . . En cuanto a estas últimas razones con las que desaparecen las cantidades, no son en verdad las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los cuales las razones de cantidades decrecientes sin límite siempre convergen; y a los que tienden de manera más próxima que con cualquier diferencia dada, aunque nunca van más allá, ni en el efecto alcanzado, hasta que las cantidades disminuyen *in infinitum*.

En este pasaje Newton afirma que la falta de rigor implicado en el uso de razonamientos infinitesimales puede compensarse con el uso de límites. Sin embargo, su planteamiento de este concepto en el pasaje citado no es tan claro como uno desearía. Esta falta de claridad condujo al filósofo Berkeley a referirse desdeñosamente a los fluxiones como "fantasmas de cantidades". Sin embargo, los avances alcanzados en física usando cálculo fueron tan sobresalientes que durante más de un siglo nadie se preocupó en proporcionar el rigor al que aludía Newton (¡y los físicos siguen sin preocuparse al respecto!). Una presentación completamente rigurosa y sistemática del cálculo llegó sólo hasta el siglo XIX.

Según la obra de Augustin-Louis Cauchy (1789-1856) y Karl Weierstrass (1815-1896), la percepción era que los infinitesimales eran meramente de naturaleza heurística y que los estudiantes estaban sujetos a un riguroso enfoque "epsilon-delta" de los límites. De manera sorprendente, en el siglo XX Abraham Robinson (1918-1974) demostró que es posible desarrollar un modelo lógicamente consistente de los números reales en el que hay infinitesimales verdaderos, como creía Leibniz. Sin embargo, parece que este nuevo enfoque, denominado "análisis no estándar", no ha sustituido a la presentación tradicional actual del cálculo.

Ejercicios

1. El tipo de espiral considerada por Arquímedes ahora se denomina así en su honor. Una espiral de Arquímedes es el lugar geométrico de un punto que se mueve a velocidad constante a lo largo de un rayo que gira con velocidad angular constante alrededor de un punto fijo. Si la velocidad lineal a lo largo del rayo (la componente *radial* de su velocidad) es v, el punto está a una distancia vt del centro de rotación (suponiendo que es donde empieza) en el instante t. Suponga que la velocidad angular de rotación del rayo es ω (radianes por unidad de tiempo). Dados un círculo de radio R y una velocidad radial de v, ¿cuál debe ser ω para que la espiral llegue al círculo al final de su primera vuelta? *Res.* $\left(\frac{2\pi v}{R}\right)$

El punto tendrá una velocidad circunferencial $r\omega = vt\,\omega$. Según un principio enunciado en la *Mecánica* de Aristóteles, la velocidad real de la partícula está dirigida a lo largo de la diagonal de un paralelogramo (en este caso un rectángulo) cuyos lados son las componentes. Use este principio para mostrar cómo construir la tangente a la espiral (que es la recta que contiene a la diagonal de este rectángulo). Compruebe que los lados de este rectángulo guardan la relación $1 : 2\pi$. Observe la figura 1.

2. La figura 2 ilustra cómo Arquímedes encontró la relación entre los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro. El diámetro AB está duplicado, haciendo $BC = AB$. Cuando esta figura se hace girar alrededor de esta recta, el círculo genera una esfera, el triángulo DBG genera un cono y el rectángulo $DEFG$ genera un cilindro. Demuestre los hechos siguientes:

***a*)** Si B se usa como fulcro, el cilindro tiene como centro de gravedad el centro K del círculo y, en consecuencia, todo puede concentrarse ahí sin cambiar la torsión alrededor de B.

***b*)** Cada sección del cilindro perpendicular a la recta AB, permaneciendo en su posición actual, equilibraría exactamente la misma sección del cono más la sección de la esfera si éstos dos se desplazaran al punto C.

***c*)** Por tanto, el cilindro concentrado en K equilibraría al cono y a la esfera que se concentran en C.

***d*)** En consecuencia, el cilindro es igual al doble de la suma del cono y la esfera.

***e*)** Puesto que se sabe que el cono es un tercio del cilindro, se concluye que la esfera debe ser un sexto de éste.

***f*)** Que el volumen del cilindro es $8\pi r^2$.

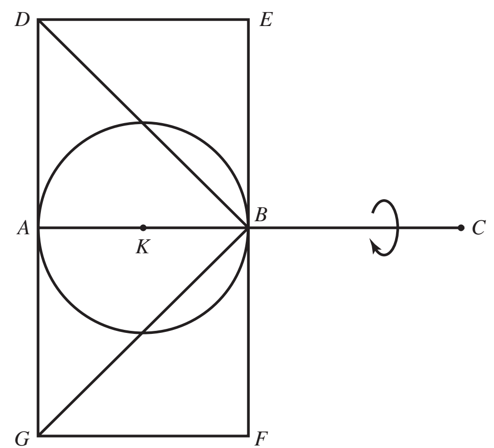


FIGURA 2 Sección de la esfera, el cono y el cilindro de Arquímedes

3. El método con el que Zu Chongzhi y Zu Geng encontraron el volumen de la esfera es el siguiente: imagine que la esfera es una pelota fuertemente adherida dentro de la intersección de dos cilindros que forma ángulos rectos entre sí. Luego, el sólido formado por la intersección de los dos cilindros (denominado *paraguas doble* en chino) y que contiene la pelota se ajusta perfectamente dentro de un cubo cuya arista es igual al diámetro de la esfera.

A partir de esta descripción, trace una sección de la esfera dentro del paraguas doble formado por los ejes de los dos cilindros y a una distancia h debajo de este pleno. Compruebe los hechos siguientes:

a) Si el radio de la esfera es r, el diámetro de su sección circular es $2\sqrt{r^2 - h^2}$.

b) Por tanto, el área del cuadrado formado por esta sección del paraguas doble es $4(r^2 - h^2)$, de modo que el área entre la sección del cubo y la sección del paraguas doble es

$$4r^2 - 4(r^2 - h^2) = 4h^2.$$

c) La sección correspondiente de una pirámide cuya base es la parte inferior de un cubo y cuyo vértice está en el centro de la esfera (o del cubo) también tiene un área de $4h^2$. Por tanto, el volumen entre el paraguas doble y el cubo es exactamente el volumen de esta pirámide más su imagen especular arriba del plano central. Concluya que la región entre el paraguas doble y el cubo es un tercio del cubo.

d) En consecuencia, el paraguas doble ocupa dos tercios del volumen del cubo; es decir, su volumen es $\frac{16}{3}r^3$.

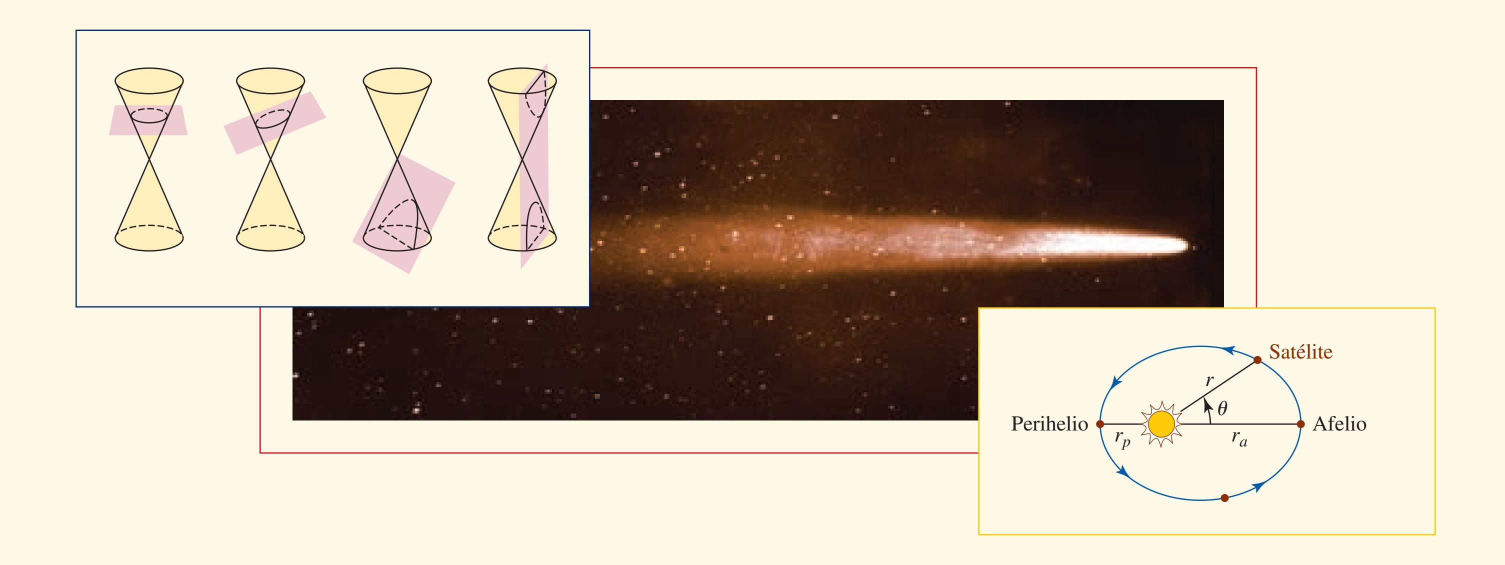
e) Cada sección circular de la esfera está inscrita en la sección cuadrada correspondiente del paraguas doble. Por tanto, la sección circular es $\frac{\pi}{4}$ de la sección del paraguas doble.

f) En consecuencia, el volumen de la esfera es $\frac{\pi}{4}$ del volumen del paraguas doble; es decir, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

4. Proporcione un razonamiento "infinitesimal" de que el área de la esfera es tres veces su volumen dividido entre su radio, al suponer que la esfera es una colección de pirámides "infinitamente delgadas" donde todos los vértices se encuentren adheridos al origen. [*Sugerencia*: parta del hecho de que el volumen de una pirámide es un tercio del área de su base multiplicada por su altura. Arquímedes afirmaba que éste es el razonamiento que lo condujo al descubrimiento del área de la esfera.]

Capítulo 10

Cónicas y coordenadas polares



En este capítulo Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera, y a menudo tampoco la más conveniente, de describir una curva en el plano. En este capítulo consideraremos dos medios adicionales mediante los cuales puede representarse una curva. Uno de los dos enfoques utiliza un tipo de sistema de coordenadas completamente nuevo.

Empezamos este capítulo con la revisión de la noción de una sección cónica.


Hipatia

10.1 Secciones cónicas

Introducción **Hipatia** es la primera mujer en la historia de las matemáticas sobre la que se tiene un considerable conocimiento. Nacida en 370 d.C., en Alejandría, fue una matemática y filósofa renombrada. Entre sus escritos está *Sobre las cónicas de Apolonio*, el cual popularizó el trabajo de Apolonio (200 a.C.) sobre las curvas que se obtienen al intersecar un doble cono con un plano: el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola. Vea la FIGURA 10.1.1. Al finalizar el periodo griego se desvaneció el interés en las secciones cónicas; después de Hipatia el estudio de estas curvas fue ignorado durante 1 000 años.

Cuando el plano pasa por el vértice del cono obtenemos una *cónica degenerada*: un punto, un par de rectas o una sola recta.

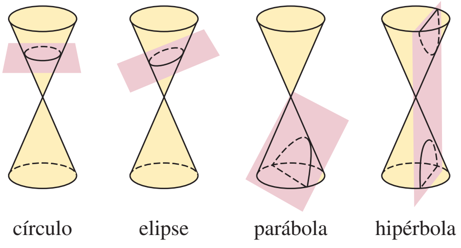


FIGURA 10.1.1 Cuatro secciones cónicas

En el siglo XVII, Galileo demostró que ante la ausencia de resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil sigue un arco parabólico. Casi al mismo tiempo Johannes Kepler propuso la hipótesis de que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elipses con el Sol en un foco. Esto fue verificado después por Isaac Newton, utilizando los métodos del recién desarrollado cálculo. Kepler experimentó también con las propiedades de reflexión de los espejos parabólicos. Estas investigaciones aceleraron el desarrollo del telescopio reflector. Los griegos supieron poco de estas aplicaciones prácticas: habían estudiado las cónicas por su belleza y propiedades fascinantes. En lugar de utilizar un cono, veremos en esta sección cómo la parábola, la elipse y la hipérbola se definen mediante la distancia. Con el empleo de un sistema de coordenadas rectangular y la fórmula de la distancia, obtendremos ecuaciones para las cónicas. Cada una de estas ecuaciones estará en la forma de una ecuación cuadrática en las variables x y y:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{1}$$

donde A, B, C, D, E y F son constantes. La **forma estándar** de un círculo con centro (h, k) y radio r,

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2, \tag{2}$$

es un caso especial de (1). La ecuación (2) es un resultado directo de la definición de un círculo:

- Un **círculo** se define como el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano de coordenadas que se encuentran a una distancia fija r dada, denominada **radio**, a partir de un punto fijo dado (h, k), llamado **centro**.

De manera similar, utilizamos la fórmula de la distancia para obtener ecuaciones correspondientes a la parábola, la elipse y la hipérbola.

La gráfica de una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola. Sin embargo, no toda parábola es la gráfica de una función de x. En general, una parábola se define de la siguiente manera:

Definición 10.1.1 Parábola

Una **parábola** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y)$ en el plano que son equidistantes de una línea fija L, llamada **directriz**, y un punto fijo F, llamado **foco**.

La línea a través del foco perpendicular a la directriz se denomina **eje** de la parábola. El punto de intersección de la parábola y el eje se conoce como **vértice** de la parábola.

Ecuación de una parábola Para describir una parábola analíticamente, supondremos en aras de la discusión que la directriz L es la recta horizontal $y = -p$ y que el foco es $F(0, p)$. Utilizando la definición 10.1.1 y la FIGURA 10.1.2, observamos que $d(F, P) = d(P, Q)$ es la misma que

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p.$$

Al elevar al cuadrado ambos lados y simplificar se llega a

$$x^2 = 4py. \tag{3}$$

FIGURA 10.1.2 Parábola con vértice (0, 0) y foco en el eje y

Afirmamos que (3) es la **forma estándar** de la ecuación de una parábola con foco $F(0, p)$ y directriz $y = -p$. De la misma manera, si la directriz y el foco son, respectivamente, $x = -p$ y $F(p, 0)$, encontramos que la forma estándar para la ecuación de la parábola es

$$y^2 = 4px. \tag{4}$$

Aunque asumimos que $p > 0$ en la figura 10.1.2, esto, desde luego, no necesariamente es el caso. La FIGURA 10.1.3 resume la información acerca de las ecuaciones (3) y (4).

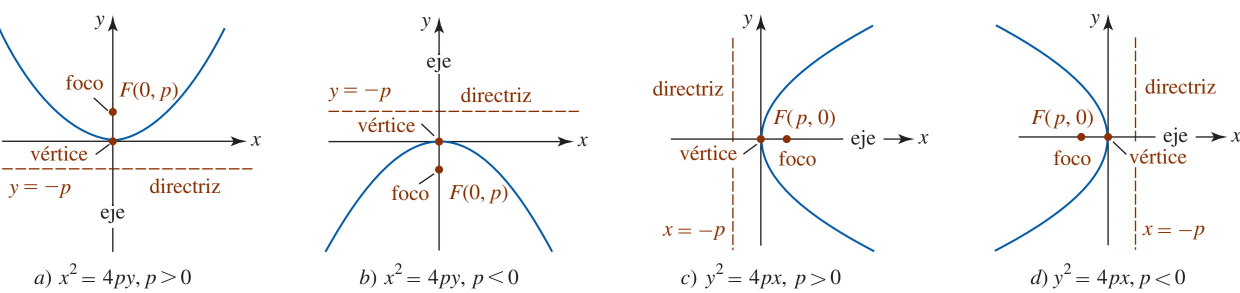


FIGURA 10.1.3 Resumen gráfico de las ecuaciones (3) y (4).

EJEMPLO 1 Foco y directriz

Determine el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $y = x^2$.

Solución Al comparar la ecuación $y = x^2$ con (3) es factible identificar los coeficientes de y, $4p = 1$ y por ello $p = \frac{1}{4}$. En consecuencia, el foco de la parábola es $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ y su directriz es la recta horizontal $y = -\frac{1}{4}$. La familiar gráfica, junto con el foco y la directriz, se presentan en la FIGURA 10.1.4. ■

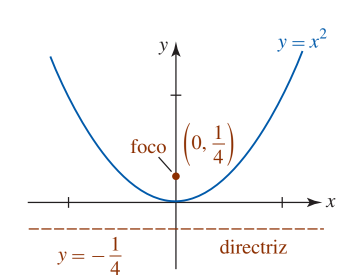


FIGURA 10.1.4 Gráfica de la ecuación del ejemplo 1

Al conocer la forma parabólica básica, lo único que necesitamos saber para dibujar una gráfica *aproximada* de la ecuación (3) o (4) es el hecho de que la gráfica pasa por su vértice (0, 0) y la dirección en la cual se abre la parábola. Para agregar más exactitud a la gráfica es conveniente utilizar el número p determinado por la ecuación en forma estándar para dibujar dos puntos adicionales. Advierta que si se elige $y = p$ en (3), entonces $x^2 = 4p^2$ implica $x = \pm 2p$. De tal modo, $(2p, p)$ y $(-2p, p)$ yacen sobre la gráfica de $x^2 = 4py$. De manera similar, la elección $x = p$ en (2) produce los puntos $(p, 2p)$ y $(p, -2p)$ sobre la gráfica de $y^2 = 4px$. El *segmento de recta* a través del foco con puntos frontera $(2p, p)$, $(-2p, p)$ para las ecuaciones con forma estándar (3), y $(p, 2p)$, $(p, -2p)$ para ecuaciones con la forma estándar (4) recibe el nombre de **cuerda focal**. Por ejemplo, en la figura 10.1.4, si elegimos $y = \frac{1}{4}$, entonces $x^2 = \frac{1}{4}$ implica $x = \pm\frac{1}{2}$. Los puntos frontera de la cuerda focal horizontal para $y = x^2$ son $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

◀ Sugerencia de graficación para las ecuaciones (3) y (4).

EJEMPLO 2 Determinación de la ecuación de una parábola



Determine la ecuación en forma estándar de la parábola con directriz $x = 2$ y foco $(-2, 0)$. Grafique.

Solución En la FIGURA 10.1.5 hemos graficado la directriz y el foco, y nos hemos dado cuenta, por su ubicación, que la ecuación que buscamos es de la forma $y^2 = 4px$. Puesto que $p = -2$, la parábola se abre hacia la izquierda y por ello

$$y^2 = 4(-2)x \qquad \text{o} \qquad y^2 = -8x.$$

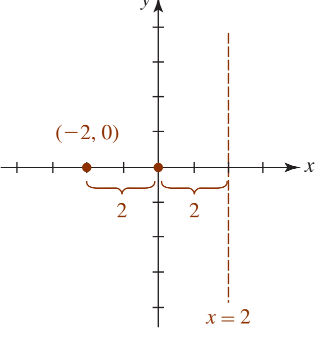


FIGURA 10.1.5 Directriz y foco del ejemplo 2

Como mencionamos en la discusión precedente a este ejemplo, si sustituye $x = p = -2$ en la ecuación $y^2 = -8x$ es posible que encontremos dos puntos sobre su gráfica. De $y^2 = -8(-2) = 16$

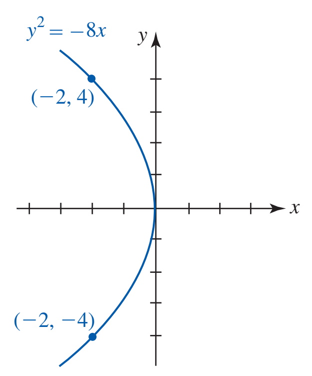


FIGURA 10.1.6 Gráfica de la parábola del ejemplo 2

se obtiene $y = \pm 4$. Como se muestra en la FIGURA 10.1.6, la gráfica pasa por (0, 0) así como a través de los puntos frontera (−2, −4) y (−2, 4) de la cuerda focal. ■

Vértice trasladado a (*h*, *k*) En general, la **forma estándar** de la ecuación de una parábola con vértice (h, k) está dada por

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \tag{5}$$

o

$$(y - k)^2 = 4p(x - h). \tag{6}$$

Las parábolas definidas por estas ecuaciones son idénticas en forma a las parábolas definidas por las ecuaciones (3) y (4) debido a que las ecuaciones (5) y (6) representan transformaciones rígidas (desplazamientos hacia arriba, abajo, a la izquierda y a la derecha) de las gráficas de (3) y (4). Por ejemplo, la parábola $(x + 1)^2 = 8(y - 5)$ tiene vértice $(-1, 5)$. Su gráfica es la de $x^2 = 8y$ desplazada horizontalmente una unidad hacia la izquierda seguida de un desplazamiento vertical hacia arriba de cinco unidades.

En cada una de las ecuaciones, (3) y (4) o (5) y (6), la *distancia* del vértice al foco, así como la distancia del vértice a la directriz, es $|p|$.

EJEMPLO 3 Determinación completa

Encuentre el vértice, foco, eje, directriz y gráfica de la parábola

$$y^2 - 4y - 8x - 28 = 0. \tag{7}$$

Solución Con el fin de escribir la ecuación en una de las formas estándares, completamos el cuadrado en y:

$$y^2 - 4y + 4 = 8x + 28 + 4 \qquad \leftarrow \text{sume 4 a ambos lados}$$
$$(y - 2)^2 = 8(x + 4).$$

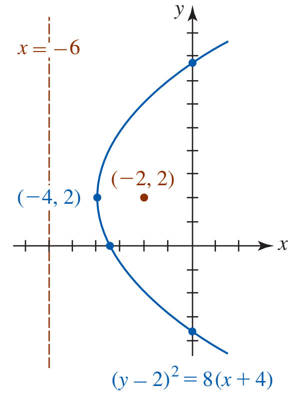


FIGURA 10.1.7 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3

Al comparar la última ecuación con (6) concluimos que el vértice es $(-4, 2)$ y que $4p = 8$ o $p = 2$. De acuerdo con $p = 2 > 0$, la parábola se abre hacia la derecha y el foco está a 2 unidades a la derecha del vértice en $(-2, 2)$. La directriz es la recta vertical a 2 unidades a la izquierda del vértice $x = -6$. Una vez que sabemos que la parábola se abre hacia la derecha desde el punto $(-4, 2)$, eso nos indica que la gráfica tiene intersecciones. Para encontrar la intersección con el eje x se deja $y = 0$ en (7) y se determina de inmediato que $x = -\frac{7}{2}$. La intersección con x es $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$. Para determinar la intersección con y dejamos $x = 0$ en (7) y se encuentra a partir de la fórmula cuadrática que $y = 2 \pm 4\sqrt{2}$ o $y \approx 7.66$ y $y \approx -3.66$. Las intersecciones con y son $(0, 2 - 4\sqrt{2})$ y $(0, 2 + 4\sqrt{2})$. Al juntar toda esta información obtenemos la gráfica de la FIGURA 10.1.7. ■

La elipse se define como sigue:

Definición 10.1.2 Elipse

Una **elipse** es un conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano tal que la suma de las distancias entre P y dos puntos fijos F_1 y F_2 es una constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 se llaman **focos**. El punto medio del segmento de recta que une a F_1 y F_2 se denomina **centro** de la elipse.

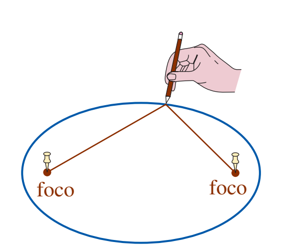


FIGURA 10.1.8 Una manera de dibujar una elipse

Si P es un punto de la elipse y $d_1 = d(F_1, P)$, $d_2 = d(F_2, P)$ son las distancias desde los focos hasta P, entonces la definición 10.1.2 afirma que

$$d_1 + d_2 = k, \tag{8}$$

donde $k > 0$ es una constante.

En un nivel práctico (8) puede utilizarse para dibujar una elipse. La FIGURA 10.1.8 muestra que si una cuerda de longitud k se une a un papel por medio de dos tachuelas, entonces puede trazarse una elipse insertando un lápiz contra la cuerda y moviéndolo de tal manera que la cuerda permanezca tirante.

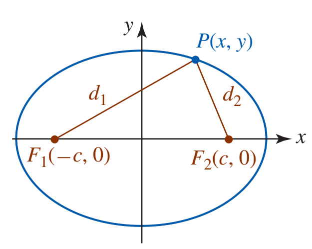


FIGURA 10.1.9 Elipse con centro (0, 0) y focos en el eje x

Ecuación de una elipse Por conveniencia elegiremos $k = 2a$ y pondremos los focos sobre el eje x con coordenadas $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$. Vea la FIGURA 10.1.9. De (8) se concluye que

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a. \tag{9}$$

Al elevar al cuadrado (9), simplificar y elevar al cuadrado otra vez obtenemos

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{10}$$

En la figura 10.1.9 advertimos que los puntos F_1, F_2 y P forman un triángulo. Como la suma de las longitudes de cualesquiera dos lados de un triángulo es mayor que el lado restante, tenemos $2a > 2c$ o $a > c$. En consecuencia, $a^2 - c^2 > 0$. Cuando dejamos $b^2 = a^2 - c^2$, entonces (8) se convierte en $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Al dividir esta última ecuación entre $a^2\,b^2$ se llega a

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{11}$$

La ecuación (11) se denomina la **forma estándar** de la ecuación de una elipse centrada en (0, 0) con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, donde c está definida por $b^2 = a^2 - c^2$ y $a > b > 0$.

Si los focos se ubican sobre el eje y, entonces la repetición del análisis anterior conduce a

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{12}$$

La ecuación (12) se llama la **forma estándar** de la ecuación de una elipse centrada en (0, 0) con focos $(0, -c)$ y $(0, c)$, donde c está definida por $b^2 = a^2 - c^2$ y $a > b > 0$.

Ejes mayor y menor El **eje mayor** de una elipse es el segmento de recta que pasa por su centro, contiene a los focos y con puntos frontera sobre la elipse. Para una elipse con ecuación estándar (11), el eje mayor es horizontal mientras que para (12) el eje mayor es vertical. El segmento de recta que pasa por el centro, perpendicular al eje mayor, y con puntos frontera sobre la elipse recibe el nombre de **eje menor**. Los dos puntos frontera del eje mayor se denominan **vértices** de la elipse. Para (11) los vértices son las intersecciones con el eje x. Si dejamos $y = 0$ en (11) da $x = \pm a$. Los vértices son entonces $(-a, 0)$ y $(a, 0)$. Para (12) los vértices son las intersecciones con el eje y $(0, -a)$ y $(0, a)$. Para la ecuación (11), los puntos frontera del eje menor son $(0, -b)$ y $(0, b)$; para (12) los puntos frontera son $(-b, 0)$ y $(b, 0)$. Para (11) o (12), la **longitud del eje mayor** es $a - (-a) = 2a$; la longitud del eje menor corresponde a $2b$. Puesto que $a > b$, el eje mayor de una elipse es siempre mayor que el eje menor.

Un resumen de esta información para las ecuaciones (11) y (12) aparece en la FIGURA 10.1.10.

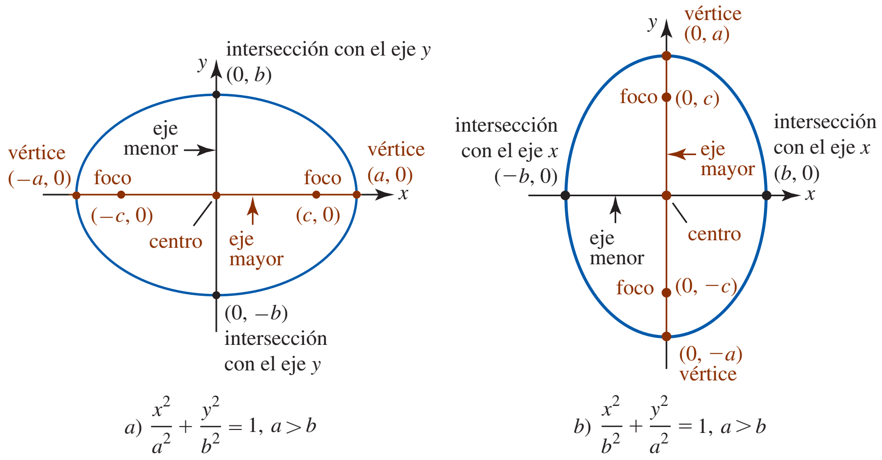


FIGURA 10.1.10 Resumen gráfico de las ecuaciones (11) y (12)

EJEMPLO 4 Vértices, focos, gráfica

Determine los vértices y focos de la elipse cuya ecuación es $9x^2 + 3y^2 = 27$. Grafique.

Solución Si divide ambos lados de la igualdad entre 27, la forma estándar de la ecuación es

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Advierta que $9 > 3$ y por ello se identifica la ecuación con (12). De $a^2 = 9$ y $b^2 = 3$ obtenemos $a = 3$ y $b = \sqrt{3}$. El eje mayor es vertical con puntos frontera o vértices $(0, -3)$ y $(0, 3)$. El eje

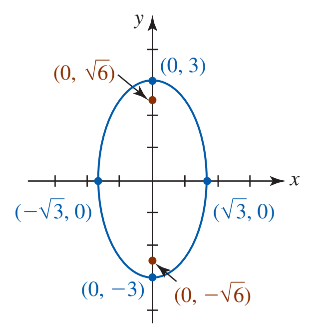


FIGURA 10.1.11 Elipse del ejemplo 4

menor es horizontal con puntos frontera $(-\sqrt{3}, 0)$ y $(\sqrt{3}, 0)$. Desde luego, los vértices también se encuentran en las intersecciones con el eje y y los puntos frontera del eje menor son las intersecciones con el eje x. En este caso, para encontrar los focos recurrimos a $b^2 = a^2 - c^2$ o $c^2 = a^2 - b^2$ para escribir $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Con $a = 3$, $b = \sqrt{3}$, obtenemos $c = \sqrt{6}$. En consecuencia, los focos están sobre el eje y en $(0, -\sqrt{6})$ y $(0, \sqrt{6})$. La gráfica se presenta en la FIGURA 10.1.11. ■

Centro trasladado a (h, k) Cuando el centro está en (h, k), la forma estándar de la ecuación de una elipse es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{13}$$

o

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1. \tag{14}$$

Las elipses definidas por estas ecuaciones son idénticas en forma a las elipses definidas por las ecuaciones (11) y (12) puesto que las ecuaciones (13) y (14) representan transformaciones rígidas de las gráficas (11) y (12). Por ejemplo, la gráfica de la elipse

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{16} = 1$$

con centro $(1, -3)$ es la gráfica de $x^2/9 + y^2/16 = 1$ desplazada horizontalmente 1 unidad hacia la derecha seguida por un desplazamiento vertical hacia abajo de 3 unidades.

No es una buena idea memorizar fórmulas para los vértices y focos de una elipse con centro (h, k). Todo es lo mismo que antes, a, b y c son positivos, $a > b$, $a > c$ y $c^2 = a^2 - b^2$. Usted puede ubicar los vértices, focos y puntos frontera del eje menor utilizando el hecho de que a es la distancia del centro al vértice, b es la distancia del centro a un punto extremo sobre el eje menor y c es la distancia del centro a un foco.

EJEMPLO 5 Determinación completa

Encuentre los vértices y focos de la elipse $4x^2 + 16y^2 - 8x - 96y + 84 = 0$. Grafique.

Solución Para escribir la ecuación dada en una de las formas estándares (13) o (14) se completa el cuadrado en x y en y. Para hacerlo, recuerde que se desean los coeficientes de los términos cuadráticos x^2 y y^2 iguales a 1. Si factoriza 4 de los términos x y 16 de los términos y, obtiene

$$4(x^2 - 2x + 1) + 16(y^2 - 6y + 9) = -84 + 4 \cdot 1 + 16 \cdot 9$$

o $4(x-1)^2 + 16(y-3)^2 = 64$. La última ecuación produce la forma estándar

$$\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1. \tag{15}$$

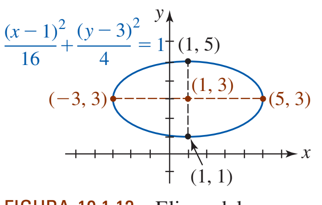


FIGURA 10.1.12 Elipse del ejemplo 5

En (15) identificamos $a^2 = 16$ o $a = 4$, $b^2 = 4$ o $b = 2$, y $c^2 = a^2 - b^2 = 12$, o $c = 2\sqrt{3}$. El eje mayor es horizontal y yace sobre la recta horizontal $y = 3$ que pasa por el centro $(1, 3)$. Corresponde al segmento de recta horizontal punteado con rojo de la FIGURA 10.1.12. Al medir $a = 4$ unidades a la izquierda y luego a la derecha del centro a lo largo de la recta $y = 3$, llegamos a los vértices $(-3, 3)$ y $(5, 3)$. Al medir $b = 2$ unidades tanto arriba como abajo de la recta vertical $x = 1$ a través del centro llegamos a los puntos frontera $(1, 1)$ y $(1, 5)$ del eje menor. El eje menor es el segmento de recta vertical punteada en negro de la figura 10.1.12. Por último, al medir $c = 2\sqrt{3}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro a lo largo de $y = 3$ obtenemos los focos $(1 - 2\sqrt{3}, 3)$ y $(1 + 2\sqrt{3}, 3)$. ■

La definición de una hipérbola es básicamente la misma que la definición de la elipse con sólo una excepción: la palabra *suma* se sustituye por la palabra *diferencia*.

Definición 10.1.3 Hipérbola

Una **hipérbola** es un conjunto de puntos $P(x, y)$ en el plano tal que la diferencia de las distancias entre P y los puntos fijos F_1 y F_2 es constante. Los puntos fijos F_1 y F_2 reciben el nombre de **focos**. El punto medio del segmento de recta que une los puntos F_1 y F_2 se denomina **centro** de la hipérbola.

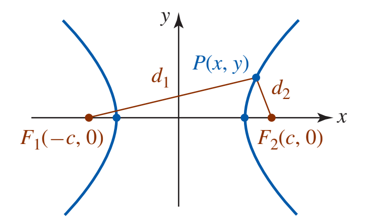


FIGURA 10.1.13 Hipérbola con centro (0, 0) y focos en el eje x

Si P es un punto sobre la hipérbola, entonces

$$|d_1 - d_2| = k, \tag{16}$$

donde $d_1 = d(F_1, P)$ y $d_2 = d(F_2, P)$. Al proceder como para la elipse, ubicamos los focos sobre el eje x en $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ como se muestra en la FIGURA 10.1.13 y se elige la constante k igual a $2a$ por conveniencia algebraica. Como se ilustra en la figura, la gráfica de una hipérbola consta de dos **ramas**.

Hipérbola con centro (0, 0) Si aplica la fórmula de la distancia y el álgebra usuales a (16) se obtiene la **forma estándar** de la ecuación de una hipérbola centrada en (0, 0) con focos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$,

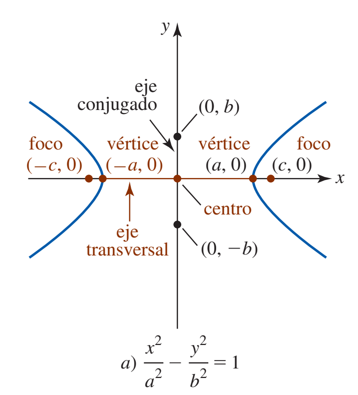
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{17}$$

Cuando los focos yacen sobre el eje x, la **forma estándar** de la ecuación de una hipérbola centrada en (0, 0) con focos $(0, -c)$ y (0, c) es

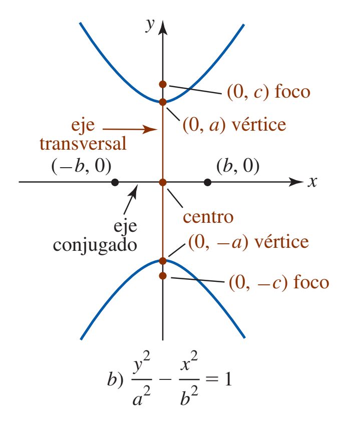
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1. \tag{18}$$

Tanto en (17) como en (18), c está definida por $b^2 = c^2 - a^2$ y $c > a$.

Para la hipérbola (a diferencia de la elipse) tenga en mente que en (17) y (18) no hay relación entre los tamaños relativos de a y b; en vez de eso, a^2 siempre es el denominador del *término positivo* y la ordenada al origen *siempre* tiene $\pm a$ como una coordenada.



a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



b) $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

FIGURA 10.1.14 Resumen gráfico de las ecuaciones (17) y (18)

Ejes transversal y conjugado El segmento de recta con puntos frontera sobre la hipérbola y que yace sobre la recta que pasa por los focos se denomina **eje transversal**; sus puntos frontera reciben el nombre de **vértices** de la hipérbola. Para la hipérbola descrita por la ecuación (17), el eje transversal yace sobre el eje x. Por tanto, las coordenadas de los vértices son las intersecciones con el eje x. Si deja $y = 0$ obtiene $x^2/a^2 = 1$, o $x = \pm a$. De tal manera, como se muestra en la FIGURA 10.1.14, los vértices son $(-a, 0)$ y $(a, 0)$; la **longitud del eje transversal** es $2a$. Advierta que dejando $y = 0$ en (18) obtenemos $-y^2/b^2 = 1$ o $y^2 = -b^2$, la cual no tiene soluciones reales. En consecuencia, la grafica de cualquier ecuación en esa forma no tiene intersecciones con el eje y. De cualquier modo, los números $\pm b$ son importantes. El segmento de recta que pasa por el centro de la hipérbola perpendicular al eje transversal y con puntos frontera $(0, -b)$ y $(0, b)$ se llama **eje conjugado**. De manera similar, la gráfica de una ecuación en forma estándar (18) no tiene intersecciones con el eje x. El eje conjugado (18) es el segmento de recta con puntos frontera $(-b, 0)$ y $(b, 0)$.

Esta información para las ecuaciones (17) y (18) se resume en la figura 10.1.14.

Asíntotas Toda hipérbola posee un par de asíntotas inclinadas que pasan por su centro. Estas asíntotas son indicativas del comportamiento final, y como tales son una ayuda invaluable en el trazado de la gráfica de una hipérbola. Al resolver (17) con respecto a y en términos de x obtenemos

$$y = \pm\frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Cuando $x \to -\infty$ o cuando $x \to \infty$, $a^2/x^2 \to 0$, entonces $\sqrt{1 - a^2/x^2} \to 1$. Por tanto, para valores grandes de $|x|$, los puntos sobre la gráfica de la hipérbola son cercanos a los puntos sobre estas rectas

$$y = \frac{b}{a}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{b}{a}x. \tag{19}$$

Por un análisis similar encontramos que las asíntotas inclinadas para (18) son

$$y = \frac{a}{b}x \qquad \text{y} \qquad y = -\frac{a}{b}x. \tag{20}$$

Cada par de asíntotas se interseca en el origen, que es el centro de la hipérbola. Advierta, también, en la FIGURA 10.1.15*a*) que las asíntotas son simplemente las *diagonales extendidas* de un rectángulo de ancho $2a$ (la longitud del eje transversal) y altura $2b$ (la longitud del eje conjugado) en la figura 10.1.15*b*) las asíntotas son las diagonales extendidas de un rectángulo de ancho $2b$ y altura $2a$.

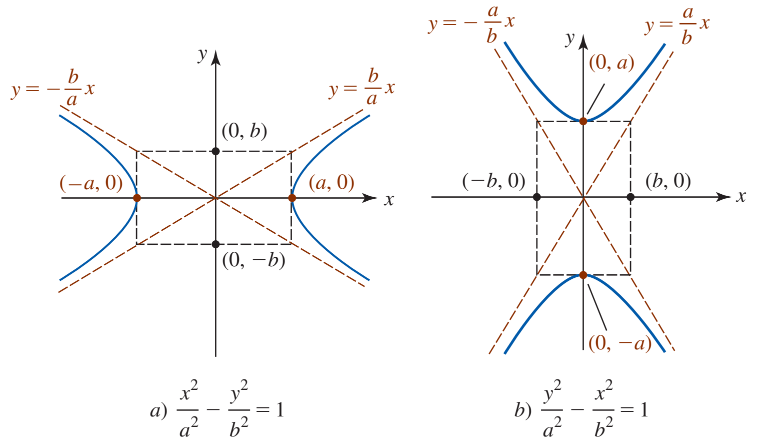


FIGURA 10.1.15 Hipérbolas (17) y (18) con asíntotas inclinadas

Recomendamos al lector que *no* memorice las ecuaciones (19) y (20). Hay un método sencillo para obtener las asíntotas de una hipérbola. Por ejemplo, puesto que $y = \pm\frac{b}{a}x$ es equivalente a

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \qquad \text{o} \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0. \tag{21}$$

Note que la última ecuación en (21) se factoriza como la diferencia de dos cuadrados:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Éste es un dispositivo mnemónico o de memoria. No tiene importancia geométrica.

Al igualar a cero cada factor y resolver para y obtenemos una ecuación de una asíntota. La ecuación (21) es simplemente el lado izquierdo de la forma estándar de la ecuación de una hipérbola dada en (17). De manera similar, para obtener la asíntota de (18) sólo se sustituye 1 por 0 en la forma estándar, se factoriza $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 0$, y se resuelve para y.

EJEMPLO 6 Vértices, focos, asíntotas, gráficas

Determine los vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 25y^2 = 225$. Grafique.

Solución Primero escribimos la ecuación en forma estándar al dividir ambos lados de la igualdad entre 225:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1. \tag{22}$$

A partir de esta ecuación se advierte que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$, y por ello $a = 5$ y $b = 3$. Por tanto, los vértices son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$. Puesto que $b^2 = c^2 - a^2$ implica $c^2 = a^2 + b^2$, tenemos $c^2 = 34$ y por ello los focos son $(-\sqrt{34}, 0)$ y $(\sqrt{34}, 0)$. Para determinar las asíntotas inclinadas se recurre a la forma estándar (22) con 1 sustituido por 0:

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 0 \qquad \text{se factoriza como} \qquad \left(\frac{x}{5} - \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3}\right) = 0.$$

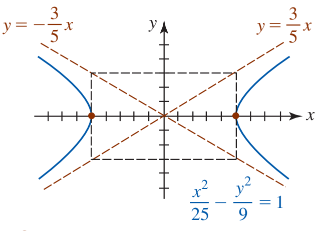


FIGURA 10.1.16 Hipérbola del ejemplo 6

Al igualar a 0 cada factor y resolver para y obtenemos las asíntotas $y = \pm 3x/5$. Trazamos los vértices y la gráfica de las dos rectas que pasan por el origen. Ambas ramas de la hipérbola deben volverse arbitrariamente cercanas a las asíntotas cuando $x \to \pm\infty$. Vea la FIGURA 10.1.16. ■

Centro trasladado a (h, k) Cuando el centro de la hipérbola es (h, k), los análogos de la **forma estándar** de las ecuaciones (17) y (18) son, a su vez,

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{23}$$

y

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1. \tag{24}$$

Como en (17) y (18), los números a^2, b^2 y c^2 están relacionados mediante $b^2 = c^2 - a^2$.

El lector puede localizar los vértices y focos utilizando el hecho de que a es la distancia del centro a un vértice y c es la distancia del centro a un foco. Es posible obtener las asíntotas inclinadas de (23) factorizando

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0 \qquad \text{como} \qquad \left(\frac{x-h}{a} - \frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a} + \frac{y-k}{b}\right) = 0.$$

De manera similar, las asíntotas de (24) se obtienen al factorizar $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 0$, al igualar cada factor a cero y resolver para y en términos de x. Como una verificación de su trabajo, recuerde que (h, k) debe ser un punto que yace en cada asíntota.

EJEMPLO 7 Determinación completa

Encuentre el centro, vértices, focos y asíntotas de la hipérbola $4x^2 - y^2 - 8x - 4y - 4 = 0$. Grafique.

Solución Antes de completar el cuadrado en x y y, factorizamos el 4 de los dos términos en x y -1 de los dos términos en y de manera que el coeficiente en cada expresión es 1. Entonces tenemos

$$4(x^2 - 2x + 1) - (y^2 + 4y + 4) = 4 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot 4$$
$$4(x-1)^2 - (y+2)^2 = 4$$
$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$$

Ahora vemos que el centro es $(1, -2)$. Puesto que el término en la forma estándar que implica a x tiene el coeficiente positivo, el eje transversal es horizontal a lo largo de la recta $y = -2$ e identificamos $a = 1$ y $b = 2$. Los vértices están a una unidad a la izquierda y a la derecha del centro en $(0, -2)$ y $(2, -2)$, respectivamente. De $b^2 = c^2 - a^2$ resulta $c^2 = a^2 + b^2 = 5$, por lo que $c = \sqrt{5}$. En consecuencia, los focos están a $\sqrt{5}$ unidades a la izquierda y a la derecha del centro $(1, -2)$ en $(1 - \sqrt{5}, -2)$ y $(1 + \sqrt{5}, -2)$.

Para encontrar las asíntotas, resolvemos

$$\frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+2)^2}{4} = 0 \qquad \text{o} \qquad \left(x - 1 - \frac{y+2}{2}\right)\left(x - 1 + \frac{y+2}{2}\right) = 0$$

para y. De $y + 2 = \pm 2(x - 1)$ encontramos que las asíntotas son $y = -2x$ y $y = 2x - 4$. Observe que al sustituir $x = 1$, ambas ecuaciones producen $y = -2$, lo que muestra que ambas rectas pasan por el centro. Ahora ubicamos el centro, trazamos los vértices y graficamos las asíntotas. Como se muestra en la FIGURA 10.1.17, la gráfica de la hipérbola pasa por los vértices y se vuelve cada vez más cercana a las asíntotas conforme $x \to \pm\infty$. ■

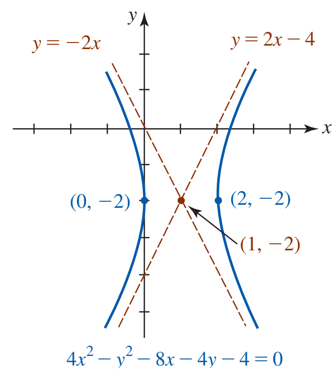


FIGURA 10.1.17 Hipérbola del ejemplo 7

Excentricidad

A cada sección cónica se asocia un número e llamado **excentricidad**.

Definición 10.1.4 Excentricidad

La **excentricidad** de una elipse y una hipérbola es

$$e = \frac{c}{a}.$$

Desde luego, debe tener en mente que para una elipse $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y para una hipérbola $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. A partir de las desigualdades $0 < \sqrt{a^2 - b^2} < a$ y $0 < a < \sqrt{a^2 + b^2}$, observamos, a su vez, que

- la excentricidad de una elipse satisface $0 < e < 1$, y
- la excentricidad de una hipérbola satisface $e > 1$.

La excentricidad de una parábola se discutirá en la sección 10.7.

EJEMPLO 8 Excentricidad

Determine la excentricidad de

a) la elipse en el ejemplo 5, ***b***) la hipérbola en el ejemplo 7.

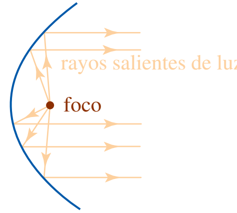
Solución

a) En la solución de ejemplo 5 encontramos que $a = 4$ y $c = 2\sqrt{3}$. En consecuencia, la excentricidad de una elipse es $e = (2\sqrt{3})/4 = \sqrt{3}/2 \approx 0.87$.

b) En el ejemplo 7 encontramos que $a = 1$ y $c = \sqrt{5}$. Por consiguiente, la excentricidad de la hipérbola es $e = \sqrt{5}/1 \approx 2.23$. ■

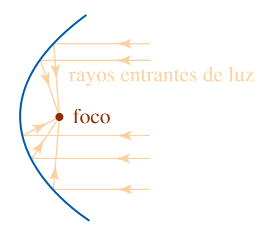
La excentricidad es un indicador de la forma de una elipse o una hipérbola. Si $e \approx 0$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx 0$ y en consecuencia $a \approx b$. Esto significa que la elipse es casi circular. Por otro lado, si $e \approx 1$, entonces $c = \sqrt{a^2 - b^2} \approx a$ y por ello $b \approx 0$. Esto quiere decir que cada foco es cercano a un vértice y debido a ello la elipse es elongada. Vea la FIGURA 10.1.18. Las formas de una hipérbola en los dos casos extremos $e \approx 1$ y e mucho mayor que 1 se ilustran en la FIGURA 10.1.19.





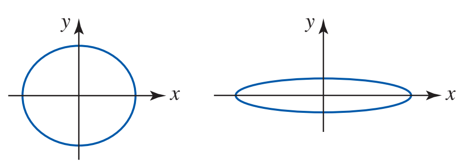
a) Los rayos emitidos en el foco se reflejan como rayos paralelos

superficie reflectora



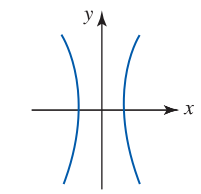
b) Los rayos entrantes se reflejan en el foco

FIGURA 10.1.20 Superficie reflectora parabólica



a) e cercana a cero *b*) e cercana a 1

FIGURA 10.1.18 Efecto de excentricidad en la forma de una elipse

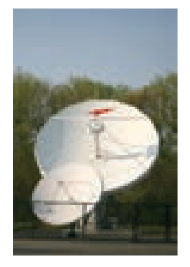


a) e cercana a 1 *b*) e mucho mayor que 1

FIGURA 10.1.19 Efecto de excentricidad sobre la forma de una hipérbola

Aplicaciones La parábola tiene muchas propiedades que la hacen apropiada en ciertas aplicaciones. Las superficies reflectoras se diseñan para aprovechar la propiedad de reflexión de las parábolas. Estas superficies, llamadas **paraboloides**, son tridimensionales y se forman rotando una parábola alrededor de su eje. Como se ilustra en la FIGURA 10.1.20, los rayos de luz (o señales electrónicas) provenientes de una fuente puntual ubicada en el foco de una superficie reflectora parabólica se reflejarán a lo largo de líneas paralelas al eje. Ésta es la idea detrás del diseño de reflectores de búsqueda, algunas luces de destellos y los platos satelitales de ubicación. En sentido inverso, si los rayos de luz entrantes son paralelos al eje de una parábola, se reflejarán en la superficie a lo largo de líneas que pasan por el foco. Los haces de luz de un objeto distante tal como una galaxia son esencialmente paralelos, y por eso cuando estos haces entran a un telescopio reflector son reflejados por un espejo parabólico hacia el foco, donde suele ubicarse una cámara para capturar la imagen a lo largo del tiempo. Un disco parabólico satelital doméstico opera bajo el mismo principio que el telescopio reflector; la señal digital de un satélite de televisión es capturada en el foco del disco por un receptor.

Las elipses tienen una propiedad de reflexión análoga a la parábola. Es posible demostrar que si una fuente luminosa o sonora se ubica en uno de los focos de una elipse, entonces todos los rayos u ondas se reflejarán desde la elipse hacia el otro foco. Vea la FIGURA 10.1.21. Por ejemplo, si un techo es elíptico con dos focos sobre (o cerca) del piso, pero con una considerable distancia entre ellos, entonces cualquier susurro en uno de los focos se escuchará en el otro. Algunas



Disco de satélite de TV

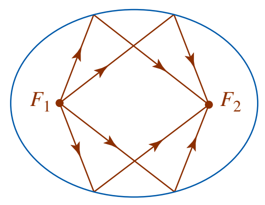


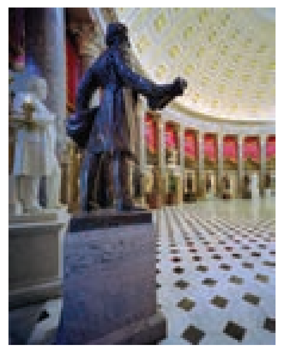
FIGURA 10.1.21 Propiedad de reflexión de una elipse



Telescopio reflector de 200 pulg en Monte Palomar

famosas “galerías de los susurros” son el Statuary Hall en el Capitolio en Washington, D.C., el Mormon Tabernacle en Salt Lake City y la Catedral de San Pablo en Londres.

Mediante su ley de la gravitación universal, Isaac Newton fue el primero en demostrar la primera ley del movimiento planetario de Kepler. La órbita de cada planeta alrededor del Sol es una elipse con el Sol en uno de los focos.



Statuary Hall en Washington, D.C.

EJEMPLO 9 Excentricidad de la órbita terrestre

La distancia del perihelio de la Tierra (la distancia mínima entre la Tierra y el Sol) es aproximadamente de 9.16×10^7 mi, y su distancia del afelio (la distancia más grande entre la Tierra y el Sol) es casi de 9.46×10^7 mi. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita elíptica de la Tierra?

Solución Asumimos que la órbita de la Tierra es como se ilustra en la FIGURA 10.1.22. De acuerdo con la figura advertimos que

$$a - c = 9.16 \times 10^7$$
$$a + c = 9.46 \times 10^7.$$

La solución de este sistema de ecuaciones produce $a = 9.31 \times 10^7$ y $c = 0.15 \times 10^7$. De tal modo, la excentricidad $e = c/a$ es

$$e = \frac{0.15 \times 10^7}{9.31 \times 10^7} \approx 0.016. \qquad ■$$

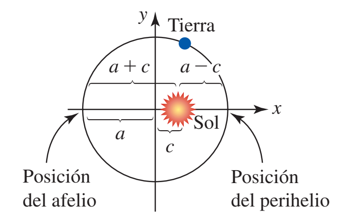


FIGURA 10.1.22 Interpretación gráfica de datos en el ejemplo 9

Las órbitas de siete de los planetas tienen excentricidades menores que 0.1 y, en consecuencia, las órbitas no son muy alejadas de la circular. Mercurio es una excepción. Muchos de los asteroides y cometas tienen órbitas altamente excéntricas. La órbita del asteroide Hidalgo es una de las más excéntricas, con $e = 0.66$. Otro notable caso es la órbita del cometa Halley. Vea el problema 79 en los ejercicios 10.1.

La hipérbola tiene varias aplicaciones importantes que implican técnicas de sonido. En particular, varios sistemas de navegación utilizan a las hipérbolas de la siguiente manera: dos transmisores de radio fijos a una distancia conocida uno del otro transmiten señales sincronizadas. La diferencia en los tiempos de recepción por parte de un navegante determina la diferencia $2a$ de las distancias del navegante a los dos transmisores. Esta información ubica al navegante en algún lugar sobre la hipérbola con focos en los transmisores y fija la diferencia en distancias desde los focos en una cantidad igual a $2a$. Al utilizar dos conjuntos de señales obtenidas de una estación maestra apareada con cada una de dos estaciones secundarias, el sistema de navegación de largo alcance LORAN ubica a un barco o a un avión en la intersección de las dos hipérbolas. Vea la FIGURA 10.1.23.

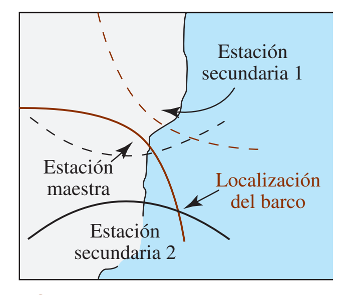
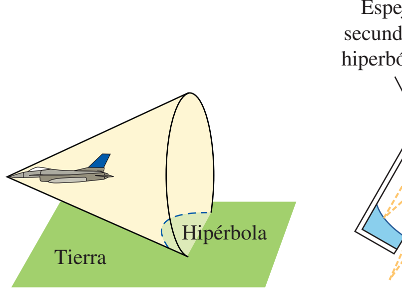
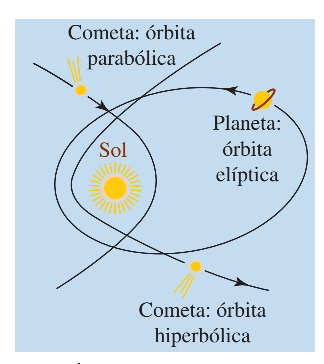


FIGURA 10.1.23 La idea detrás de LORAN

Hay muchas otras aplicaciones de la hipérbola. Como se muestra en la FIGURA 10.1.24*a*), un avión que vuela a una velocidad supersónica paralela al nivel del suelo deja una “huella” sónica hiperbólica sobre el suelo. Al igual que la parábola y la elipse, una hipérbola también posee una propiedad reflectora. El telescopio reflector Cassegrain presentado en la figura 10.1.24*b*) utiliza un espejo secundario hiperbólico convexo para reflejar un rayo de luz de regreso a través de un hoyo en un ocular (o cámara) detrás del espejo primario parabólico. Esta construcción del teles-



a) Huella sónica



b) Telescopio Cassegrain

Cometa: órbita parabólica
Sol
Planeta: órbita elíptica
Cometa: órbita hiperbólica

c) Órbitas alrededor del Sol

FIGURA 10.1.24 Aplicaciones de hipérbolas

copio aprovecha el hecho de que un rayo de luz dirigido a lo largo de una línea a través de uno de los focos de un espejo hiperbólico se reflejará sobre una línea que pasa por el otro foco.

Las órbitas de objetos en el Universo pueden ser parabólicas, elípticas o hiperbólicas. Cuando un objeto pasa cerca del Sol (o un planeta), no necesariamente es capturado por el campo gravitacional del cuerpo más grande. Bajo ciertas condiciones, el objeto toma una cantidad fraccionaria de la energía orbital de este cuerpo mucho mayor y la órbita de “honda” resultante del objeto cuando pasa por el Sol es hiperbólica. Vea la figura 10.1.24*c*).

Ejercicios 10.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-29.

Fundamentos

En los problemas 1-14, encuentre el vértice, el foco, la directriz y el eje de la parábola dada. Grafique la parábola.

1. $y^2 = 4x$
2. $y^2 = \frac{7}{2}x$
3. $x^2 = -16y$
4. $x^2 = \frac{1}{10}y$
5. $(y - 1)^2 = 16x$
6. $(y + 3)^2 = -8(x + 2)$
7. $(x + 5)^2 = -4(y + 1)$
8. $(x - 2)^2 + y = 0$
9. $y^2 + 12y - 4x + 16 = 0$
10. $x^2 + 6x + y + 11 = 0$
11. $x^2 + 5x - \frac{1}{4}y + 6 = 0$
12. $x^2 - 2x - 4y + 17 = 0$
13. $y^2 - 8y + 2x + 10 = 0$
14. $y^2 - 4y - 4x + 3 = 0$

En los problemas 15-22, encuentre una ecuación de la parábola que satisfaga las condiciones dadas.

15. Foco, (0, 7), directriz $y = -7$
16. Foco $(-4, 0)$, directriz $x = 4$
17. Foco $(\frac{5}{2}, 0)$, vértice (0, 0)
18. Foco $(0, -10)$, vértice (0, 0)
19. Foco $(1, -7)$, directriz $x = -5$
20. Foco (2, 3), directriz $y = -3$
21. Vértice (0, 0), que pasa por $(-2, 8)$, eje a lo largo del eje y
22. Vértice (0, 0), que pasa por $(1, \frac{1}{4})$, eje a lo largo del eje x

En los problema 23 y 24, encuentre las intersecciones con los ejes x y y de la parábola dada.

23. $(y + 4)^2 = 4(x + 1)$
24. $(x - 1)^2 = -2(y - 1)$

En los problemas 25-38, encuentre el centro, foco, vértices, puntos frontera del eje menor y la excentricidad de la elipse dada. Grafique la elipse.

25. $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$
26. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$
27. $9x^2 + 16y^2 = 144$
28. $2x^2 + y^2 = 4$
29. $\frac{(x - 1)^2}{49} + \frac{(y - 3)^2}{36} = 1$
30. $\frac{(x + 1)^2}{25} + \frac{(y - 2)^2}{36} = 1$
31. $(x + 5)^2 + \frac{(y + 2)^2}{16} = 1$
32. $\frac{(x - 3)^2}{64} + \frac{(y + 4)^2}{81} = 1$
33. $4x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 4$
34. $36(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 72$
35. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 18y - 116 = 0$
36. $9x^2 + 5y^2 + 18x - 10y - 31 = 0$
37. $x^2 + 3y^2 + 18y + 18 = 0$
38. $12x^2 + 4y^2 - 24x - 4y + 1 = 0$

En los problemas 39-48, encuentre una ecuación de la elipse que satisfaga las condiciones dadas.

39. Vértices $(\pm 5, 0)$, focos $(\pm 3, 0)$
40. Vértices $(\pm 9, 0)$, focos $(\pm 2, 0)$
41. Vértices $(-3, -3)$, $(5, -3)$, puntos frontera del eje menor $(1, -1)$, $(1, -5)$
42. Vértice $(1, -6)$, $(1, 2)$, puntos frontera del eje menor $(-2, -2)$, $(4, -2)$
43. Focos $(\pm\sqrt{2}, 0)$, longitud del eje menor 6
44. Focos $(0, \pm\sqrt{5})$, longitud del eje menor 16
45. Focos $(0, \pm 3)$, que pasa por $(-1, 2\sqrt{2})$
46. Vértices $(\pm 5, 0)$, que pasa por $(\sqrt{5}, 4)$
47. Centro (1, 3), un foco (1, 0), un vértice $(1, -1)$
48. Puntos frontera del eje mayor (2, 4), (13, 4), un foco (4, 4)

En los problemas 49-62, encuentre el centro, focos, vértices, asíntotas y excentricidad de la hipérbola dada. Grafique la hipérbola.

49. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$
50. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$
51. $y^2 - 5x^2 = 20$
52. $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$
53. $\frac{(x - 5)^2}{4} - \frac{(y + 1)^2}{49} = 1$
54. $\frac{(x + 2)^2}{10} - \frac{(y + 4)^2}{25} = 1$
55. $\frac{(y - 4)^2}{36} - x^2 = 1$
56. $\frac{\left(y - \frac{1}{4}\right)^2}{4} - \frac{(x + 3)^2}{9} = 1$
57. $25(x - 3)^2 - 5(y - 1)^2 = 125$
58. $10(x + 1)^2 - 2\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 100$
59. $5x^2 - 6y^2 - 20x + 12y - 16 = 0$
60. $16x^2 - 25y^2 - 256x - 150y + 399 = 0$
61. $4x^2 - y^2 - 8x + 6y - 4 = 0$
62. $2y^2 - 9x^2 - 18x + 20y + 5 = 0$

En los problemas 63-70, encuentre una ecuación de la hipérbola que satisfaga las condiciones dadas.

63. Focos $(0, \pm 4)$, un vértice $(0, -2)$

64. Focos $(0, \pm 3)$, un vértice $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

65. Centro $(1, -3)$, un foco $(1, -6)$, un vértice $(1, -5)$

66. Vértices $(2, 5)$, $(2, -1)$, un foco $(2, 7)$

67. Centro $(-1, 3)$, un vértice $(1, -4)$ que pasa por $\left(-5, 3 + \sqrt{5}\right)$

68. Centro $(3, -5)$, un vértice $(3, -2)$ que pasa por $(1, -1)$

69. Centro (24), un vértice (25), una asíntota $2y - x - 6 = 0$

70. Excentricidad $\sqrt{10}$, puntos frontera del eje conjugado $(-5, 4)$, $(-5, 10)$

Aplicaciones

71. Un gran reflector se diseña de manera que una sección transversal a través de su eje es una parábola y la fuente luminosa se encuentra en el foco. Determine la posición de la fuente luminosa si el reflector mide 4 pies de lado a lado en la abertura y 2 pies de profundidad.

72. Un telescopio reflector tiene un espejo parabólico que mide 20 pies de lado a lado en la parte superior y 4 pies de profundidad en el centro. ¿Dónde debe ubicarse el ocular?

73. Suponga que dos torres de un puente de suspensión están a 350 pies de distancia y que el vértice del cable parabólico es tangente al punto medio de la carretera entre las torres. Si el cable se encuentra a 1 pie por arriba de la carretera en un punto a 20 pies de los vértices, encuentre la altura de las torres sobre la carretera.

74. Dos torres de 75 pies de un puente de suspensión con un cable parabólico están a 250 pies de distancia. El vértice de la parábola es tangente al punto medio de la carretera entre las torres. Determine la altura del cable sobre la carretera en cualquier punto a 50 pies de una de las torres.

75. Suponga que el brote de agua desde el extremo de un tubo horizontal sigue un arco parabólico con vértice en el extremo del tubo. El tubo está 20 metros por arriba del suelo. En un punto a 2 metros por debajo del extremo del tubo, la distancia horizontal desde el agua hasta una línea vertical que pasa por el extremo del tubo es de 4 m. Vea la FIGURA 10.1.25. ¿En qué punto el agua golpea el suelo?

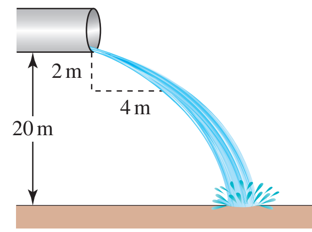


FIGURA 10.1.25 Tubo del problema 75

76. Un lanzador de dardos arroja uno a 5 pies por arriba del suelo. El dardo se lanza horizontalmente y sigue una trayectoria parabólica. Pega en el suelo a $10\sqrt{10}$ pies desde el lanzador de dardos. A la distancia de 10 pies desde el lanzador de dardos, ¿a qué altura debe estar el blanco para que el dardo impacte en él?

77. La órbita del planeta Mercurio es una elipse con el Sol en uno de sus focos. La longitud del eje mayor de esta órbita es de 72 millones de millas y la longitud del eje menor corresponde a 70.4 millones de millas. ¿Cuál es la distancia mínima (perihelio) entre Mercurio y el Sol? ¿Cuál es la distancia más grande (afelio)?

78. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita de Mercurio en el problema 77?

79. La órbita del cometa Halley es una elipse cuyo eje mayor mide 3.34×10^9 millas de largo y cuyo eje menor es de 8.5×10^8 millas de largo. ¿Cuál es la excentricidad de la órbita del cometa?

80. Un satélite orbita la Tierra en una trayectoria parabólica con el centro de la Tierra en un foco. Tiene una altitud mínima de 200 millas y una altitud máxima de 1 000 millas sobre la superficie de la Tierra. Si el radio terrestre es de 4 000 mi, ¿cuál es una ecuación de la órbita del satélite?

81. Un arco semielíptico tiene un eje mayor vertical. La base del arco es de 10 pies de lado a lado y la parte más alta del arco mide 15 pies. Encuentre la altura del arco sobre el punto en la base del arco a 3 pies del centro.

82. Suponga que un cuarto se construye sobre una base elíptica plana rotando una semielipse 180° alrededor de su eje mayor. Después, por la propiedad de reflexión de la elipse, cualquier susurro en un foco se escuchará claramente en el otro foco. Si la altura de la sala es de 16 pies y la longitud corresponde a 40 pies, encuentre la ubicación del susurro y de los puestos de escucha.

Piense en ello

83. La gráfica de la elipse $x^2/4 + (y - 1)^2/9 = 1$ se desplaza 4 unidades a la derecha. ¿Cuáles son el centro, foco, vértices y puntos frontera del eje menor de la gráfica desplazada?

84. La gráfica de la elipse $(x - 1)^2/9 + (y - 4)^2 = 1$ se desplaza 5 unidades hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba. ¿Cuáles son el centro, foco, vértices y puntos frontera del eje menor de la gráfica desplazada?

85. Las hipérbolas

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

se dice que son **conjugadas** entre sí.

a) Encuentre la ecuación de la hipérbola que es la conjugada de

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

b) Analice cómo se relacionan las gráficas de las hipérbolas conjugadas.

86. Una **hipérbola rectangular** es aquella para la cual las asíntotas son perpendiculares.

a) Demuestre que $y^2 - x^2 + 5y + 3x = 1$ es una hipérbola rectangular.

b) ¿Cuáles de las hipérbolas dadas en los problemas 49-62 son rectangulares?

87. Puede demostrarse que un rayo luminoso que emana de un foco de una hipérbola será reflejado a lo largo de la

línea desde el foco opuesto. Vea la FIGURA 10.1.26. Un rayo luminoso desde el foco izquierdo de la hipérbola $x^2/16 - y^2/20 = 1$ incide en la hipérbola $(-6, -5)$. Determine una ecuación del rayo reflejado.

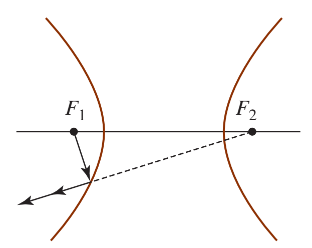


FIGURA 10.1.26 Propiedad reflectora del problema 87

88. Un **óvalo** es una aproximación a una elipse consistente en arcos que surgen de pares de círculos de diferentes radios ubicados simétricamente, siendo cada círculo pequeño tangente a un círculo grande en dos puntos de transición como se indica en la FIGURA 10.1.27. Los arquitectos en los periodos del Renacimiento y barroco usaban óvalos porque son más simples de construir que las elipses. En este problema, considere que los círculos pequeños están centrados en $(\pm a, 0)$, $a > 0$, con radio r, y deje que los círculos grandes se centren en $(0, \pm b)$, $b > 0$, con radio R. Además, considere que $(\pm A, 0)$, $A > 0$, y $(0, \pm B)$, $B > 0$, son los puntos de intersección del óvalo con los ejes x y y.

a) Exprese R en términos de a, b y r.

b) Demuestre que $A > B$. Esto muestra que el "eje mayor" del óvalo está siempre alineado con los centros de los círculos pequeños, y que el "eje menor" del óvalo está siempre en línea con los centros de los círculos grandes. [*Sugerencia*: Demuestre que $A - B = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}$.]

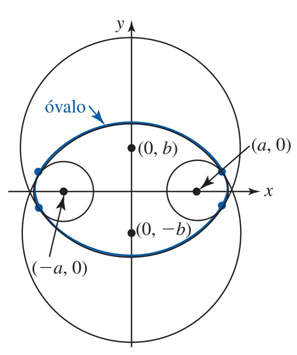


FIGURA 10.1.27 Óvalo en el problema 88

10.2 Ecuaciones paramétricas

Introducción Una ecuación rectangular o cartesiana no es la única manera, y a menudo la más conveniente, de describir una curva en el plano de coordenadas. En esta sección consideraremos una manera diferente de representar una curva que es importante en muchas aplicaciones del cálculo.

Movimiento curvilíneo Empecemos con un ejemplo. El movimiento de una partícula a lo largo de una curva, en contraste con una línea recta, se denomina **movimiento curvilíneo**. Si supone que una pelota de golf golpea sobre el suelo en forma perfectamente recta (sin efecto de gancho o de rebanada) y que su trayectoria permanece en un plano de coordenadas, entonces su movimiento está gobernado por el hecho de que su aceleración en las direcciones x y y satisface

$$a_x = 0, \qquad a_y = -g, \tag{1}$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad y $a_x = d^2x/dt^2$, $a_y = d^2y/dt^2$. En $t = 0$ tomamos $x = 0$, $y = 0$, y las componentes x y y de la velocidad inicial v_0 son

$$v_0 \cos\theta_0 \qquad \text{y} \qquad v_0 \operatorname{sen}\theta_0, \tag{2}$$

respectivamente. Vea la FIGURA 10.2.1. Al tomar dos antiderivadas de cada ecuación en (1), vemos de las condiciones iniciales de (2) que las coordenadas x y y de la pelota de golf en el tiempo t están dadas por

$$x = (v_0 \cos\theta_0)t, \qquad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen}\theta_0)t, \tag{3}$$

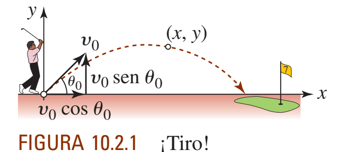


FIGURA 10.2.1 ¡Tiro!

donde θ_0 es el ángulo de lanzamiento, v_0 es la velocidad inicial y $g = 32$ pies/s^2. Estas ecuaciones, las cuales dan la posición de la pelota de golf en el plano de coordenadas en el tiempo t, se llaman **ecuaciones paramétricas**. La tercera variable t en (3) se denomina **parámetro** y está restringido a cierto intervalo I; en este caso, I se define mediante $0 \leq t \leq T$, donde $t = 0$ produce el origen (0, 0) y $t = T$ es el tiempo en el que la pelota golpea el suelo.

La idea en (3), esto es, representar a x y y en un par ordenado (x, y) mediante funciones de una tercera variable t, se usa para *definir* una curva.

Definición 10.2.1 Curva plana

Si f y g son funciones continuas definidas sobre un intervalo común I, entonces $x = f(t)$, $y = g(t)$ se llaman **ecuaciones paramétricas** y t recibe el nombre de **parámetro**. El conjunto C de pares ordenados $(f(t), g(t))$ cuando t varía sobre I se denomina una **curva plana**.

Es una práctica común referirse al conjunto de ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, para t en I, como una **parametrización** de C. De aquí en adelante, haremos referencia a una curva plana C como una **curva paramétrica** o como una **curva parametrizada**. La **gráfica** de una curva paramétrica C es el conjunto de todos los puntos (x, y) en el plano de coordenadas correspondientes al par ordenado $(f(t), g(t))$. Por simplicidad, no se establecerá la distinción entre una *curva paramétrica* y una *gráfica de una curva*.

EJEMPLO 1 Curva paramétrica

Grafique la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad -1 \le t \le 2.$$

Solución Como se indica en la tabla siguiente, para cualquier elección de t en el intervalo $[-1, 2]$, se obtiene un solo par ordenado (x, y). Al conectar los puntos con una curva, obtenemos la gráfica de la FIGURA 10.2.2.

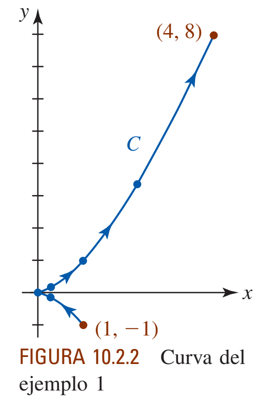


FIGURA 10.2.2 Curva del ejemplo 1

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2
x	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4
y	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$	2

■

En el ejemplo 1, si piensa en términos de movimiento y en t como el tiempo, entonces cuando t aumenta de -1 a 2, un punto P definido como (t^2, t^3) empieza desde $(1, -1)$, avanza hacia arriba en la rama inferior de la curva hacia el origen $(0, 0)$, pasa a la rama superior y finalmente se detiene en $(4, 8)$. En general, un parámetro t no necesita tener relación con el tiempo. Cuando se grafican puntos correspondientes a *valores crecientes* del parámetro, se traza una curva C mediante $(f(t), g(t))$ en una cierta *dirección* indicada por las flechas sobre la curva en la figura 10.2.2. La dirección se denomina la **orientación** de la curva C.

Cuando el intervalo I sobre el cual f y g se definen es un intervalo cerrado $[a, b]$, afirmamos que $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva C y que $(f(b), g(b))$ es su **punto final**. En el ejemplo 1, $(1, -1)$ y $(4, 8)$ son los puntos inicial y final de C, respectivamente. Si el punto final es el mismo que el punto inicial, esto es,

$$(f(a), g(a)) = (f(b), g(b)),$$

entonces C es una **curva cerrada**. Si C es cerrada pero no se cruza a sí misma, entonces se denomina **curva cerrada simple**. En la FIGURA 10.2.3, A y B representan los puntos inicial y final, respectivamente.

B
A
a) Curva plana

A = B
b) Curva simple cerrada

A = B
c) Cerrada pero no simple

FIGURA 10.2.3 Algunas curvas planas

El siguiente ejemplo ilustra una curva cerrada simple.

EJEMPLO 2 Una parametrización de un círculo

Encuentre una parametrización del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Solución El círculo tiene centro en el origen y radio $a > 0$. Si t representa el ángulo central, esto es, un ángulo con vértice en el origen y lado inicial que coincide con el eje x positivo, entonces como se muestra en la FIGURA 10.2.4 las ecuaciones

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2\pi \tag{4}$$

proporcionan cada punto P sobre el círculo. Por ejemplo, en $t = \pi/2$ obtenemos $x = 0$ y $y = a$, en otras palabras, el punto es $(0, a)$. El punto inicial corresponde a $t = 0$ y es $(a, 0)$; el punto final corresponde a $t = 2\pi$ y es también $(a, 0)$. Puesto que los puntos inicial y final son los mismos,

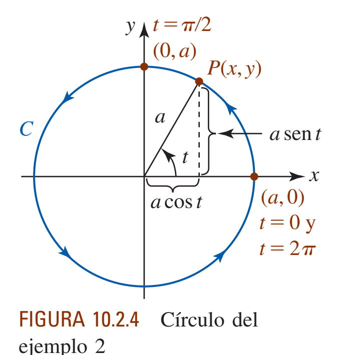


FIGURA 10.2.4 Círculo del ejemplo 2

esto demuestra lo que es evidente: la curva C definida por las ecuaciones paramétricas (4) es una curva cerrada. Advierta la orientación de C en la figura 10.2.4; cuando t aumenta de 0 a 2π, el punto $P(x, y)$ traza C en una dirección contraria a la de las manecillas del reloj. ■

En el ejemplo 2, el *semicírculo* superior $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq y \leq a$, se define paramétricamente restringiendo el parámetro t al intervalo $[0, \pi]$,

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Observe que cuando $t = \pi$, el punto final es ahora $(-a, 0)$. Por otro lado, si desea describir *dos* revoluciones completas en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del círculo, de nuevo modifica el intervalo del parámetro al escribir

$$x = a\cos t, \quad y = a \operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Eliminación del parámetro Dado un conjunto de ecuaciones paramétricas, algunas veces se desea *eliminar* o *despejar* el parámetro para obtener una ecuación rectangular de la curva. Para eliminar el parámetro en (4), simplemente se elevan al cuadrado x y y y se suman las dos ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = a^2\cos^2 t + a^2\operatorname{sen}^2 t \quad \text{implica que} \quad x^2 + y^2 = a^2$$

puesto que $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$. No hay una manera única de eliminar el parámetro.

EJEMPLO 3 Eliminación del parámetro

a) De la primera ecuación en (3) tenemos $t = x/(v_0 \cos\theta_0)$. Al sustituir esto en la segunda ecuación da

$$y = -\frac{g}{2(v_0\cos\theta_0)^2}x^2 + (\tan\theta_0)x.$$

Puesto que v_0, θ_0 y g son constantes, la última ecuación tiene la forma $y = ax^2 + bx$ y por ello la trayectoria de cualquier proyectil lanzado a un ángulo $0 < \theta_0 < \pi/2$ es un arco parabólico.

b) En el ejemplo 1 es posible eliminar el parámetro de $x = t^2$, $y = t^3$ resuelve la segunda ecuación para t en términos de y y después al sustituir la primera ecuación encontramos que

$$t = y^{1/3} \quad \text{y por tanto} \quad x = (y^{1/3})^2 = y^{2/3}.$$

La curva que se muestra en la figura 10.2.2 es sólo una porción de la gráfica $x = y^{2/3}$. Para $-1 \leq t \leq 2$ se tiene de manera correspondiente $-1 \leq y \leq 8$. De tal modo, una ecuación rectangular para la curva en el ejemplo 1 está dada por $x = y^{2/3}$, $-1 \leq y \leq 8$. ■

Una curva C puede tener más de una parametrización. Por ejemplo, una parametrización alterna del círculo en el ejemplo 2 es

Una curva C puede tener muchas parametrizaciones diferentes.

$$x = a\cos 2t, \quad y = a \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Advierta que el intervalo del parámetro ahora es $[0, \pi]$. Vemos que conforme t aumenta de 0 a π, el nuevo ángulo $2t$ aumenta de 0 a 2π.

EJEMPLO 4 Parametrizaciones alternas

Considere la curva C que tiene las ecuaciones paramétricas $x = t$, $y = 2t^2$, $-\infty < t < \infty$. Es posible eliminar el parámetro si utilizamos $t = x$ y sustituimos en $y = 2t^2$. Esto produce la ecuación rectangular $y = 2x^2$, la cual reconocemos como una parábola. Además, puesto que $-\infty < t < \infty$ es equivalente a $-\infty < x < \infty$, el punto $(t, 2t^2)$ traza la parábola completa $y = 2x^2$, $-\infty < x < \infty$.

Una parametrización alterna de C está dada por $x = t^3/4$, $y = t^6/8$, $-\infty < t < \infty$. Empleamos $t^3 = 4x$ y sustituimos en $y = t^6/8$ o $y = (t^3 \cdot t^3)/8$ produce $y = (4x)^2/8 = 2x^2$. Además, $-\infty < t < \infty$ implica $-\infty < t^3 < \infty$ y por ello $-\infty < x < \infty$. ■

Advierta en el ejemplo 4 que un punto sobre C no necesita corresponder con el mismo valor del parámetro en cada conjunto de ecuaciones paramétricas de C. Por ejemplo, $(1, 2)$ se obtuvo para $t = 1$ en $x = t$, $y = 2t^2$, pero $t = \sqrt[3]{4}$ produce $(1, 2)$ en $x = t^3/4$, $y = t^6/8$.

EJEMPLO 5 Repaso del ejemplo 4

Es necesario tener cuidado cuando se trabaja con ecuaciones paramétricas. Al eliminar el parámetro en $x = t^2$, $y = 2t^4$, $-\infty < t < \infty$, parecería que se produce la misma parábola $y = 2x^2$ como en el ejemplo 4. Sin embargo, éste *no* es el caso porque para cualquier valor de t, $t^2 \geq 0$ y por ello $x \geq 0$. En otras palabras, el último conjunto de ecuaciones sólo es una representación paramétrica de la rama del lado derecho de la parábola, esto es, $y = 2x^2$, $0 \leq x < \infty$. ■

Debe proceder con cuidado para eliminar el parámetro.

EJEMPLO 6 Eliminación del parámetro

Considere la curva C definida paramétricamente por

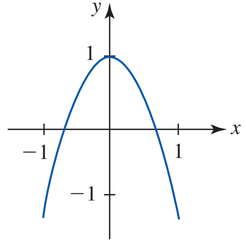
$$x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi/2.$$

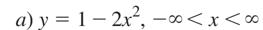
Elimine el parámetro y obtenga una ecuación rectangular para C.

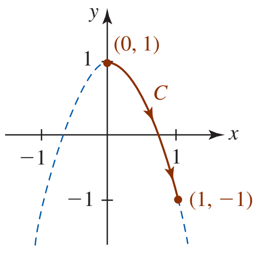
Solución Al utilizar la fórmula del ángulo doble $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$, es posible escribir

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t \\ &= (1 - \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{sen}^2 t \\ &= 1 - 2\operatorname{sen}^2 t \quad \leftarrow \text{sustituir } \operatorname{sen} t = x \\ &= 1 - 2x^2. \end{aligned}$$

En este caso la curva C descrita por las ecuaciones paramétricas no consiste en la parábola completa, esto es, $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$. Vea la FIGURA 10.2.5*a*). Para $0 \leq t \leq \pi/2$ tenemos $0 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$ y $-1 \leq \cos 2t \leq 1$. Esto significa que C es sólo aquella porción de la parábola para la cual las coordenadas de un punto $P(x, y)$ satisfacen $0 \leq x \leq 1$ y $-1 \leq y \leq 1$. La curva C, junto con su orientación, aparecen en la figura 10.2.5*b*). Una ecuación rectangular para C es $y = 1 - 2x^2$ con el dominio restringido $0 \leq x \leq 1$. ■




a) $y = 1 - 2x^2$, $-\infty < x < \infty$



b) $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos 2t$, $0 \leq t \leq \pi/2$

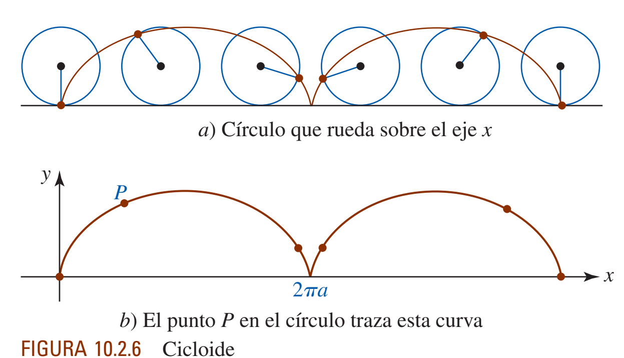
FIGURA 10.2.5 Curva C del ejemplo 6

Intersecciones con los ejes

Podemos obtener las intersecciones con los ejes de una curva C sin determinar su ecuación rectangular. Por ejemplo, en el ejemplo 6 encontramos que la intersección con el eje x determina el valor de t en el intervalo paramétrico para el cual $y = 0$. La ecuación $\cos 2t = 0$ produce $2t = \pi/2$, por lo que $t = \pi/4$. El punto correspondiente en el cual C cruza al eje x es $\left(\sqrt{2}, 0\right)$. De manera similar, la intersección de C con el eje y la encontramos al resolver $x = 0$ para t. De $\operatorname{sen} t = 0$ concluimos de inmediato que $t = 0$ y por eso la intersección con el eje y es $(0, 1)$.

Aplicaciones de ecuaciones paramétricas

Las curvas cicloidales fueron un tema popular de estudio para los matemáticos en el siglo XVII. Suponga que un punto $P(x, y)$, marcado sobre un círculo de radio a, está en el origen cuando su diámetro yace a lo largo del eje y. Conforme el círculo rueda a lo largo del eje x, el punto P traza una curva C que recibe el nombre de **cicloide**. Vea la FIGURA 10.2.6.



a) Círculo que rueda sobre el eje x

b) El punto P en el círculo traza esta curva

FIGURA 10.2.6 Cicloide

Dos problemas fueron estudiados ampliamente en el siglo XVII. Considere un alambre flexible (sin fricción) fijo a los puntos A y B y a una cuenta libre de deslizarse por el alambre empezando en P. Vea la FIGURA 10.2.7. ¿Existe una forma particular del alambre de manera que, independientemente de dónde empiece la cuenta, el tiempo para deslizarse por el alambre hasta B será el mismo? Además, ¿cuál sería la forma del alambre de manera que la cuenta se deslice de P a B en el tiempo más corto? El así llamado **tautócrono** (mismo tiempo) y **braquistócrono** (tiempo mínimo) se presentaron como el medio arco invertido de una cicloide.

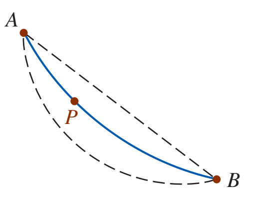


FIGURA 10.2.7 Cuenta deslizante

EJEMPLO 7 Parametrización de una cicloide

Encuentre una parametrización de la cicloide que se muestra en la figura 10.2.6*b*).

Solución Un círculo de radio a cuyo diámetro inicialmente yace a lo largo del eje y rueda a lo largo del eje x sin deslizamiento. Tomamos como parámetro el ángulo θ (en radianes), a través del cual ha rotado el círculo. El punto $P(x, y)$ empieza en el origen, lo cual corresponde a $\theta = 0$. Conforme rueda el círculo a lo largo de un ángulo θ, su distancia desde el origen es el arco $PE = \overline{OE} = a\theta$. De la FIGURA 10.2.8 vemos entonces que la coordenada x de P es

$$x = \overline{OE} - \overline{QE} = a\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Ahora se advierte que la coordenada y de P es

$$y = \overline{CE} - \overline{CD} = a - a\cos\theta.$$

En consecuencia, las ecuaciones paramétricas para la cicloide son

$$x = a\theta - a\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad y = a - a\cos\theta.$$

Como se ilustra en la figura 10.2.6*a*), un arco de una cicloide es generado por una rotación del círculo y corresponde a un intervalo paramétrico $0 \leq \theta \leq 2\pi$. ■

FIGURA 10.2.8 En el ejemplo 7, el ángulo θ es el parámetro del cicloide

Parametrización de curvas rectangulares

Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ también se parametriza dejando $x = t$. Las ecuaciones paramétricas para C son entonces

$$x = t, \quad y = f(t). \tag{5}$$

Por ejemplo, un ciclo de la gráfica de la función seno $y = \mathrm{sen}\,x$ se parametriza mediante $x = t$, $y = \mathrm{sen}\,t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

FIGURA 10.2.9 Hélice circular

Curvas suaves

Una curva C, dada paramétricamente por

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \leq t < b,$$

se dice que es **suave** si f' y g' son continuas sobre $[a, b]$ y no simultáneamente cero sobre (a, b). Se dice que una curva C es **suave por secciones** si el intervalo $[a, b]$ puede dividirse en subintervalos tales que C es suave sobre cada subintervalo. Las curvas en los ejemplos 2, 3 y 6 son suaves; las curvas en los ejemplos 1 y 7 son suaves por secciones.

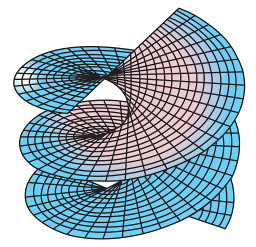
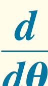


FIGURA 10.2.10 Helicoide circular



NOTAS DESDE EL AULA

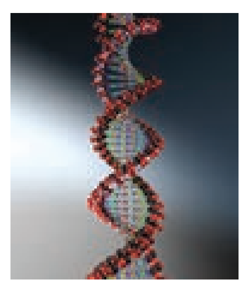
Esta sección se enfoca en **curvas planas**, curvas C definidas paramétricamente en dos dimensiones. En el estudio del cálculo de múltiples variables verá curvas y superficies en tres dimensiones que se definen mediante ecuaciones paramétricas. Por ejemplo, una **curva espacial** C consiste en un conjunto de tripletes ordenados $(f(t), g(t), h(t))$, donde f, g y h se definen sobre un intervalo común. Las ecuaciones paramétricas para C son $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$. Por ejemplo, la **hélice circular** de la FIGURA 10.2.9 es una curva espacial cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x = a\cos t, \quad y = a\cos t, \quad z = bt, \quad t \geq 0. \tag{6}$$

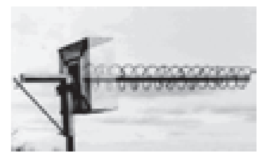
Las superficies en tres dimensiones se representan mediante un conjunto de ecuaciones paramétricas que involucran a *dos* parámetros, $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$. Por ejemplo, el **helicoide circular** que se muestra en la FIGURA 10.2.10 surge del estudio de superficies mínimas y está definido por el conjunto de ecuaciones paramétricas similar al correspondiente a (6):

$$x = u\cos v, \quad y = u\,\mathrm{sen}\,v, \quad z = bv,$$

donde b es una constante. El helicoide circular tiene una hélice circular como su frontera. El lector podría reconocer al helicoide como el modelo para el álabe curvado rotatorio en maquinarias tales como excavadoras para hoyos de postes, taladros de hielo y máquinas quitanieve.



El ADN es una doble hélice



Antena helicoide

Ejercicios 10.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-31.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, complete la tabla para un conjunto dado de ecuaciones paramétricas.

1. $x = 2t + 1, y = t^2 + t$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x							
y							

2. $x = \cos t, y = \operatorname{sen}^2 t,$

t	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$5\pi/6$	$7\pi/4$
x							
y							

En los problemas 3-10, grafique la curva que tiene el conjunto indicado de ecuaciones paramétricas.

3. $x = t - 1, y = 2t - 1; \quad -1 \le t \le 5$

4. $x = 3t, y = t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 3$

5. $x = \sqrt{t}, y = 5 - t; \quad t \ge 0$

6. $x = 3 + 2\operatorname{sen} t, y = 4 + \operatorname{sen} t; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

7. $x = 4\cos t, y = 4\operatorname{sen} t; \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

8. $x = t^3 + 1, y = t^2 - 1; \quad -2 \le t \le 2$

9. $x = e^t, y = e^{3t}; \quad 0 \le t \le \ln 2$

10. $x = -e^t, y = e^{-t}; \quad t \ge 0$

En los problemas 11-16, elimine los parámetros del conjunto dado de ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica.

11. $x = t^2, y = t^4 + 3t^2 - 1$

12. $x = t^3 + t + 4, y = -2t^3 - 2t$

13. $x = -\cos 2t, y = \operatorname{sen} t; \quad -\pi/4 \le t \le \pi/4$

14. $x = e^t, y = \ln t; \quad t > 0$

15. $x = t^3, y = 3\ln t; \quad t > 0$

16. $x = \tan t, y = \sec t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

En los problemas 17-22, muestre de manera gráfica la diferencia entre las curvas indicadas.

17. $y = x$ y $x = \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t$

18. $y = x^2$ y $x = -\sqrt{t}, y = t, t \ge 0$

19. $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ y $x = 2t, y = t^2 - 1, -1 \le t \le 2$

20. $y = -x^2$ y $x = e^t, y = -e^{2t}, t \ge 0$

21. $x^2 - y^2 = 1$ y $x = \cosh t, y = \operatorname{senh} t$

22. $y = 2x - 2$ y $x = t^2 - 1, y = 2t^2 - 4$

En los problemas 23-26, muestre de manera gráfica las diferencias entre las curvas indicadas. Suponga $a > 0, b > 0$.

23. $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
$x = a\operatorname{sen} t, y = a\cos t, \quad 0 \le t \le \pi$

24. $x = a\cos t, y = b\operatorname{sen} t, a > b, \quad \pi \le t \le 2\pi$
$x = a\operatorname{sen} t, y = b\cos t, a > b, \quad \pi \le t \le 2\pi$

25. $x = a\cos t, y = a\operatorname{sen} t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$
$x = a\cos 2t, y = a\operatorname{sen} 2t, \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2$

26. $x = a\cos\frac{t}{2}, y = a\operatorname{sen}\frac{t}{2}, \quad 0 \le t \le \pi$
$x = a\cos\left(-\frac{t}{2}\right), y = a\operatorname{sen}\left(-\frac{t}{2}\right), \quad -\pi \le t \le 0$

En los problemas 27 y 28, grafique la curva que tiene las ecuaciones paramétricas indicadas.

27. $x = 1 + 2\cosh t, y = 2 + 3\operatorname{senh} t$

28. $x = -3 + 3\cos t, y = 5 + 5\operatorname{sen} t$

En los problemas 29-34, determine si el conjunto dado de ecuaciones paramétricas tiene la misma gráfica que la ecuación rectangular $xy = 1$.

29. $x = \dfrac{1}{2t + 1}, y = 2t + 1$

30. $x = t^{1/2}, y = t^{-1/2}$

31. $x = \cos t, y = \sec t$

32. $x = t^2 + 1, y = (t^2 + 1)^{-1}$

33. $x = e^{-2t}, y = e^{2t}$

34. $x = t^3, y = t^{-3}$

Aplicaciones

35. Como se muestra en la FIGURA 10.2.11, un émbolo está unido por medio de una varilla de longitud L a un mecanismo de manivela circular de radio r. Parametrice las coordenadas del punto P en términos del ángulo ϕ.

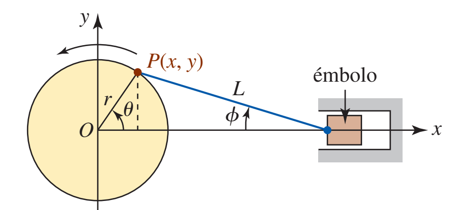


FIGURA 10.2.11 Mecanismo de manivela del problema 35

36. Un punto Q traza una trayectoria circular de radio r y un punto P se mueve de la manera que se indica en la FIGURA 10.2.12. Si R es constante, encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por P. Esta curva recibe el nombre de **epitrocoide**. (Aquellos que sepan sobre automóviles podrían reconocer la curva trazada por P como la

forma del rotor albergado en el motor rotatorio o de Wankel.)

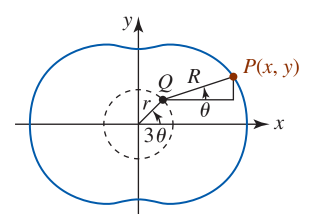


FIGURA 10.2.12 Epitrocoide del problema 36

37. Un carrete circular de hilo enrollado tiene su centro en el origen. El radio del carrete es a. El extremo del hilo P, empezando en $(a, 0)$, se desenrolla mientras el hilo se mantiene tirante. Vea la FIGURA 10.2.13. Encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria seguida por el punto P si el hilo PR es tangente al carrete circular en R. La curva se denomina **involuta** de un círculo.

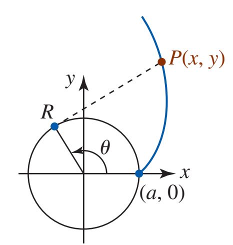


FIGURA 10.2.13 Involuta de un círculo en el problema 37

38. Imagine un pequeño círculo de radio a que rueda sobre el interior de un círculo más grande de radio $b > a$. Un punto P del círculo más pequeño genera una curva llamada **hipocicloide**. Recurra a la FIGURA 10.2.14 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una hipocicloide son

$$x = (b - a)\cos\theta + a\cos\frac{b-a}{a}\theta$$
$$y = (b - a)\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}\frac{b-a}{a}\theta.$$

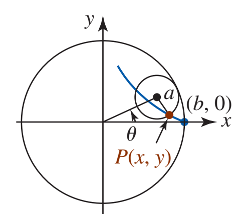


FIGURA 10.2.14 Hipocicloide del problema 38

39. ***a*)** Emplee las ecuaciones del problema 38 para demostrar que las ecuaciones paramétricas de una **hipocicloide de cuatro cúspides** son

$$x = b\cos^3\theta, \quad y = b\operatorname{sen}^3\theta.$$

***b*)** Mediante la herramienta de graficación obtenga la gráfica de la curva en el inciso *a*)

***c*)** Elimine el parámetro y obtenga una ecuación rectangular para la hipocicloide de cuatro cúspides.

40. Emplee la FIGURA 10.2.15 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una **epicicloide** están dadas por

$$x = (a + b)\cos\theta - a\cos\frac{a+b}{a}\theta$$
$$y = (a + b)\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}\frac{a+b}{a}\theta.$$

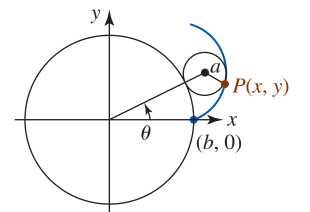


FIGURA 10.2.15 Epicicloide del problema 40

41. ***a*)** Emplee las ecuaciones del problema 40 para mostrar que las ecuaciones paramétricas de una **epicicloide de tres cúspides** son

$$x = 4a\cos\theta - a\cos 4\theta, \; y = 4a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}4\theta.$$

***b*)** Mediante un aparato para graficación obtenga la gráfica de la curva del inciso *a*).

42. Un clásico matemático

***a*)** Considere un círculo de radio a, que es tangente al eje x en el origen O. Sea B un punto sobre una línea horizontal que pasa por $(0, 2a)$ y considere que el segmento de recta OB corta al círculo en el punto A. Como se muestra en la FIGURA 10.2.16, la proyección de AB sobre la vertical produce el segmento de recta BP. Encuentre ecuaciones paramétricas de la trayectoria trazada por el punto P cuando A varía alrededor del círculo. La curva recibe el nombre de **Bruja de Agnesi**. No, la curva no tiene nada que ver con brujas ni duendes. Esta curva, llamada *versoria*, que es el término en latín para un tipo de cuerda, se incluyó en un texto de geometría analítica escrito en 1748 por la matemática italiana **Maria Gaetana Agnesi** (1718-1799). Este texto tuvo tanta popularidad que rápidamente se tradujo al inglés. El traductor confundió *versoria* con la palabra italiana *versiera*, que significa *duende femenino*. En inglés, *duende femenino* se convirtió en *bruja*.

***b*)** En el inciso *a*) elimine el parámetro y demuestre que la curva tiene la ecuación rectangular

$$y = 8a^3/(x^2 + 4a^2).$$

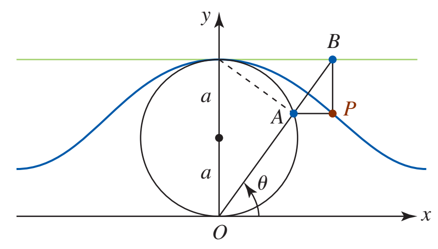


FIGURA 10.2.16 Bruja de Agnesi del problema 42

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 43-48, emplee una calculadora o un SAC para obtener la gráfica del conjunto dado de ecuaciones paramétricas.

43. $x = 4 \operatorname{sen} 2t, y = 2 \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

44. $x = 6 \cos 3t, y = 4 \operatorname{sen} 2t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

45. $x = 6 \cos 4t, y = 4 \operatorname{sen} t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

46. $x = \cos t + t \operatorname{sen} t, y = \operatorname{sen} t - t \cos t; \quad 0 \le t \le 3\pi$

47. $x = t^3 - 4t + 1, y = t^4 - 4t^2; \quad -5 \le t \le 5$

48. $x = t^5 - t + 1, y = t^3 + 2t - 1; \quad -3 \le t \le 6$

≡ Piense en ello

49. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para una línea que pasa por (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, y = y_1 + (y_2 - y_1)t, -\infty < t < \infty.$$

¿Qué representan estas ecuaciones cuando $0 \le t \le 1$?

50. ***a***) Use el resultado del problema 49 para encontrar las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (−2, 5) y (4, 8).

b) Elimine el parámetro del inciso *a*) para obtener una ecuación rectangular de la recta.

c) Encuentre las ecuaciones paramétricas del segmento de recta con (−2, 5) como el punto inicial y (4, 8) como el punto final.

51. Una esquiadora salta por una rampa sobre una pendiente y sale despedida horizontalmente por el aire con una velocidad inicial de 75 pies/s. Como se muestra en la FIGURA 10.2.17, la pendiente cae a partir de la horizontal a un ángulo de 33°. Emplee las ecuaciones en (3) para determinar cuán abajo en la pendiente aterrizará la esquiadora. [*Sugerencia*: Observe que los ejes *x* y *y* en la figura 10.2.1 están en la posición estándar (a la derecha y hacia arriba, respectivamente). En la figura 10.2.17 suponga que el origen es el punto donde la esquiadora sale despedida en el aire.]

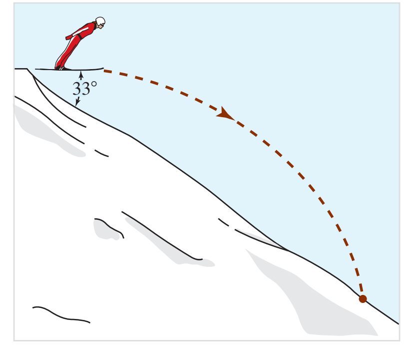


FIGURA 10.2.17 Esquiadora en el problema 51

≡ Proyectos

52. Curva de la mariposa La gráfica del conjunto de ecuaciones paramétricas

$$x = \operatorname{sen} t\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t + \operatorname{sen}^5 \frac{1}{12}t\right),$$

$$y = \cos t\left(e^{\cos t} - 2\cos 4t + \operatorname{sen}^5 \frac{1}{12}t\right)$$

se dice que es una **curva de mariposa**. La FIGURA 10.2.18 consta de siete porciones coloreadas de la curva correspondiente a diferentes intervalos del parámetro. Experimente con un SAC para determinar estos intervalos del parámetro. Emplee el SAC para generar más porciones coloreadas y después combine todas las curvas coloreadas en un conjunto de ejes de coordenadas.

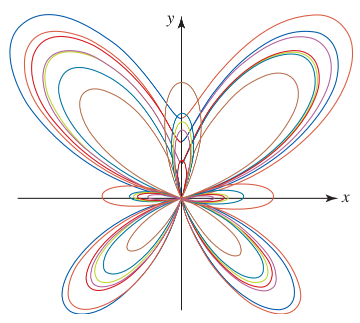


FIGURA 10.2.18 Curva de mariposa del problema 52

53. La curva en la figura 10.2.18 es una de las dos curvas conocidas como una curva de mariposa. Escriba un breve informe que analice ambos tipos de curvas.

54. Curvas de Bézier La mayoría de las aplicaciones de graficación por computadora trazan ecuaciones paramétricas además de gráficas de funciones. Todas las calculadoras gráficas pueden trazar ecuaciones paramétricas calculando de manera repetida un punto sobre la curva y después graficándolo. En este proyecto se introducen algunas curvas paramétricas especiales llamadas **curvas de Bézier**, las cuales son comunes en el diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en inglés), en programas de dibujo por computadora y en representaciones matemáticas de diferentes fuentes para muchas impresoras láser. Una curva de Bézier *cúbica* se especifica mediante cuatro puntos de control en el plano, por ejemplo,

$$P_0(p_0, q_0), \quad P_1(p_1, q_1), \quad P_2(p_2, q_2) \quad \text{y} \quad P_3(p_3, q_3).$$

La curva empieza en el primer punto para el valor $t = 0$, termina en el último punto para $t = 1$, y de manera aproximada "apunta hacia" los puntos medios de los valores del parámetro entre 0 y 1. Los artistas e ingenieros de diseño pueden mover los puntos de control para ajustar las ubicaciones finales y la forma de la curva paramétrica. La curva de Bézier cúbica para estos cuatro puntos de control tiene las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = p_0(1 - t)^3 + 3p_1(1 - t)^2t + 3p_2(1 - t)t^2 + p_3t^3$$

$$y = q_0(1 - t)^3 + 3q_1(1 - t)^2t + 3q_2(1 - t)t^2 + q_3t^3,$$

donde $0 \le t \le 1$. Varias curvas de Bézier pueden conectarse por pedazos de manera continua haciendo que el último punto de control sobre una curva sea el primer punto de control sobre la curva siguiente. De manera equivalente, es posible construir las ecuaciones paramétricas por secciones. Por ejemplo, la pieza siguiente puede representarse por medio de

$$x = p_3(2 - t)^3 + 3p_4(2 - t)^2(t - 1) + 3p_5(2 - t)(t - 1)^2 + p_6(t - 1)^3$$

$$y = q_3(2 - t)^3 + 3q_4(2 - t)^2(t - 1) + 3q_5(2 - t)(t - 1)^2 + q_6(t - 1)^3,$$

donde $1 \leq t \leq 2$.

En *a*)-*f*), use un aparato para graficación para obtener la gráfica de la curva de Bézier continua por secciones asociada con los puntos de control dados.

a) $P_0(5, 1)$, $P_1(1, 30)$, $P_2(50, 28)$, $P_3(55, 5)$
b) $P_0(32, 1)$, $P_1(85, 25)$, $P_2(1, 30)$, $P_3(40, 3)$
c) $P_0(10, 5)$, $P_1(16, 4)$, $P_2(25, 28)$, $P_3(30, 30)$, $P_4(18, 1)$, $P_5(40, 18)$, $P_6(16, 20)$
d) $P_0(55, 50)$, $P_1(45, 40)$, $P_2(38, 20)$, $P_3(50, 20)$, $P_4(60, 20)$, $P_5(63, 35)$, $P_6(45, 32)$
e) $P_0(30, 30)$, $P_1(40, 5)$, $P_2(12, 12)$, $P_3(45, 10)$, $P_4(58, 10)$, $P_5(66, 31)$, $P_6(25, 30)$
f) $P_0(48, 20)$, $P_1(20, 15)$, $P_2(20, 50)$, $P_3(48, 45)$, $P_4(28, 47)$, $P_5(28, 18)$, $P_6(48, 20)$, $P_7(48, 36)$, $P_8(52, 32)$, $P_9(40, 32)$

En *g*)-*i*) experimente con las ubicaciones de los puntos de control para obtener curvas de Bézier continuas por secciones aproximando la forma u objeto indicados. Proporcione los puntos de control finales que eligió y dibuje la curva paramétrica resultante.

g) Históricamente la letra “S” ha sido una de las más difíciles de representar matemáticamente. Use dos o tres pedazos de curva de Bézier para dibujar una letra “S” en algún estilo de fuente simple.
h) La sección transversal larga de un huevo no se asemeja mucho a una elipse debido a que un extremo es más puntiagudo que el otro. Utilice varios pedazos de curva de Bézier para representar una aproximación de la forma de un huevo.
i) Proporcione una curva aproximando la forma de la letra ε, utilizando tan pocas piezas como sea posible.

Termine este proyecto con la redacción de un breve informe que analice las curvas de Bézier lineal, cuadrática y de grado *n*-ésimo. Incluya un análisis acerca de la historia antigua de las curvas de Bézier; por ejemplo, ¿cuál fue la aportación de Pierre Bézier?

10.3 Cálculo y ecuaciones paramétricas

Introducción Al igual que con las gráficas de funciones $y = f(x)$, podemos obtener información útil acerca de una curva C definida paramétricamente al examinar la derivada dy/dx.

Pendiente Sean $x = f(t)$ y $y = g(t)$ las ecuaciones paramétricas de una curva suave C. La **pendiente** de la recta tangente en un punto $P(x, y)$ sobre C está dada por dy/dx. Para calcular esta derivada, se usa la forma de la derivada dada en (3) de la sección 3.1:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Para un incremento Δt, los incrementos en x y y son, respectivamente,

$$\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t) \qquad \text{y} \qquad \Delta y = g(t + \Delta t) - g(t)$$

y por ello

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\dfrac{g(t + \Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\dfrac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}}.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta y/\Delta t}{\lim_{\Delta t \to 0} \Delta x/\Delta t} = \frac{dy/dt}{dx/dt},$$

cuando el límite del denominador no es cero. La forma paramétrica de la derivada se resume en el siguiente teorema.

Teorema 10.3.1 Pendiente de una recta tangente

Si $x = f(t)$, $y = g(t)$ define una curva suave C, entonces la **pendiente de una recta tangente** en un punto $P(x, y)$ sobre C es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}, \qquad (1)$$

siempre que $f'(t) \neq 0$.

EJEMPLO 1 Recta tangente

Encuentre una ecuación de una recta tangente a la curva $x = t^2 - 4t - 2$, $y = t^5 - 4t^3 - 1$ en el punto correspondiente a $t = 1$.

Solución Primero determinamos la pendiente dy/dx de la recta tangente. Puesto que

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 4 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = 5t^4 - 12t^2$$

se deduce de (1) que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{5t^4 - 12t^2}{2t - 4}.$$

De tal modo, en $t = 1$ tenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}.$$

Al sustituir $t = 1$ de nuevo en las ecuaciones paramétricas originales, encontramos que el punto de tangencia es $(-5, -4)$. En consecuencia, una ecuación de la recta tangente en ese punto es

$$y - (-4) = \frac{7}{2}(x - (-5)) \qquad \text{o} \qquad y = \frac{7}{2}x + \frac{27}{2}.$$

Con la ayuda de un SAC se obtiene la curva dada en la FIGURA 10.3.1. ■

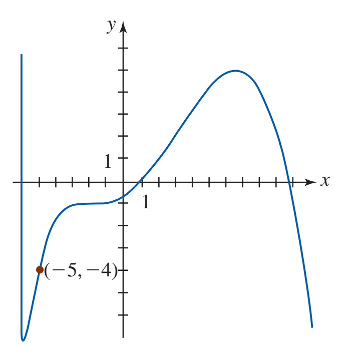
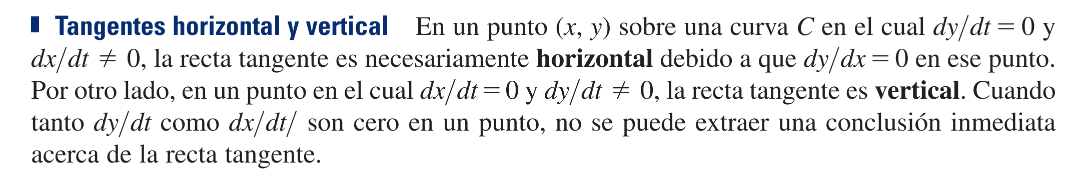


FIGURA 10.3.1 Curva del ejemplo 1



Tangentes horizontal y vertical En un punto (x, y) sobre una curva C en el cual $dy/dt = 0$ y $dx/dt \neq 0$, la recta tangente es necesariamente **horizontal** debido a que $dy/dx = 0$ en ese punto. Por otro lado, en un punto en el cual $dx/dt = 0$ y $dy/dt \neq 0$, la recta tangente es **vertical**. Cuando tanto dy/dt como $dx/dt/$ son cero en un punto, no se puede extraer una conclusión inmediata acerca de la recta tangente.

EJEMPLO 2 Gráfica de una curva paramétrica

Grafique la curva que tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$.

Solución *Intersecciones con el eje x*: $y = 0$ implica $t(t^2 - 3) = 0$ en $t = 0$, $t = -\sqrt{3}$, y $t = \sqrt{3}$.

Intersecciones con el eje y: $x = 0$ implica que $t^2 - 4 = 0$ en $t = -2$ y $t = 2$.

Tangentes horizontales: $\dfrac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$; $\dfrac{dy}{dt} = 0$ implica que $3(t^2 - 1) = 0$ en $t = -1$ y $t = 1$. Advierta que $dx/dt \neq 0$ en $t = -1$ y $t = 1$.

Tangentes verticales: $\dfrac{dx}{dt} = 2t$; $\dfrac{dx}{dt} = 0$ implica $2t = 0$ y $t = 0$. Advierta que $dy/dt \neq 0$ en $t = 0$.

Los puntos (x, y) sobre la curva correspondientes a estos valores del parámetro se resumen en la tabla siguiente:

t	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
x	0	-1	-3	-4	-3	-1	0
y	-2	0	2	0	-2	0	2

En la tabla observamos que: las intersecciones con el eje x son $(-1, 0)$ y $(-4, 0)$, las intersecciones con el eje y son $(0, -2)$ y $(0, 2)$, los puntos de tangencia horizontal son $(-3, 2)$ y $(-3, -2)$, el punto de tangencia vertical es $(-4, 0)$. Una curva graficada a través de estos puntos, consistente con la orientación y la información de la tangente, se ilustra en la FIGURA 10.3.2. ■

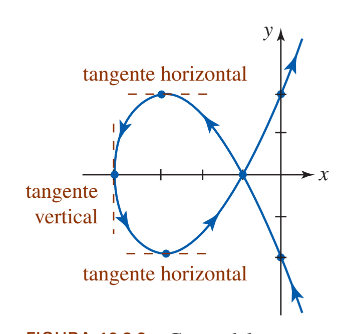
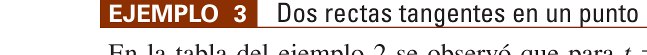


FIGURA 10.3.2 Curva del ejemplo 2

La gráfica de una función diferenciable $y = f(x)$ puede tener sólo una recta tangente en un punto sobre su gráfica. En contraste, puesto que una curva C definida paramétricamente quizá no sea la gráfica de una función, es posible que una curva de este tipo pueda tener más de una recta tangente en un punto.



EJEMPLO 3 Dos rectas tangentes en un punto

En la tabla del ejemplo 2 se observó que para $t = -\sqrt{3}$ y $t = \sqrt{3}$ obtenemos un solo punto $(-1, 0)$. Como puede ver en la figura 10.3.2, esto quiere decir que la curva se interseca a sí misma en $(-1, 0)$. En este caso, de $x = t^2 - 4$, $y = t^3 - 3t$ obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2 - 3}{2t}$$

y

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Por consiguiente, concluimos que hay dos rectas tangentes en $(-1, 0)$:

$$y = -\sqrt{3}(x + 1) \qquad \text{y} \qquad y = \sqrt{3}(x + 1).$$

Vea la FIGURA 10.3.3. ■

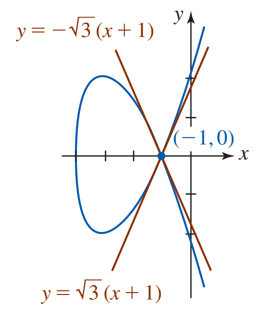


FIGURA 10.3.3 Rectas tangentes del ejemplo 3

Derivadas de orden superior Es posible encontrar derivadas de orden superior exactamente de la misma manera que dy/dx. Suponga que (1) se escribe como

$$\frac{d}{dx}(\ ) = \frac{d(\ )/dt}{dx/dt}. \tag{2}$$

Si $y' = dy/dx$ es una función diferenciable de t, se deduce de (2) al sustituir ( ) por y' que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}y' = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \tag{3}$$

De manera similar, si $y'' = d^2y/dx^2$ es una función diferenciable de t, entonces la tercera derivada es

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}y'' = \frac{dy''/dt}{dx/dt}, \tag{4}$$

y así sucesivamente.

EJEMPLO 4 Tercera derivada

Determine d^3y/dx^3 para la curva dada por $x = 4t + 6$, $y = t^2 + t - 2$.

Solución Para calcular la tercera derivada, primero debemos determinar la primera y segunda derivadas. De (2) la primera derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{2t + 1}{4} = y'.$$

Después utilizando (3) y (4) obtenemos la segunda y tercera derivadas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8} = y''$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''/dt}{dx/dt} = \frac{0}{4} = 0. \quad ■$$

La inspección del ejemplo 4 muestra que la curva tiene una tangente horizontal en $t = -\frac{1}{2}$ o $\left(4, -\frac{9}{4}\right)$. Además, puesto que $d^2y/dx^2 > 0$ para todo t, la gráfica de la curva es cóncava hacia arriba en cualquier punto. Verifique lo anterior graficando la curva.

Longitud de una curva En la sección 6.5 nos fue posible determinar la longitud L de la gráfica de una función suave $y = f(x)$ mediante una integral definida. Ahora podemos generalizar el resultado dado en (3) de esa sección a curvas definidas paramétricamente.

Construcción de una integral Suponga que $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, son las ecuaciones paramétricas de una curva suave C que no se interseca a sí misma en $a < t < b$. Si P es una partición de $[a, b]$ dada por los números

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

entonces, como se muestra en la FIGURA 10.3.4, parece ser razonable que C pueda aproximarse mediante una trayectoria poligonal a través de los puntos $Q_k(f(t_k), g(t_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Al denotar la longitud del segmento de recta a través de Q_{k-1} y Q_k mediante L_k escribimos la longitud aproximada de C como

$$\sum_{k=1}^{n} L_k, \tag{5}$$

donde $$L_k = \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}.$$

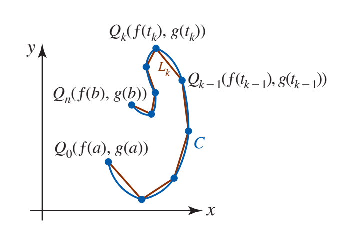


FIGURA 10.3.4 Aproximación de la longitud de C (azul) mediante la longitud de una trayectoria poligonal (rojo)

Ahora bien, puesto que f y g tienen derivadas continuas, el teorema del valor medio (vea sección 4.4) afirma que existen números u_k^* y v_k^* en el intervalo (t_{k-1}, t_k) tales que

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(u_k^*)(t_k - t_{k-1}) = f'(u_k^*)\Delta t_k \tag{6}$$

y $$g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(v_k^*)(t_k - t_{k-1}) = g'(v_k^*)\Delta t_k. \tag{7}$$

Al emplear (6) y (7) en (5) y simplificar obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[f'(u_k^*)]^2 + [g'(v_k^*)]^2}\,\Delta t_k. \tag{8}$$

Al tomar $\|P\| \to 0$ en (8), obtenemos una fórmula para la longitud de una curva suave. Advierta que el límite de la suma en (8) no es la definición usual de una integral definida, puesto que trabajamos con dos números (u_k^* y v_k^*) más que con uno en el intervalo (t_{k-1}, t_k). No obstante, *podemos* hacer una demostración rigurosa de que la fórmula dada en el teorema siguiente resulta de (8) si tomamos $\|P\| \to 0$.

Teorema 10.3.2 Longitud de arco

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, define a una curva suave C que no se interseca a sí misma en $a < t < b$, entonces la longitud L de C es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt. \tag{9}$$

Además, (9) también puede obtenerse utilizando (1). Si la curva definida por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, también puede representarse mediante una función explícita $y = F(x)$, $x_0 \le x \le x_1$, entonces mediante el cambio de variables de integración y utilizando $f(a) = x_0$, $g(b) = x_1$, (3) de la sección 6.5 se convierte en

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{f'(t)}{g'(t)}\right)^2}\,g'(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt.$$

EJEMPLO 5 Longitud de una curva

Determine la longitud de la curva dada por $x = 4t$, $y = t^2$, $0 \le t \le 2$.

Solución: Puesto que $f'(t) = 4$ y $g'(t) = 2t$, (9) produce

$$L = \int_0^2 \sqrt{16 + 4t^2}\,dt = 2\int_0^2 \sqrt{4 + t^2}\,dt.$$

Con la sustitución trigonométrica $t = 2\tan\theta$, la última integral se vuelve

$$L = 8\int_0^{\pi/4} \sec^3\theta\,d\theta.$$

La integración por partes conduce a (vea el ejemplo 5, sección 7.3)

$$L = \left[4\sec\theta\tan\theta + 4\ln|\sec\theta + \tan\theta|\right]_0^{\pi/4} = 4\sqrt{2} + 4\ln\left(\sqrt{2} + 1\right) \approx 9.1823. \quad ■$$

Ejercicios 10.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-32.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto correspondiente al valor indicado del parámetro.

1. $x = t^3 - t^2, y = t^2 + 5t; \quad t = -1$
2. $x = 4/t, y = 2t^3 - t + 1; \quad t = 2$
3. $x = \sqrt{t^2 + 1}, y = t^4; \quad t = \sqrt{3}$
4. $x = e^{2t}, y = e^{-4t}; \quad t = \ln 2$
5. $x = \cos^2\theta, y = \operatorname{sen}\theta; \quad \theta = \pi/6$
6. $x = 2\theta - 2\operatorname{sen}\theta, y = 2 - 2\cos\theta; \quad \theta = \pi/4$

En los problemas 7 y 8, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor indicado del parámetro.

7. $x = t^3 + 3t, y = 6t^2 + 1; \quad t = -1$
8. $x = 2t + 4, y = t^2 + \ln t; \quad t = 1$

En los problemas 9 y 10, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva dada en el punto indicado.

9. $x = t^2 + t, y = t^2; \quad (2, 4)$
10. $x = t^4 - 9, y = t^4 - t^2; \quad (0, 6)$
11. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva dada por $x = 4$ sen $2t$, $y = 2 \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en el punto $\left(2\sqrt{3}, 1\right)$?
12. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 + 1$. ¿En qué punto sobre C está la recta tangente dada por $y + 3x - 5 = 0$?
13. Una curva C tiene ecuaciones paramétricas $x = 2t - 5$, $y = t^2 - 4t + 3$. Encuentre una ecuación de la recta tangente a C que es paralela a la recta $y = 3x + 1$.
14. Verifique que la curva dada por, $x = -2/\pi + \cos\theta$, $y = -2\theta/\pi + \operatorname{sen}\theta, -\pi \leq \theta \leq \pi$, se interseca a sí misma. Encuentre ecuaciones de las rectas tangentes en el punto de intersección.

En los problemas 15-18, determine los puntos sobre la curva dada en los cuales la recta tangente es horizontal o vertical. Grafique la curva.

15. $x = t^3 - t, y = t^2$
16. $x = \frac{1}{8}t^3 + 1, y = t^2 - 2t$
17. $x = t - 1, y = t^3 - 3t^2$
18. $x = \operatorname{sen} t, y = \cos 3t, 0 \leq t \leq 2\pi$

En los problemas 19-22, encuentre dy/dx, d^2y/dx^2 y d^3y/dx^3.

19. $x = 3t^2, y = 6t^3$
20. $x = \cos t, y = \operatorname{sen} t$
21. $x = e^{-t}, y = e^{2t} + e^{3t}$
22. $x = \frac{1}{2}t^2 + t, y = \frac{1}{2}t^2 - t$
23. Emplee d^2y/dx^2 para determinar los intervalos del parámetro para el cual la curva del problema 16 es cóncava hacia arriba y los intervalos para los cuales resulta cóncava hacia abajo.
24. Emplee d^2y/dx^2 para determinar si la curva dada por $x = 2t + 5$, $y = 2t^3 + 6t^2 + 4t$ tiene algún punto de inflexión.

En los problemas 25-30, encuentre la longitud de la curva dada.

25. $x = \frac{5}{3}t^3 + 2, y = 4t^3 + 6; \quad 0 \leq t \leq 2$
26. $x = \frac{1}{3}t^3, y = \frac{1}{2}t^2; \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3}$
27. $x = e^t \operatorname{sen} t, y = e^t \cos t; \quad 0 \leq t \leq \pi$
28. Un arco de la cicloide:
$$x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta), y = a(1 - \cos\theta); \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$
29. Un arco de la hipocicloide de cuatro cúspides:
$$x = b\cos^3\theta, y = b\operatorname{sen}^3\theta; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2$$
30. Un arco de la epicicloide de tres cúspides:
$$x = 4a\cos\theta - a\cos 4\theta, y = 4a\operatorname{sen}\theta - a\operatorname{sen}4\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi/3$$

≡ Problemas con calculadora/SAC

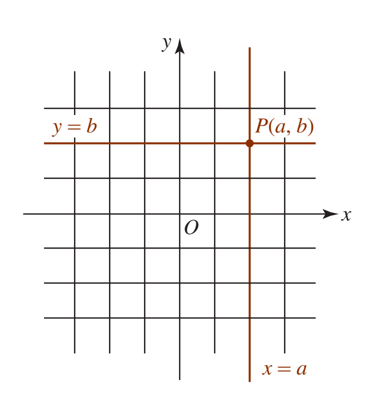
31. Considere la curva $x = t^2 - 4t - 2$, $y = t^5 - 4t^3 - 1$ en el ejemplo 1.
   a) Emplee una calculadora para determinar una aproximación de la coordenada y de la intersección con el eje y que se muestra en la figura 10.3.1.
   b) Emplee el método de Newton para aproximar las coordenadas x de las tres intersecciones con el eje x que se ilustran en la figura 10.3.1.

≡ Piense en ello

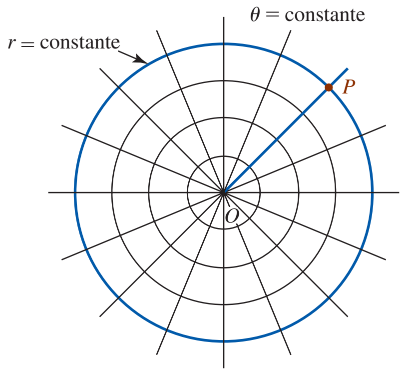
32. Sea C una curva descrita por $y = f(x)$, donde F es una función no negativa continua sobre $x_1 \leq x \leq x_2$. Demuestre que si C está dada paramétricamente por $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, f' y g continuas, entonces el **área** bajo la gráfica de C es $\int_a^b g(t) f'(t) dt$.
33. Recurra al problema 32 para demostrar que el área bajo un arco de la cicloide en la figura 10.2.6*b*) es tres veces el área del círculo.

10.4 Sistema de coordenadas polares

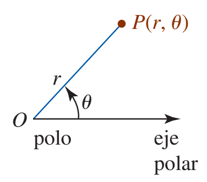
Introducción Hasta ahora hemos utilizado el **sistema de coordenadas rectangular** o **cartesiano** para especificar un punto P o describir una curva C en el plano. Podemos considerar este sistema como una retícula de líneas horizontales y verticales. Las coordenadas (a, b) de un punto P están determinadas por la intersección de dos rectas: una recta $x = a$ es perpendicular a la recta de referencia horizontal llamada el eje x, y la otra $y = b$ es perpendicular a la recta de referencia vertical llamada el eje y. Vea la FIGURA 10.4.1*a*). Otro sistema para localizar puntos en el plano es el **sistema de coordenadas polares**.



a) Sistema de coordenadas rectangular



b) Sistema de coordenadas polares



c) Coordenadas polares de P

FIGURA 10.4.1 Comparación de coordenadas rectangulares y polares de un punto P

Coordenadas polares Para establecer un **sistema de coordenadas polares** empleamos un sistema de círculos centrados en un punto $\boldsymbol{O}$, denominado **polo**, y líneas rectas o rayos que emanen de O. Tomamos como eje de referencia una media línea horizontal dirigida hacia la derecha del polo, a la cual se le nombra **eje polar**. Para especificar una distancia r dirigida (con signo) desde O y un ángulo θ cuyo lado inicial es el eje polar y cuyo lado final es el rayo OP, se identifica el punto P mediante (r, θ). Se dice que el par ordenado (r, θ) son las **coordenadas polares** de P. Vea las figuras 10.4.1*b*) y 10.4.1*c*).

Si bien la medida del ángulo θ puede ser en grados o radianes, en cálculo se usa casi exclusivamente la medida de radianes. En consecuencia, aquí se usará sólo esta última.

En el sistema de coordenadas polares se adoptan las siguientes convenciones.

Definición 10.4.1 Convenciones en coordenadas polares

i) Los ángulos $\theta > 0$ se miden en el sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del eje polar, en tanto que los ángulos $\theta < 0$ se miden en el sentido de las manecillas del reloj.
ii) Para graficar un punto $(-r, \theta)$, donde $-r < 0$, se miden $|r|$ unidades a lo largo del rayo $\theta + \pi$.
iii) Las coordenadas del polo O son $(0, \theta)$, donde θ es cualquier ángulo.

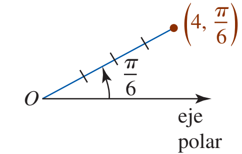
EJEMPLO 1 Graficación de puntos polares

Grafique los puntos cuyas coordenadas polares se indican.

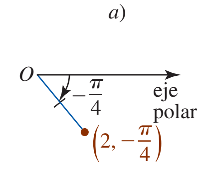
a) $(4, \pi/6)$ ***b***) $(2, -\pi/4)$ ***c***) $(-3, 3\pi/4)$

Solución

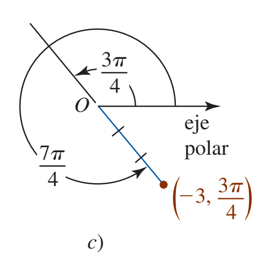
a) Mida 4 unidades a lo largo del rayo $\pi/6$ como se muestra en la FIGURA 10.4.2*a*).
b) Mida 2 unidades a lo largo del rayo $-\pi/4$. Vea la figura 10.4.2*b*).
c) Mida 3 unidades a lo largo del rayo $3\pi/4 + \pi = 7\pi/4$. De manera equivalente, pueden medirse tres unidades a lo largo del rayo $3\pi/4$ extendidas *hacia atrás* a través del polo. Advierta con cuidado en la figura 10.4.2*c*) que el punto $(-3, 3\pi/4)$ no está en el mismo cuadrante que el lado final del ángulo dado. ■



a)



b)



c)

FIGURA 10.4.2 Punto en coordenadas polares del ejemplo 1

En contraste con un sistema de coordenadas rectangulares, la descripción de un punto en coordenadas polares no es única. Lo anterior es una consecuencia inmediata del hecho de que

$$(r, \theta) \qquad \text{y} \qquad (r, \theta + 2n\pi),\ n \text{ un entero,}$$

son equivalentes. Para complicar más el problema pueden utilizarse valores negativos de r.

EJEMPLO 2 Puntos polares equivalentes

Las siguientes coordenadas son algunas representaciones alternas del punto $(2, \pi/6)$:

$$(2, 13\pi/6), \quad (2, -11\pi/6), \quad (-2, 7\pi/6), \quad (-2, -5\pi/6).$$

■

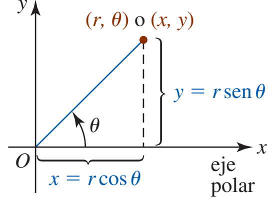


FIGURA 10.4.3 Relación entre coordenadas polares y rectangulares

Conversión de coordenadas polares en rectangulares Al sobreponer un sistema de coordenadas rectangulares sobre un sistema de coordenadas polares, como se muestra en la FIGURA 10.4.3, podemos convertir la descripción polar de un punto en coordenadas rectangulares utilizando

$$x = r\cos\theta, \quad y = r \operatorname{sen}\theta. \tag{1}$$

Estas fórmulas de conversión son válidas para cualesquiera valores de r y θ en una representación polar equivalente de (r, θ).

EJEMPLO 3 Polar a rectangular

Convierta las coordenadas polares $(2, \pi/6)$ en coordenadas rectangulares.

Solución Con $r = 2$, $\theta = \pi/6$, tenemos de (1)

$$x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$$
$$y = 2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

De tal modo, $(2, \pi/6)$ es equivalente a $\left(\sqrt{3}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares. ■

Conversión de coordenadas rectangulares en polares Debe ser evidente de la figura 10.4.3 que x, y, r y θ también están relacionadas por medio de

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Las ecuaciones en (2) se usan para convertir las coordenadas rectangulares (x, y) en coordenadas polares (r, θ).

EJEMPLO 4 Rectangular a polar

Convierta las coordenadas rectangulares $(-1, 1)$ en coordenadas polares.

Solución Con $x = -1$, $y = 1$, tenemos de (2)

$$r^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad \tan\theta = -1.$$

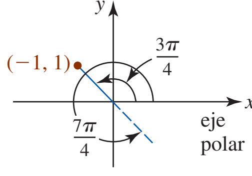


FIGURA 10.4.4 Punto en el ejemplo 4

Ahora, $r^2 - 2$ o $r = \pm\sqrt{2}$, y dos de los muchos ángulos que satisfacen $\tan\theta = -1$ son $3\pi/4$ y $7\pi/4$. En la FIGURA 10.4.4 advertimos que dos representaciones polares de $(-1, 1)$ son

$$\left(\sqrt{2}, 3\pi/4\right) \qquad \text{y} \qquad \left(-\sqrt{2}, 7\pi/4\right).$$

■

En el ejemplo 4, advierta que no es posible sólo aparear *cualquier* ángulo θ y *cualquier* valor r que satisfaga (2); estas soluciones también deben ser consistentes con (1). Como los puntos $\left(-\sqrt{2}, 3\pi/4\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 7\pi/4\right)$ yacen en el cuarto cuadrante, no son representaciones polares del punto $(-1, 1)$ del segundo cuadrante.

Hay casos en el cálculo en que una ecuación rectangular debe expresarse como una ecuación polar $r = f(\theta)$. El siguiente ejemplo ilustra cómo hacerlo utilizando las fórmulas de conversión en (1).

EJEMPLO 5 Ecuación rectangular en ecuación polar

Encuentre la ecuación polar que tiene la misma gráfica que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$.

Solución Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ en la ecuación dada encontramos que

$$r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta = 8r\cos\theta$$
$$r^2(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) = 8r\cos\theta \quad \leftarrow \cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$$
$$r(r - 8\cos\theta) = 0.$$

La última ecuación implica que $r = 0$ o $r = 8\cos\theta$. Puesto que $r = 0$ determina sólo el polo O, concluimos que la ecuación polar del círculo es $r = 8\cos\theta$. Advierta que el círculo $x^2 + y^2 = 8x$ pasa por el origen puesto que $x = 0$ y $y = 0$ satisfacen la ecuación. En cuanto a la ecuación polar $r = 8\cos\theta$ del círculo, el origen o polo corresponde a las coordenadas polares $(0, \pi/2)$. ■

EJEMPLO 6 Ecuación rectangular en ecuación polar

Encuentre la ecuación polar que tiene la misma gráfica que la parábola $x^2 = 8(2 - y)$.

Solución Se sustituyen x y y en la ecuación indicada por $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ y se resuelve para r en términos de θ:

$$r^2\cos^2\theta = 8(2 - r\,\text{sen}\,\theta)$$
$$r^2(1 - \text{sen}^2\theta) = 16 - 8r\,\text{sen}\,\theta$$
$$r^2 = r^2\text{sen}^2\theta - 8r\,\text{sen}\,\theta + 16 \quad \leftarrow \text{el lado derecho es un cuadrado perfecto}$$
$$r^2 = (r\,\text{sen}\,\theta - 4)^2$$
$$r = \pm(r\,\text{sen}\,\theta - 4).$$

Al resolver para r se producen dos ecuaciones,

$$r = \frac{4}{1 + \text{sen}\,\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{-4}{1 - \text{sen}\,\theta}.$$

Se recuerda al lector que, por la convención *ii*) de la definición 10.4.1, (r, θ) y $(-r, \theta + \pi)$ representan este mismo punto. El lector debe verificar que si (r, θ) se sustituye por $(-r, \theta + \pi)$ en la segunda de estas dos ecuaciones obtendrá la primera ecuación. En otras palabras, las ecuaciones son equivalentes y por ello simplemente es posible considerar la ecuación polar de la parábola como $r = 4/(1 + \text{sen}\,\theta)$. ■

En el último ejemplo expresamos una ecuación polar $r = f(\theta)$ como una ecuación rectangular utilizando (1) y (2).

EJEMPLO 7 Ecuación polar en ecuación rectangular

Encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar $r^2 = 9\cos 2\theta$.

Solución Primero, empleamos la identidad trigonométrica para el coseno de un ángulo doble:

$$r^2 = 9(\cos^2\theta - \text{sen}^2\theta). \quad \leftarrow \cos 2\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta \qquad (3)$$

Ahora de (1) escribimos $\cos\theta = x/r$ y $\text{sen}\,\theta = y/r$, y de (2) tenemos $r^2 = x^2 + y^2$. Por tanto,

$$\cos^2\theta = \frac{x^2}{r^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \text{sen}^2\theta = \frac{y^2}{r^2} = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Al sustituir r^2, $\cos^2\theta$ y $\text{sen}^2\theta$ en (3) se produce

$$x^2 + y^2 = 9\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\right) \quad \text{o} \quad (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2).$$ ■

La siguiente sección se dedicará a graficar ecuaciones polares.

Ejercicios 10.4 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-32.

Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique el punto con las coordenadas polares indicadas.

1. $(3, \pi)$ **2.** $(2, -\pi/2)$ **3.** $\left(-\frac{1}{2}, \pi/2\right)$

4. $(-1, \pi/6)$ **5.** $(-4, -\pi/6)$ **6.** $\left(\frac{2}{3}, 7\pi/4\right)$

En los problemas 7 a 12, encuentre coordenadas polares alternas que satisfagan

a) $r > 0, \theta < 0$ *b)* $r > 0, \theta > 2\pi$
c) $r < 0, \theta > 0$ *d)* $r < 0, \theta < 0$

para cada punto con las coordenadas polares indicadas.

7. $(2, 3\pi/4)$ **8.** $(5, \pi/2)$ **9.** $(4, \pi/3)$
10. $(3, \pi/4)$ **11.** $(1, \pi/6)$ **12.** $(3, 7\pi/6)$

En los problemas 13-18, determine las coordenadas rectangulares de cada punto con las coordenadas polares indicadas.

13. $\left(\frac{1}{2}, 2\pi/3\right)$ **14.** $(-1, 7\pi/4)$ **15.** $(-6, -\pi/3)$

16. $\left(\sqrt{2}, 11\pi/6\right)$ **17.** $(4, 5\pi/4)$ **18.** $(-5, \pi/2)$

En los problemas 19-24, determine las coordenadas polares que satisfagan

a) $r > 0, -\pi < \theta \le \pi$ *b)* $r < 0, -\pi < \theta \le \pi$

para cada punto con las coordenadas rectangulares indicadas.

19. $(-2, -2)$ **20.** $(0, -4)$ **21.** $(1, -\sqrt{3})$
22. $(\sqrt{6}, \sqrt{2})$ **23.** $(7, 0)$ **24.** $(1, 2)$

En los problemas 25-30, dibuje la región sobre el plano que consiste en los puntos (r, θ) cuyas coordenadas polares satisfacen las condiciones indicadas.

25. $2 \le r < 4, 0 \le \theta \le \pi$
26. $2 < r \le 4$
27. $0 \le r \le 2, -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$
28. $r \ge 0, \pi/4 < \theta < 3\pi/4$
29. $-1 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi/2$
30. $-2 \le r < 4, \pi/3 \le \theta \le \pi$

En los problemas 31-40, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

31. $y = 5$ **32.** $x + 1 = 0$
33. $y = 7x$ **34.** $3x + 8y + 6 = 0$
35. $y^2 = -4x + 4$ **36.** $x^2 - 12y - 36 = 0$
37. $x^2 + y^2 = 36$ **38.** $x^2 - y^2 = 1$
39. $x^2 + y^2 + x = \sqrt{x^2 + y^2}$ **40.** $x^3 + y^3 - xy = 0$

En los problemas 41-52, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

41. $r = 2\sec\theta$ **42.** $r\cos\theta = -4$
43. $r = 6\,\text{sen}\,2\theta$ **44.** $2r = \tan\theta$
45. $r^2 = 4\,\text{sen}\,2\theta$ **46.** $r^2\cos 2\theta = 16$
47. $r + 5\,\text{sen}\,\theta = 0$ **48.** $r = 2 + \cos\theta$
49. $r = \dfrac{2}{1 + 3\cos\theta}$ **50.** $r(4 - \text{sen}\,\theta) = 10$
51. $r = \dfrac{5}{3\cos\theta + 8\,\text{sen}\,\theta}$ **52.** $r = 3 + 3\sec\theta$

Piense en ello

53. ¿Cómo expresaría la distancia d entre dos puntos (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en términos de sus coordenadas polares?

54. Usted sabe cómo encontrar la ecuación rectangular de una recta que pasa por dos puntos con coordenadas rectangulares. ¿Cómo encontraría una ecuación polar de una recta que pasa por dos puntos con coordenadas polares (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2)? Aplique sus ideas encontrando una ecuación polar de la recta que pasa por $(3, 3\pi/4)$ y $(1, \pi/4)$. Determine las coordenadas polares de las intersecciones de la recta con los ejes x y y.

55. En coordenadas rectangulares las intersecciones con el eje x de la gráfica de una función $y = f(x)$ se determinan a partir de las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. En la siguiente sección se graficarán las ecuaciones polares $r = f(\theta)$. ¿Cuál es la importancia de las soluciones de la ecuación $f(\theta) = 0$?

10.5 Gráficas de ecuaciones polares

Introducción La gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ es el conjunto de puntos P con *al menos* un conjunto de coordenadas polares que satisfacen la ecuación. Puesto que lo más probable es que su salón de clases no tenga una rejilla de coordenadas polares, para facilitar la graficación y discusión de gráficas de una ecuación polar $r = f(\theta)$, se sobrepondrá, como en la sección anterior, un sistema de coordenadas rectangulares sobre el sistema de coordenadas polares.

Se iniciará con algunas gráficas polares simples.

EJEMPLO 1 Un círculo centrado en el origen

Grafique $r = 3$.

Solución Puesto que θ no se especifica, el punto $(3, \theta)$ yace sobre la gráfica de $r = 3$ para cualquier valor de θ y se encuentra a 3 unidades del origen. Observamos en la FIGURA 10.5.1 que la gráfica es el círculo de radio 3 centrado en el origen.

Además, sabemos de (2) de la sección 10.4 que $r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, por lo que $r = 3$ produce la familiar ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 3^2$ de un círculo de radio 3 centrado en el origen. ■

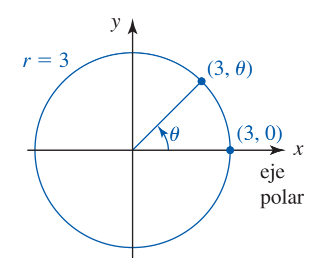


FIGURA 10.5.1 Círculo del ejemplo 1

Círculos centrados en el origen En general, si a es cualquier constante distinta de cero, la gráfica polar de

$$r = a \tag{1}$$

es un círculo de radio $|a|$ con radio en el origen.



EJEMPLO 2 Una recta que pasa por el origen

Grafique $\theta = \pi/4$.

Solución Puesto que r no se especifica, el punto $(r, \pi/4)$ yace sobre la gráfica para cualquier valor de r. Si $r > 0$, entonces este punto se encuentra sobre la media recta en el primer cuadrante; si $r < 0$, entonces el punto está sobre la media recta en el tercer cuadrante. Para $r = 0$, el punto $(0, \pi/4)$ es el polo u origen. Por tanto, la gráfica polar de $\theta = \pi/4$ es la recta completa que pasa por el origen y forma un ángulo de $\pi/4$ con el eje polar o eje x positivo. Vea la FIGURA 10.5.2. ■

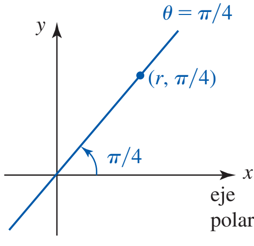


FIGURA 10.5.2 Recta en el ejemplo 2

Rectas que pasan por el origen En general, si α es cualquier constante real distinta de cero, la gráfica polar de

$$\theta = \alpha \tag{2}$$

es una recta que pasa por el origen y forma un ángulo de α radianes con el eje polar.

EJEMPLO 3 Una espiral

Grafique $r = \theta$.

Solución Cuando $\theta \geq 0$, r aumenta y los puntos (r, θ) se enrollan alrededor del polo de una manera opuesta al giro de las manecillas del reloj. Esto se ilustra mediante la porción azul de la gráfica en la FIGURA 10.5.3. La porción roja de la grafica se obtuvo al graficar puntos para $\theta < 0$.

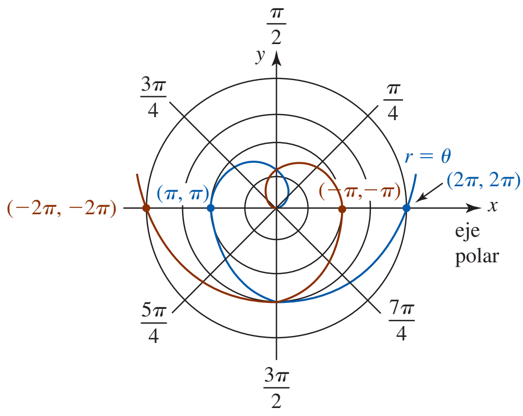


FIGURA 10.5.3 Gráfica de la ecuación del ejemplo 3 ■

Espirales Muchas gráficas en coordenadas polares reciben nombres especiales. La gráfica en el ejemplo 3 es un caso especial de

$$r = a\theta, \tag{3}$$

donde a es una constante. Una gráfica de esta ecuación se denomina **espiral de Arquímedes**. Una ecuación polar de la forma

$$r = ae^{b\theta} \tag{4}$$

recibe el nombre de **espiral logarítmica**. La curva que describe el caparazón de múltiples cámaras de un nautilo es un ejemplo de una espiral logarítmica. Vea los problemas 31 y 32 en los ejercicios 10.5.

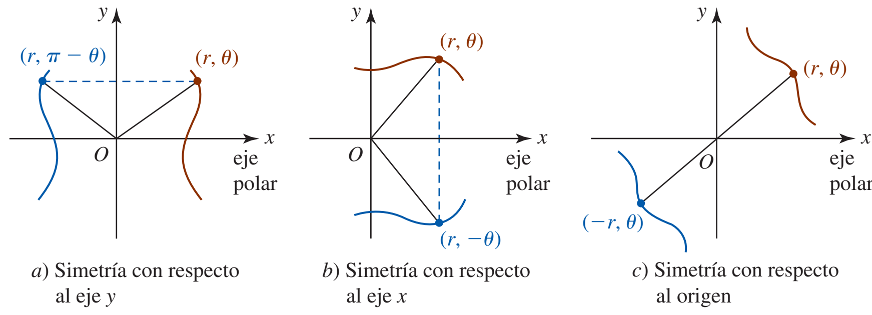

Mitad del caparazón de un nautilo de cámaras múltiples



Simetrías de un copo de nieve

Además del trazado de puntos básico, muchas veces puede recurrirse a la simetría para graficar una ecuación polar.

Simetría Como se ilustra en la FIGURA 10.5.4, una gráfica polar puede tener tres tipos de simetría. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje *y*** si siempre que (r, θ) es un punto sobre la gráfica, $(r, \pi - \theta)$ es también un punto sobre la gráfica. Una gráfica polar es **simétrica con respecto al eje *x*** si siempre que (r, θ) es un punto de la gráfica, $(r, -\theta)$ también es un punto sobre la gráfica. Por último, una gráfica polar es **simétrica con respecto al origen** si siempre que (r, θ) está sobre la gráfica, $(-r, \theta)$ también es un punto sobre la gráfica.



a) Simetría con respecto al eje *y*

b) Simetría con respecto al eje *x*

c) Simetría con respecto al origen

FIGURA 10.5.4 Simetrías de una gráfica polar

Se tienen las siguientes pruebas de simetría de una gráfica polar.

Pruebas de simetría de la gráfica de una ecuación polar

La gráfica de una ecuación polar es simétrica respecto:

- al **eje *y*** si al sustituir (r, θ) por $(r, \pi - \theta)$ resulta la misma ecuación; (5)
- al **eje *x*** si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ resulta la misma ecuación; (6)
- al **origen** si al sustituir (r, θ) por $(-r, \theta)$ resulta la misma ecuación. (7)

En coordenadas rectangulares la descripción de un punto es única. Por consiguiente, en coordenadas rectangulares si falla un tipo particular de simetría, entonces es posible decir de manera definitiva que la gráfica no posee esa simetría.

Como la descripción polar de un punto no es única, la gráfica de una ecuación polar aún debe tener un tipo particular de simetría, incluso cuando es posible que falle la prueba para la misma. Por ejemplo, si al sustituir (r, θ) por $(r, -\theta)$ no se produce la ecuación polar original, la gráfica de esa ecuación debe seguir teniendo simetría con respecto al eje *x*. Por tanto, si una de las pruebas de reemplazo en (5)-(7) no produce la misma ecuación polar, lo mejor que podemos afirmar es "no hay conclusión".

EJEMPLO 4 Graficación de una ecuación polar

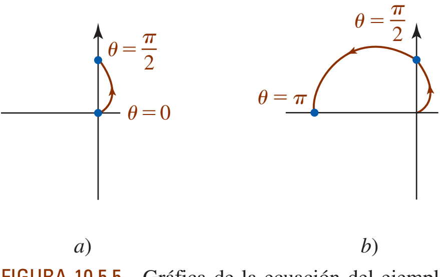
Grafique $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Una manera de graficar esta ecuación es incorporar unos cuantos puntos bien escogidos correspondientes a $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Como lo indica la siguiente tabla,

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
r	0	0.29	1	1.71	2	1.71	1	0.29	0

cuando θ avanza de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$, r aumenta desde $r = 0$ (el origen) hasta $r = 1$. Vea la FIGURA 10.5.5*a*). Cuando θ avanza de $\theta = \pi/2$ a $\theta = \pi$, r continúa aumentando desde $r = 1$ hasta su

valor máximo de $r = 2$. Vea la figura 10.5.5*b*). Luego, para $\theta = \pi$ a $\theta = 3\pi/2$, r empieza a disminuir de $r = 2$ hasta $r = 1$. Para $\theta = 3\pi/2$ a $\theta = 2\pi$, r continúa disminuyendo y se termina de nuevo en el origen $r = 0$. Vea la figura 10.5.5*c*) y *d*).



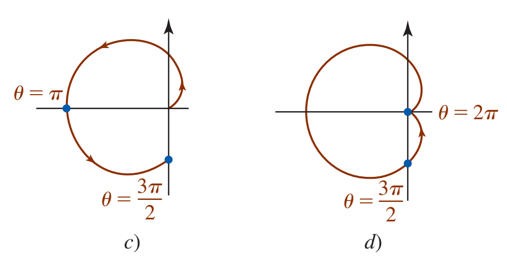


FIGURA 10.5.5 Gráfica de la ecuación del ejemplo 4

Aprovechando la simetría podríamos haber graficado simplemente puntos para $0 \leq \theta \leq \pi$. A partir de la identidad trigonométrica para la función coseno $\cos(-\theta) = \cos\theta$ concluimos de (6) que la gráfica de $r = 1 - \cos\theta$ es simétrica con respecto al eje x. Podemos obtener la gráfica completa de $r = 1 - \cos\theta$ reflejando en el eje x la parte de la gráfica dada en la figura 10.5.5*b*). ■

Cardioides La ecuación polar en el ejemplo 4 es un miembro de la familia de ecuaciones que en su totalidad tienen una gráfica "en forma de corazón" que pasa por el origen. Una gráfica de cualquier ecuación polar en la forma

$$r = a \pm a\operatorname{sen}\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm a\cos\theta \tag{8}$$

recibe el nombre de **cardioide**. La única diferencia en la gráfica de estas cuatro ecuaciones es su simetría con respecto al eje y ($r = a \pm a \operatorname{sen}\theta$) o con respecto al eje x ($r = a \pm a\cos\theta$). En la FIGURA 10.5.6 supusimos que $a > 0$.

Si conocemos la forma y orientación básica de una cardioide, obtenemos una gráfica rápida y precisa al graficar los cuatro puntos correspondientes a $\theta = 0$, $\theta = \pi/2$, $\theta = \pi$ y $\theta = 3\pi/2$. Las gráficas de $r = a \pm a \operatorname{sen}\theta$ son simétricas con respecto al eje y y las gráficas de $r = a \pm a\cos\theta$ son simétricas con respecto al eje x.

Limacones Las cardioides son casos especiales de curvas polares conocidas como **limacones**:

$$r = a \pm b\operatorname{sen}\theta \qquad \text{o} \qquad r = a \pm b\cos\theta. \tag{9}$$

La forma de una limacón depende de las magnitudes de a y b. Supondremos que $a > 0$ y $b > 0$. Para $0 < a/b < 1$, obtenemos una **limacón con un lazo interior** como se ilustra en la FIGURA 10.5.7*a*). Cuando $a = b$ o equivalentemente $a/b = 1$ obtenemos una **cardioide**. Para $1 < a/b < 2$, encontramos una **limacón con un orificio** como se muestra en la figura 10.5.7*b*). Para $a/b \geq 2$, la curva se llama **limacón convexa**. Vea la figura 10.5.7*c*).

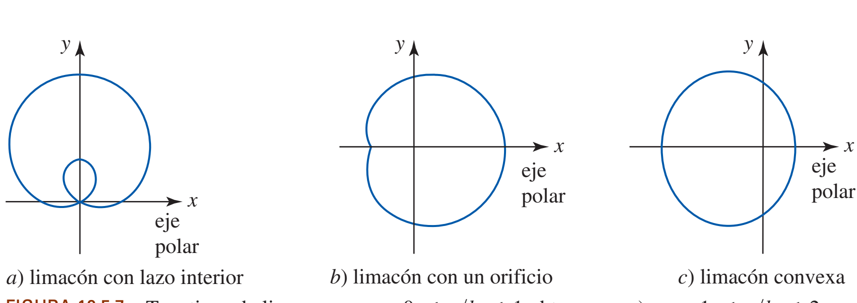
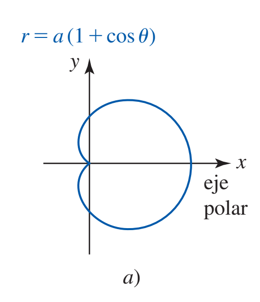
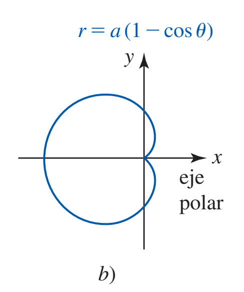
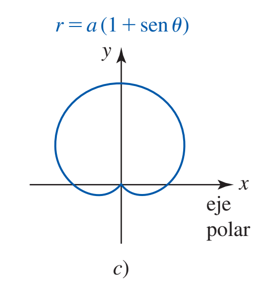


FIGURA 10.5.7 Tres tipos de limacones: para $0 < a/b < 1$ obtenemos *a*); para $1 < a/b < 2$ obtenemos *b*); para $a/b \geq 2$ obtenemos *c*)







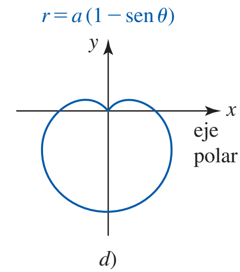


FIGURA 10.5.6 Cardioides

EJEMPLO 5 Una limacón

La gráfica de $r = 3 - \operatorname{sen}\theta$ es una limacón convexa, puesto que $a = 3$, $b = 1$ y $a/b = 3 > 2$. La gráfica de esta ecuación es similar a la de la figura 10.5.7*c*) excepto en que la gráfica es simétrica con respecto al eje *y*. ■

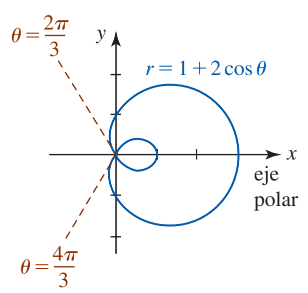


FIGURA 10.5.8 Gráfica de la ecuación del ejemplo 6

EJEMPLO 6 Una limacón

La gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ es una limacón con un lazo interior, ya que $a = 1$, $b = 2$ y $a/b = \frac{1}{2} < 1$. Para $\theta \geq 0$, note en la FIGURA 10.5.8 que la limacón empieza en $\theta = 0$ o (3, 0). La gráfica pasa por el eje *y* en $(1, \pi/2)$ y luego entra al origen ($r = 0$) en el primer ángulo para el cual $r = 0$ o $1 + 2\cos\theta = 0$ o $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Esto implica que $\theta = 2\pi/3$. En $\theta = \pi$, la curva pasa por $(-1, \pi)$. El resto de la gráfica puede completarse entonces utilizando el hecho de que es simétrica con respecto al eje *x*. ■

Tangentes a la gráfica en el origen En el ejemplo 6, las rectas $\theta = 2\pi/3$ y $\theta = 4\pi/3$ que se muestran en rojo en la figura 10.5.8, donde la gráfica de $r = 1 + 2\cos\theta$ entra y sale, respectivamente, del origen, son en realidad tangentes a la gráfica en el origen. En general, si $r = 0$ para $\theta = \theta_0$ y $dr/d\theta \neq 0$ cuando $\theta = \theta_0$, entonces la gráfica de $r = f(\theta)$ es tangente a la recta $\theta = \theta_0$ en el origen. Se demostrará lo anterior en la siguiente sección.

EJEMPLO 7 La curva de la rosa

Grafique $r = 2\cos 2\theta$.

Solución Como

$$\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta \qquad \text{y} \qquad \cos(-2\theta) = \cos 2\theta$$

concluimos por (5) y (6) de las pruebas de simetría que la gráfica es simétrica con respecto tanto al eje *x* como al eje *y*. Un momento de reflexión convencerá al lector de que sólo se necesita considerar $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Al emplear los datos de la siguiente tabla, vemos que la porción punteada de la gráfica indicada en la FIGURA 10.5.9 es la que se completó por simetría. La gráfica recibe el nombre de **curva de la rosa de cuatro pétalos**.

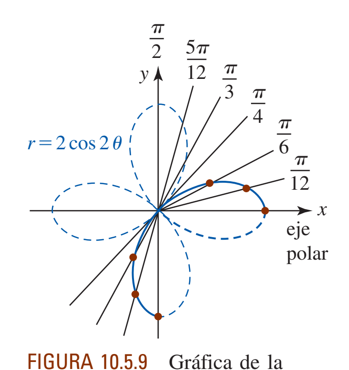


FIGURA 10.5.9 Gráfica de la ecuación del ejemplo 7

θ	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
r	2	$\sqrt{3}$	1	0	-1	$-\sqrt{3}$	-2

Advierta de la tabla que $r = 0$ y $dr/d\theta = -4 \operatorname{sen} 2\theta \neq 0$ para $\theta = \pi/4$. Por consiguiente, la gráfica es tangente a la recta $\theta = \pi/4$ en el origen. ■

Curvas de las rosas En general, si *n* es un entero positivo, entonces las gráficas de

$$r = a \operatorname{sen} n\theta \qquad \text{o} \qquad r = a\cos n\theta, \qquad n \geq 2 \tag{10}$$

se denominan **curvas de las rosas**, aunque, como puede verse en la FIGURA 10.5.10, la curva se asemeja más a una margarita. Se advierte que el número de **pétalos** o **lazos** de la curva es:

- *n* cuando *n* es impar, y
- 2*n* cuando *n* es par.

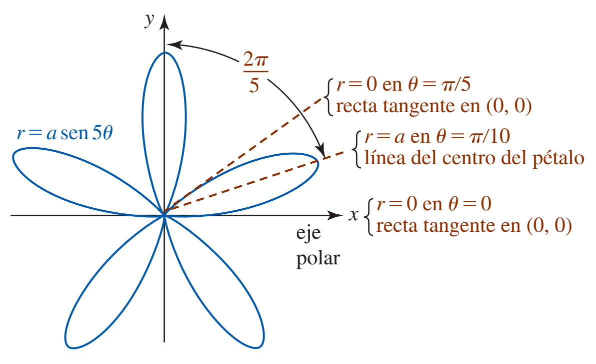


FIGURA 10.5.10 Curva de la rosa con cinco pétalos

Para graficar una curva de la rosa es posible iniciar graficando un pétalo. En un principio, encontramos un ángulo θ para el cual r es un máximo. Esto proporciona la *recta del centro* del pétalo. Después determinamos los valores correspondientes de θ para los cuales la curva de la rosa entra al origen ($r = 0$). Para completar la gráfica aprovechamos el hecho de que las rectas del centro de los pétalos están espaciadas $2\pi/n$ radianes ($360/n$ grados) si n es impar, y $2\pi/2n = \pi/n$ radianes ($180/n$ grados) si n es par. En la figura 10.5.10 dibujamos la gráfica de $r = a$ sen 5θ, $a > 0$. La recta del centro del pétalo en el primer cuadrante se determina a partir de la solución de

$$a = a\,\text{sen}\,5\theta \qquad \text{o} \qquad 1 = \text{sen}\,5\theta.$$

La última ecuación implica que $5\theta = \pi/2$ o $\theta = \pi/10$. El espaciamiento entre las rectas del centro y los cinco pétalos es $2\pi/5$ radianes (72°). Además, $r = 0$, o sen $5\theta = 0$, para $5\theta = 0$ y $5\theta = \pi$. Puesto que $dr/d\theta = 5a\cos 5\theta \neq 0$ para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/5$, la gráfica del pétalo en el primer cuadrante es tangente a aquellas rectas en el origen.

En el ejemplo 5 de la sección 10.4 observamos que la ecuación polar $r = 8\cos\theta$ es equivalente a la ecuación rectangular $x^2 + y^2 = 8x$. Completando el cuadrado en x en la ecuación rectangular, reconocemos que

$$(x - 4)^2 + y^2 = 16$$

como un círculo de radio 4 centrado en (4, 0) sobre el eje x. Ecuaciones polares tales como $r = 8\cos\theta$ o $r = 8$ sen θ son círculos y constituyen también casos especiales de curvas de las rosas. Vea la FIGURA 10.5.11.

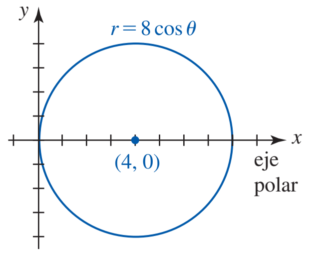
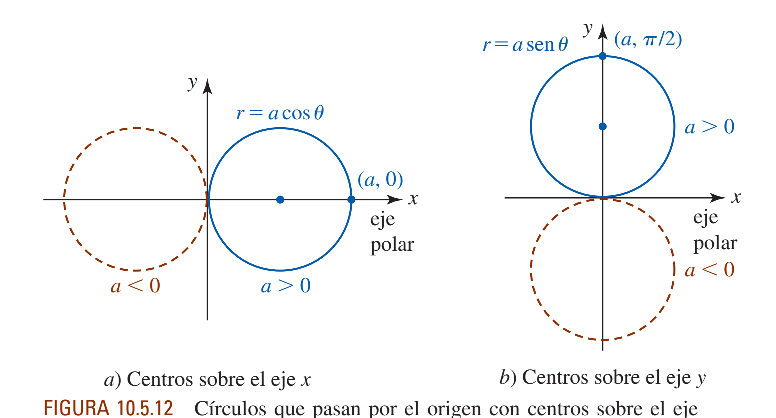


FIGURA 10.5.11 Gráfica de la ecuación $r = 8\cos\theta$

Círculos con centros sobre un eje Cuando $n = 1$ en (10) obtenemos

$$r = a\,\text{sen}\,\theta \qquad \text{o} \qquad r = a\cos\theta, \tag{11}$$

las cuales son ecuaciones polares de círculos que pasan por el origen con diámetro $|a|$ y con centros $(a/2, 0)$ sobre el eje x ($r = a\cos\theta$), o con centro $(0, a/2)$, sobre el eje y ($r = a$ sen θ). La FIGURA 10.5.12 ilustra las gráficas de las ecuaciones en (11) en los casos en los que $a > 0$ y $a < 0$.



a) Centros sobre el eje x *b*) Centros sobre el eje y

FIGURA 10.5.12 Círculos que pasan por el origen con centros sobre el eje



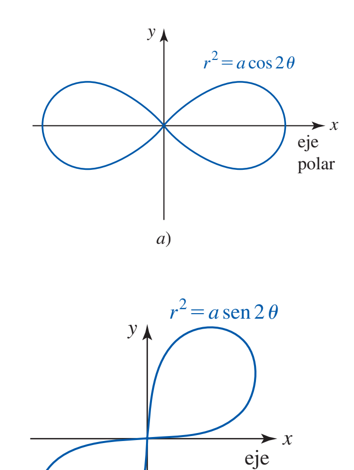


FIGURA 10.5.13 Lemniscatas

Lemniscatas Si n es un entero positivo, las gráficas de

$$r^2 = a\cos 2\theta \qquad \text{o} \qquad r^2 = a\,\text{sen}\,2\theta, \tag{12}$$

donde $a > 0$, se llaman **lemniscatas**. Por (7) de las pruebas de simetría puede advertir que las gráficas de ambas ecuaciones en (12) son simétricas respecto al origen. Además, por (6) de las pruebas de simetría, la gráfica $r^2 = a\cos 2\theta$ es simétrica respecto al eje x. La FIGURA 10.5.13 muestra gráficas típicas de las ecuaciones $r^2 = a\cos 2\theta$ y $r^2 = a$ sen θ, respectivamente.

Puntos de intersección En coordenadas rectangulares es posible encontrar los puntos (x, y) donde las gráficas de dos funciones $y = f(x)$ y $y = g(x)$ se intersecan al igualar los valores y. Las soluciones reales de la ecuación $f(x) = g(x)$ corresponden a *todas* las coordenadas x de los puntos donde las gráficas se intersecan. En contraste, pueden surgir problemas en coordenadas polares cuando se intenta el mismo método para determinar dónde se intersecan las gráficas de dos ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$.

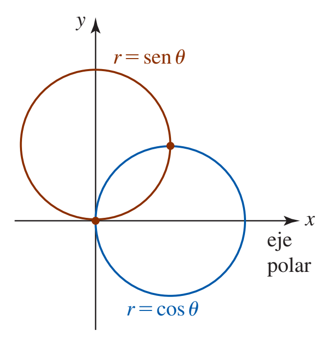


FIGURA 10.5.14 Círculos que se intersecan del ejemplo 8

EJEMPLO 8 Círculos que se intersecan

En la FIGURA 10.5.14 vemos que los círculos $r = \operatorname{sen}\theta$ y $r = \cos\theta$ tienen dos puntos de intersección. Al igualar los valores r, la ecuación sen $\theta = \cos\theta$ lleva a $\theta = \pi/4$. Al sustituir este valor en cualquier ecuación obtenemos $r = \sqrt{2}/2$. De tal modo, se ha encontrado sólo un punto polar individual $\left(\sqrt{2}/2, \pi/4\right)$ donde se intersecan las gráficas. En la figura es manifiesto que las gráficas también se intersecan en el origen. Pero el problema aquí es que el origen o polo es $(0, \pi/2)$ sobre la gráfica de $r = \cos\theta$, aunque es $(0, 0)$ sobre la gráfica de $r = \operatorname{sen}\theta$. Esta situación es análoga a las curvas que alcanzan el mismo punto en diferentes tiempos. ■

Rotación de gráficas polares En la sección 1.2 vimos que si $y = f(x)$ es la ecuación rectangular de una función, entonces las gráficas de $y = f(x - c)$ y $y = f(x + c)$, $c > 0$, se obtienen *desplazando* la gráfica f horizontalmente c unidades a la derecha y luego a la izquierda, respectivamente. En contraste, si $r = f(\theta)$ es una ecuación polar, entonces las gráficas de $f(\theta - \gamma)$ y $f(\theta + \gamma)$, donde $\gamma > 0$, pueden obtenerse *rotando* la gráfica de f en una cantidad γ. Específicamente:

- La gráfica de $r = f(\theta - \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en *sentido contrario al de las manecillas del reloj* alrededor del origen en una cantidad γ.
- La gráfica de $r = f(\theta + \gamma)$ es la gráfica de $r = f(\theta)$ rotada en *dirección de las manecillas del reloj* alrededor del origen en una cantidad γ.

Por ejemplo, la gráfica de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$ se muestra en la figura 10.5.6*a*). La gráfica de $r = a(1 + \cos(\theta - \pi/2))$ es la gráfica de $r = a(1 + \cos\theta)$ rotada en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $\pi/2$. Su gráfica debe ser entonces la que se indica en la figura 10.5.6*c*). Esto tiene sentido, porque la fórmula de la suma de los cosenos produce

Vea las identidades en (18) de la sección 1.4.

$$r = a[1 + \cos(\theta - \pi/2)] = a[1 + \cos\theta\cos(\pi/2) + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}(\pi/2)] = a(1 + \operatorname{sen}\theta).$$

De manera similar, al rotar $r = a(1 + \cos\theta)$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad π se produce

$$r = a[1 + \cos(\theta - \pi)] = a[1 + \cos\theta\cos\pi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\pi] = a(1 - \cos\theta).$$

Ahora observe de nuevo la figura 10.5.13. De

$$r^2 = a\cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = a\cos\left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right) = a\operatorname{sen}2\theta$$

se ve que la gráfica de la lemniscata en la figura 10.5.13*b*) es la gráfica de la figura 10.5.13*a*) rotada en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad igual a $\pi/4$.

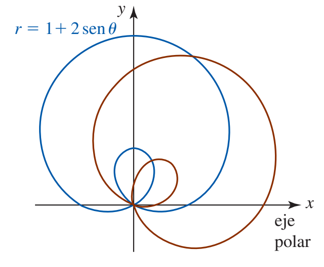


FIGURA 10.5.15 Gráficas de las ecuaciones polares del ejemplo 9

EJEMPLO 9 Gráfica polar rotada

Grafique $r = 1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$.

Solución La gráfica de la ecuación dada es la gráfica de la limacón $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ rotado en sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad igual a $\pi/4$. En la FIGURA 10.5.15 la gráfica azul es la de $r = 1 + 2\operatorname{sen}\theta$ y la gráfica roja es la gráfica rotada. ■

$\frac{d}{d\theta}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

i) La curva de la rosa de cuatro pétalos del ejemplo 7 se obtiene graficando r para valores de θ que satisfacen $0 \le \theta < 2\pi$. Vea la FIGURA 10.5.16. No suponga que esto es cierto para toda curva de la rosa. De hecho, la curva de la rosa de cinco pétalos analizada en la figura 10.5.10 se obtiene mediante valores de θ que satisfacen $0 \le \theta < \pi$. En general, una curva de la rosa $r = a\operatorname{sen}n\theta$ o $r = a\cos n\theta$ se traza exactamente una vez para $0 \le \theta \le 2\pi$ si n es par y una vez para $0 \le \theta < \pi$ si n es impar. Observaciones como la anterior serán importantes en la siguiente sección.

ii) El ejemplo 8 ilustra una de varias dificultades frustrantes al trabajar con coordenadas polares:

Un punto puede estar sobre la gráfica de una ecuación polar aun cuando sus coordenadas no satisfagan la ecuación.

Esto es algo que no puede ocurrir en coordenadas rectangulares. Por ejemplo, el lector debe verificar que $(2, \pi/2)$ es una descripción polar alterna del punto $(-2, 3\pi/2)$. Además, verifique que $(-2, 3\pi/2)$ es un punto sobre la gráfica de $r = 1 + 3 \operatorname{sen}\theta$ mostrando que las coordenadas satisfacen la ecuación. Sin embargo, advierta que las coordenadas alternas $(2, \pi/2)$ no satisfacen la ecuación.

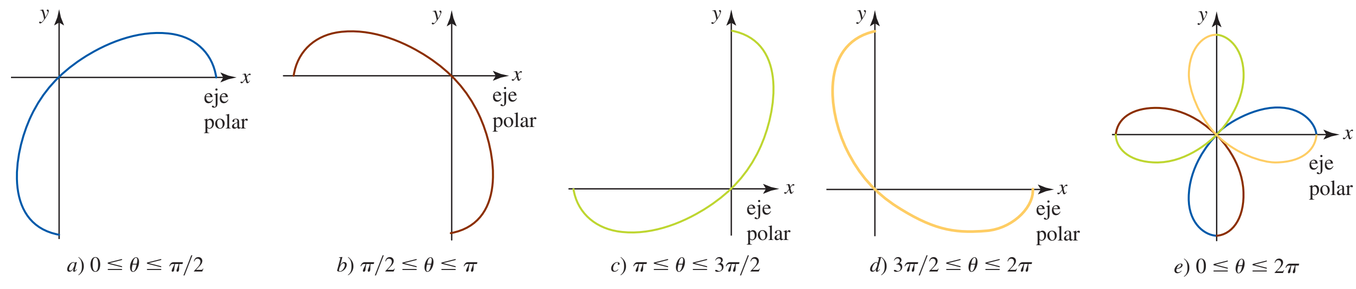


FIGURA 10.5.16 Graficación de $r = 2 \cos 2\theta$

Ejercicios 10.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-33.

Fundamentos

En los problemas 1-30, identifique por nombre la gráfica de la ecuación polar dada. Después trace la gráfica de la ecuación.

1. $r = 6$
2. $r = -1$
3. $\theta = \pi/3$
4. $\theta = 5\pi/6$
5. $r = 2\theta, \theta \le 0$
6. $r = 3\theta, \theta \ge 0$
7. $r = 1 + \cos\theta$
8. $r = 5 - 5\operatorname{sen}\theta$
9. $r = 2(1 + \operatorname{sen}\theta)$
10. $2r = 1 - \cos\theta$
11. $r = 1 - 2\cos\theta$
12. $r = 2 + 4\operatorname{sen}\theta$
13. $r = 4 - 3\operatorname{sen}\theta$
14. $r = 3 + 2\cos\theta$
15. $r = 4 + \cos\theta$
16. $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$
17. $r = \operatorname{sen}2\theta$
18. $r = 3\operatorname{sen}4\theta$
19. $r = 3\cos 3\theta$
20. $r = 2\operatorname{sen}3\theta$
21. $r = \cos 5\theta$
22. $r = 2\operatorname{sen}9\theta$
23. $r = 6\cos\theta$
24. $r = -2\cos\theta$
25. $r = -3\operatorname{sen}\theta$
26. $r = 5\operatorname{sen}\theta$
27. $r^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$
28. $r^2 = 4\cos 2\theta$
29. $r^2 = -25\cos 2\theta$
30. $r^2 = -9\operatorname{sen}2\theta$

En los problemas 31 y 32, la gráfica de la ecuación dada es una espiral. Dibuje su gráfica.

31. $r = 2^\theta, \theta \ge 0$ (logarítmica)
32. $r\theta = \pi, \theta > 0$ (hiperbólica)

En los problemas 33-38, encuentre una ecuación de la gráfica polar dada.

33.

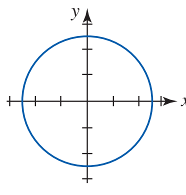


FIGURA 10.5.17 Gráfica del problema 33

34.

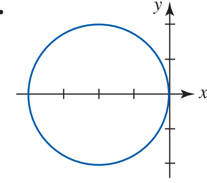


FIGURA 10.5.18 Gráfica del problema 34

35.

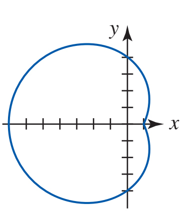


FIGURA 10.5.19 Gráfica del problema 35

36.

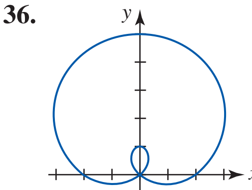


FIGURA 10.5.20 Gráfica del problema 36

37.

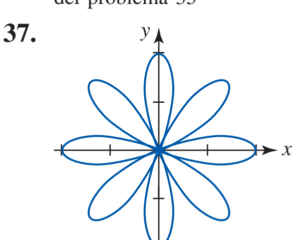


FIGURA 10.5.21 Gráfica del problema 37

38.

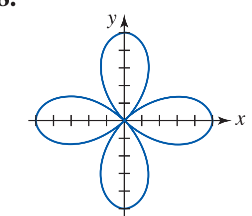


FIGURA 10.5.22 Gráfica del problema 38

En los problemas 39-42, encuentre los puntos de intersección de las gráficas del par de ecuaciones polares indicadas.

39. $r = 2$
    $r = 4\operatorname{sen}\theta$
40. $r = \operatorname{sen}\theta$
    $r = \operatorname{sen}2\theta$
41. $r = 1 - \cos\theta$
    $r = 1 + \cos\theta$
42. $r = 3 - 3\cos\theta$
    $r = 3\cos\theta$

En los problemas 43 y 44, use el hecho de que $r = f(\theta)$ y $-r = f(\theta + \pi)$ describen la misma curva como una ayuda para determinar los puntos de intersección del par dado de ecuaciones polares.

43. $r = 3$
    $r = 6\operatorname{sen}2\theta$
44. $r = \cos 2\theta$
    $r = 1 + \cos\theta$

Problemas con calculadora/SAC

45. Emplee un aparato de graficación para obtener la gráfica de la **bifolium** $r = 4 \operatorname{sen}\theta \cos^2\theta$ y el círculo $r = \operatorname{sen}\theta$ sobre los mismos ejes. Encuentre todos los puntos de intersección de las gráficas.

46. Emplee un sistema de graficación para verificar que la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ y la lemniscata $r^2 = 4\cos\theta$ se intersecan en cuatro puntos. Encuentre estos puntos de intersección de las gráficas.

En los problemas 47 y 48, las gráficas de las ecuaciones *a*)-*d*) representan una rotación de la gráfica de la ecuación dada. Intente dibujar estas gráficas a mano. Si tiene dificultades, entonces recurra a una calculadora o a un SAC.

47. $r = 1 + \operatorname{sen}\theta$
a) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/2)$
b) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/2)$
c) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta - \pi/6)$
d) $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta + \pi/4)$

48. $r = 2 + 4\cos\theta$
a) $r = 2 + 4\cos(\theta + \pi/6)$
b) $r = 2 + 4\cos(\theta - 3\pi/2)$
c) $r = 2 + 4\cos(\theta + \pi)$
d) $r = 2 + 4\cos(\theta - \pi/8)$

En los problemas 49-52, utilice una calculadora o un SAC, si es necesario, para vincular la gráfica dada con la ecuación polar apropiada en *a*)-*d*).

a) $r = 2\cos\dfrac{3\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$

b) $r = 2\cos\dfrac{\theta}{5}, \quad 0 \le \theta \le 5\pi$

c) $r = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{4}, \quad 0 \le \theta \le 8\pi$

d) $r = 2\operatorname{sen}\dfrac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 4\pi$

49.

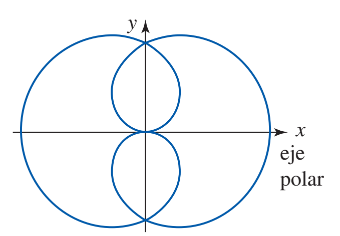


FIGURA 10.5.23 Gráfica del problema 49

50.

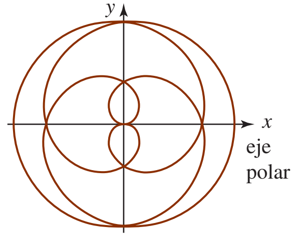


FIGURA 10.5.24 Gráfica del problema 50

51.

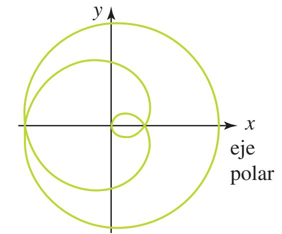


FIGURA 10.5.25 Gráfica del problema 51

52.

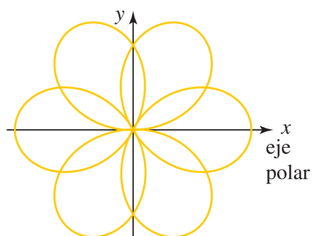


FIGURA 10.5.26 Gráfica del problema 52

53. Utilice un SAC para obtener gráficas de la ecuación polar $r = a + \cos\theta$ para $a = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}, \ldots, 3$.

54. Identifique todas las curvas en el problema 53. ¿Qué ocurre con las gráficas cuando $a \to \infty$?

≡ Piense en ello

En los problemas 55-58, identifique las simetrías si el par de puntos dados está sobre la gráfica de $r = f(\theta)$.

55. $(r, \theta), (-r, \pi - \theta)$

56. $(r, \theta), (r, \theta + \pi)$

57. $(r, \theta), (-r, \theta + 2\pi)$

58. $(r, \theta), (-r, -\theta)$

En los problemas 59 y 60, considere que $r = f(\theta)$ es una ecuación polar. Interprete geométricamente el resultado dado.

59. $f(-\theta) = f(\theta)$ (función par)

60. $f(-\theta) = -f(\theta)$ (función impar)

61. *a*) ¿Cuál es la diferencia entre los círculos $r = -4$ y $r = 4$?
b) ¿Cuál es la diferencia entre las rectas que pasan por el origen $\theta = \pi/6$ y $\theta = 7\pi/6$?

62. Un poco de historia El italiano **Galileo Galilei** (1564-1642) es recordado por su gran número de descubrimientos e innovaciones en los campos de la astronomía y la física. Con un telescopio reflector de su propio diseño fue el primero en descubrir las lunas de Júpiter. Mediante sus observaciones del planeta Venus y de las manchas solares, Galileo a la larga apoyó la controvertida opinión de Nicolás Copérnico en el sentido de que los planetas giran alrededor del Sol. El trabajo empírico de Galileo sobre la gravedad antecedió las aportaciones de Isaac Newton. Fue el primero en efectuar estudios científicos para determinar la aceleración de la gravedad. Al medir el tiempo que tardan bolas metálicas al rodar hacia abajo en un plano inclinado, Galileo pudo calcular la velocidad de cada bola y a partir de esas observaciones concluyó que la distancia s que se mueve una bola se relaciona con el tiempo t mediante $s = \frac{1}{2}gt^2$, donde g es la aceleración debida a la gravedad.

Suponga que varias bolas metálicas se sueltan simultáneamente desde un punto común y que se dejan deslizar hacia abajo por planos inclinados sin fricción a diversos ángulos, con cada bola acelerándose por la gravedad. Vea la FIGURA 10.5.27. Demuestre que en cualquier instante, todas las bolas yacen en un círculo común cuyo punto superior más alto es el punto de liberación. Galileo pudo demostrar esto sin el beneficio de las coordenadas rectangulares o polares.

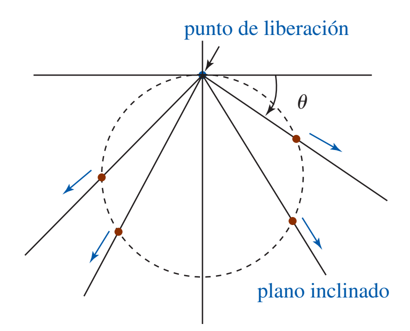


FIGURA 10.5.27 Planos inclinados del problema 62

10.6 Cálculo en coordenadas polares

Introducción En esta sección se responde a tres problemas de cálculo estándar en el sistema de coordenadas polares.

- ¿Cuál es la pendiente de una recta tangente a una gráfica polar?
- ¿Cuál es el área acotada por una gráfica polar?
- ¿Cuál es la longitud de una gráfica polar?

Iniciamos con el problema de la recta tangente.

Pendiente de una tangente a una gráfica polar Sorprende que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una ecuación polar $r = f(\theta)$ *no* sea la derivada $dr/d\theta = f'(\theta)$. La pendiente de una recta tangente sigue siendo dy/dx. Para determinar esta última derivada, se emplea $r = f(\theta)$ junto con $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ para escribir las ecuaciones paramétricas de la curva:

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta. \tag{1}$$

Entonces de (1) en la sección 10.3 y la regla del producto,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}.$$

Este resultado se resume en el siguiente teorema.

Teorema 10.6.1 Pendiente de una recta tangente

Si f es una función diferenciable de θ, entonces la **pendiente de la recta tangente** a la gráfica de $r = f(\theta)$ en un punto (r, θ) sobre la gráfica es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{f(\theta)\cos\theta + f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta}{-f(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f'(\theta)\cos\theta}, \tag{2}$$

siempre que $dx/d\theta \neq 0$.

La fórmula (2) en el teorema 10.6.1 se presenta "para registro"; no la memorice. Para encontrar dy/dx en coordenadas polares basta con formar las ecuaciones paramétricas $x = f(\theta)\cos\theta$, $y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta$ y después se usa la forma paramétrica de la derivada.

EJEMPLO 1 Pendiente

Determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $r = 4\,\text{sen}\,3\theta$ en $\theta = \pi/6$.

Solución De las ecuaciones paramétricas $x = 4\,\text{sen}\,3\theta\cos\theta$, $y = 4\,\text{sen}\,3\theta\,\text{sen}\,\theta$ encontramos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{4\,\text{sen}\,3\theta\cos\theta + 12\cos 3\theta\,\text{sen}\,\theta}{-4\,\text{sen}\,3\theta\,\text{sen}\,\theta + 12\cos 3\theta\cos\theta}$$

y por ello

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/6} = -\sqrt{3}.$$

La gráfica de la ecuación, la cual se reconoce como la curva de la rosa con tres pétalos, y la recta tangente se ilustran en la FIGURA 10.6.1. ■

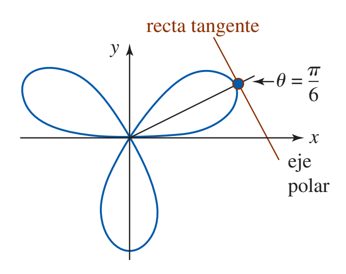


FIGURA 10.6.1 Recta tangente del ejemplo 1



EJEMPLO 2 Ecuación de la recta tangente

Encuentre una ecuación rectangular de la recta tangente en el ejemplo 1.

Solución En $\theta = \pi/6$ las ecuaciones paramétricas $x = 4\,\text{sen}\,3\theta\cos\theta$, $y = 4\,\text{sen}\,3\theta\,\text{sen}\,\theta$ producen, respectivamente, $x = 2\sqrt{3}$ y $y = 2$. Las coordenadas rectangulares del punto de tangencia son $(2\sqrt{3}, 2)$. Al emplear la pendiente que se encontró en el ejemplo 1, la forma punto-pendiente produce una ecuación de la recta tangente roja que se ilustra en la figura 10.6.1:

$$y - 2 = -\sqrt{3}\left(x - 2\sqrt{3}\right) \quad \text{o} \quad y = -\sqrt{3}x + 8. \quad ■$$

Podemos obtener una ecuación polar de la recta en el ejemplo 2 al sustituir x y y en la ecuación rectangular por $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ y resolver para r:

$$r = \frac{8}{\operatorname{sen}\theta + \sqrt{3}\cos\theta}.$$

EJEMPLO 3 Tangentes horizontal y vertical

Determine los puntos sobre la gráfica de $r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta$ en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los cuales la recta tangente es vertical.

Solución Recuerde de la sección 10.3 que una tangente horizontal ocurre en un punto para el cual $dy/d\theta = 0$ y $dx/d\theta \neq 0$, en tanto que una tangente vertical ocurre en un punto para el cual $dx/d\theta = 0$ y $dy/d\theta \neq 0$. Ahora bien, de las ecuaciones paramétricas

$$x = (3 - 3\operatorname{sen}\theta)\cos\theta, \qquad y = (3 - 3\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= (3 - 3\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta) + \cos\theta(-3\cos\theta)\\ &= -3\operatorname{sen}\theta + 3\operatorname{sen}^2\theta - 3\cos^2\theta\\ &= -3 - 3\operatorname{sen}\theta + 6\operatorname{sen}^2\theta\\ &= 3(2\operatorname{sen}\theta + 1)(\operatorname{sen}\theta - 1),\\ \frac{dy}{d\theta} &= (3 - 3\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + \operatorname{sen}\theta(-3\cos\theta)\\ &= 3\cos\theta(1 - 2\operatorname{sen}\theta).\end{aligned}$$

De estas derivadas observamos que

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \left(\frac{dx}{d\theta} \neq 0\right) \text{ en } \theta = \frac{\pi}{6},\ \theta = \frac{5\pi}{6} \text{ y } \theta = \frac{3\pi}{2},$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \left(\frac{dy}{d\theta} \neq 0\right) \text{ en } \theta = \frac{7\pi}{6} \text{ y } \theta = \frac{11\pi}{6}.$$

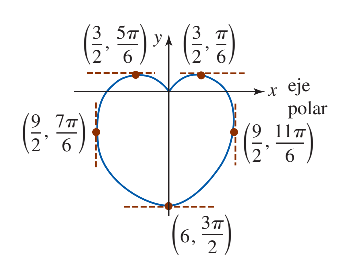
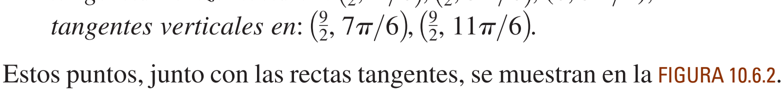


FIGURA 10.6.2 Rectas tangentes horizontal y vertical del ejemplo 3

De tal modo, hay



tangentes horizontales en: $\left(\frac{3}{2}, \pi/6\right), \left(\frac{3}{2}, 5\pi/6\right), (6, 3\pi/2)$,
tangentes verticales en: $\left(\frac{9}{2}, 7\pi/6\right), \left(\frac{9}{2}, 11\pi/6\right)$.

Estos puntos, junto con las rectas tangentes, se muestran en la FIGURA 10.6.2. ■

Tangentes a la gráfica en el origen En la sección anterior establecimos que, en general, si $r = 0$ y $dr/d\theta = f'(\theta) \neq 0$ cuando $\theta = \theta_0$, entonces la gráfica de $r = f(\theta)$ es tangente a la recta $\theta = \theta_0$ en el origen. Este hecho se deduce de (2). Si $r = f(\theta)$ es una función diferenciable de θ para la cual $f(\theta_0) = 0$ y $f'(\theta_0) \neq 0$, entonces en $\theta = \theta_0$, (2) produce

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(\theta_0)\cos\theta_0 + f'(\theta_0)\operatorname{sen}\theta_0}{-f(\theta_0)\operatorname{sen}\theta_0 + f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \frac{f'(\theta_0)\operatorname{sen}\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0.$$

En la última expresión se reconoce que $\tan\theta_0$ es la pendiente de la recta tangente $\theta = \theta_0$.

Advierta en el ejemplo 3 que $r = 3 - 3\operatorname{sen}\theta = 0$ en $\theta = \pi/2$. Pero puesto que tanto el numerador $dy/d\theta$ como el denominador $dx/d\theta$ en (2) son 0 en $\theta = \pi/2$ no podemos concluir algo acerca de la recta tangente en el origen $(0, \pi/2)$.

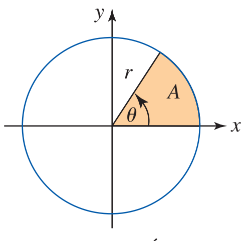


FIGURA 10.6.3 Área A de la sección circular

Área de una región El problema de determinar el área de una región acotada por gráficas polares no es tan directo como lo fue en la sección 6.2. Como veremos en la discusión subsecuente, en lugar de un rectángulo usamos un sector de un círculo, tal como se muestra en la FIGURA 10.6.3. Puesto que el área A de un sector circular es proporcional al ángulo central θ, medido en radianes, y ya que el área del círculo completo es πr^2, tenemos

$$\frac{A}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \quad \text{o} \quad A = \frac{1}{2}r^2\theta. \tag{3}$$

Construcción de una integral Suponga que $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa sobre el intervalo $[\alpha, \beta]$, donde $0 \leq \alpha \leq \beta < 2\pi$. Para encontrar el área A de la región que se muestra en la FIGURA 10.6.4*a*) que está acotada por la gráfica de f y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$, se empieza formando una partición P de $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta.$$

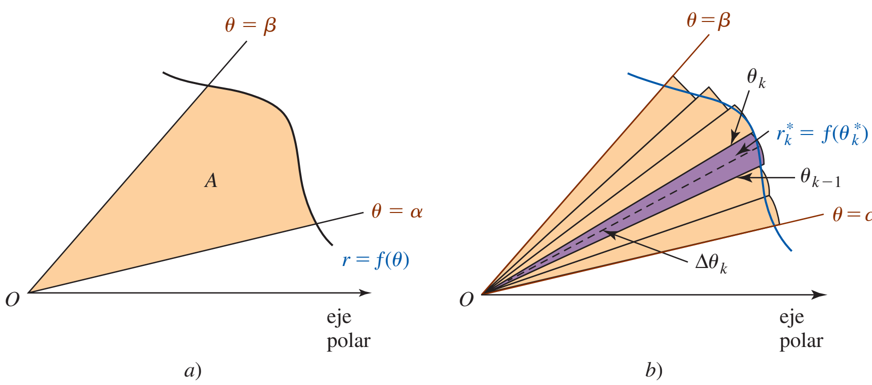


FIGURA 10.6.4 Área A de una región acotada por una gráfica polar y dos rayos

Si θ_k^* denota un punto muestral en el subintervalo k-ésimo $[\theta_{k-1}, \theta_k]$, entonces por (3) el área del sector circular de radio $r_k = f(\theta_k^*)$ indicado en la figura 10.6.4*b*) es

$$A_k = \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k,$$

donde $\Delta\theta_k = \theta_k - \theta_{k-1}$ es su ángulo central. A su vez, la suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k$$

proporciona una aproximación a A. El área A está dada entonces por el límite cuando $\|P\| \to 0$:

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_k^*)]^2 \Delta\theta_k.$$

Teorema 10.6.2 Área en coordenadas polares

Si $r = f(\theta)$ es una función continua no negativa sobre $[\alpha, \beta]$, entonces el **área** acotada por su gráfica y los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ están dados por

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\theta. \tag{4}$$

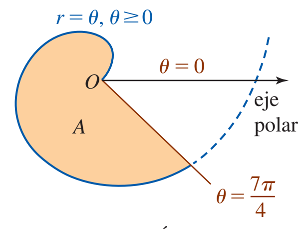


FIGURA 10.6.5 Área del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Área acotada por una espiral

Encuentre el área de la región que está acotada por la espiral $r = \theta$, $\theta \geq 0$, entre los rayos $\theta = 0$ y $\theta = 7\pi/4$.

Solución De (4), el área de la región sombreada que se muestra en la FIGURA 10.6.5 es

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{7\pi/4} \theta^2 d\theta = \frac{1}{6}\theta^3 \Big]_0^{7\pi/4} = \frac{343}{384}\pi^3 \approx 27.70.$$ ■

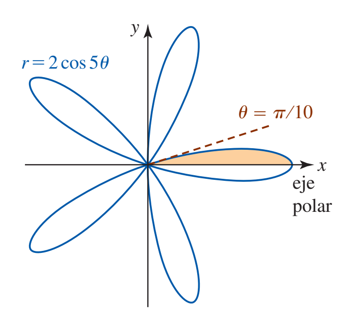


FIGURA 10.6.6 La mitad del área del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Área acotada por una curva de la rosa

Encuentre el área de un pétalo de la curva de la rosa $r = 2\cos 5\theta$.

Solución Como se muestra en la FIGURA 10.6.6, la curva de la rosa tiene cinco pétalos. Debido a la simetría encontraremos el área de la mitad de un pétalo y el resultado lo multiplicamos por 2. Al dejar $r = 0$ y resolver $2\cos 5\theta = 0$ obtenemos $5\theta = \pi/2$ o $\theta = \pi/10$. En otras palabras, la

curva entra al origen tangente a la recta $\theta = \pi/10$. De (4), el área A de la mitad del pétalo en la figura 10.6.6 es entonces

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/10} (2\cos 5\theta)^2 d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/10} \cos^2 5\theta \, d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/10} \frac{1}{2}(1 + \cos 10\theta)\, d\theta \\ &= \theta + \frac{1}{10}\operatorname{sen} 10\theta \Big]_0^{\pi/10} \\ &= \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

Las fórmulas del ángulo mitad:

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

serán de utilidad en esta sección.

El área de un pétalo es entonces $2(\pi/10) = \pi/5$. ■

Desde luego, el área de cada pétalo en el ejemplo 5 es la misma y por ello el área encerrada por la curva completa de la rosa de cinco pétalos es $5(\pi/5) = \pi$.

Una advertencia: cuando trabaje con problemas del tipo que se presentó en el ejemplo 5, debe tener cuidado con los límites de integración. No suponga que el área encerrada por la curva completa de la rosa de cinco pétalos puede obtenerla de (4) integrando sobre el intervalo $[0, 2\pi]$. En otras palabras, el área no es $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2\cos 5\theta)^2\, d\theta$. Esto se debe a que la curva completa se obtiene de $0 \le \theta \le \pi$. Vea *i*) en *Notas desde el aula* en la sección 10.5.

EJEMPLO 6 Área acotada entre dos gráficas

Encuentre el área de la región que es común a los interiores de la cardioide $r = 2 - 2\cos\theta$ y la limacón $r = 2 + \cos\theta$.

Solución La inspección de la FIGURA 10.6.7 muestra que necesitamos dos integrales. Al resolver simultáneamente las dos ecuaciones:

$$2 - 2\cos\theta = 2 + \cos\theta \qquad \text{o} \qquad \cos\theta = 0$$

obtenemos $\theta = \pi/2$, por lo que un punto de intersección es $(2, \pi/2)$. Por simetría, concluimos que

$$\begin{aligned} A &= 2\left\{\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(2 - 2\cos\theta)^2\, d\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi}(2 + \cos\theta)^2\, d\theta\right\} \\ &= 4\int_0^{\pi/2}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}(4 + 4\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\left[1 - 2\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi}\left[4 + 4\cos\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\right] d\theta \\ &= 4\left[\frac{3}{2}\theta - 2\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{9}{2}\theta + 4\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{21}{4}\pi - 12 \approx 4.49. \end{aligned}$$

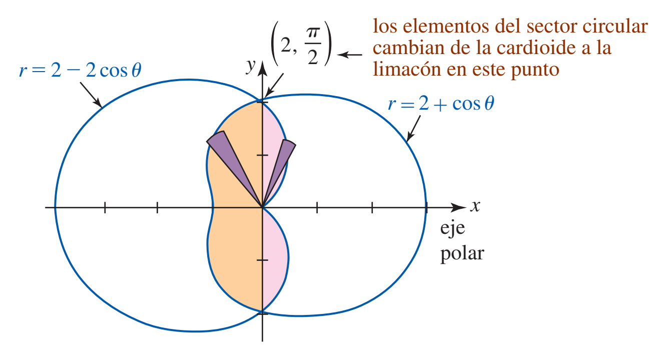


FIGURA 10.6.7 Área del ejemplo 6 ■

Área acotada por dos gráficas El área A de la región que se muestra en la FIGURA 10.6.8 se encuentra sustrayendo áreas. Si f y g son continuas sobre $[\alpha, \beta]$ y $f(\theta) \geq g(\theta)$ sobre el intervalo, entonces el área acotada por las gráficas de $r = f(\theta)$, $r = g(\theta)$, $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ es

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2\, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2\, d\theta.$$

Escrita como una sola integral, el área está dada por

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} ([f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2)\, d\theta. \qquad (5)$$

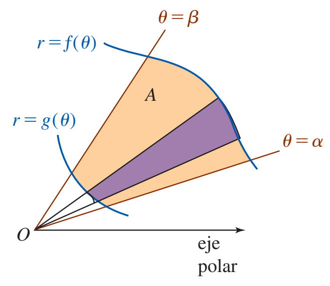


FIGURA 10.6.8 Área de la región acotada entre las dos gráficas

EJEMPLO 7 Área acotada por dos gráficas

Encuentre el área de la región en el primer cuadrante que está fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la curva de la rosa $r = 2$ sen 2θ.

Solución Al resolver en forma simultánea las dos ecuaciones:

$$1 = 2\,\text{sen}\,2\theta \qquad \text{o} \qquad \text{sen}\,2\theta = \frac{1}{2}$$

implica que $2\theta = \pi/6$ y $2\theta = 5\pi/6$. De este modo, los dos puntos de intersección en el primer cuadrante son $(1, \pi/12)$ y $(1, 5\pi/12)$. El área en cuestión se muestra en la FIGURA 10.6.9. De (5),

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} [(2\text{sen}\,2\theta)^2 - 1^2]\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} [4\,\text{sen}^2 2\theta - 1]\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left[4\left(\frac{1 - \cos 4\theta}{2}\right) - 1\right] d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\text{sen}\,4\theta\right]_{\pi/12}^{5\pi/12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.96. \end{aligned}$$

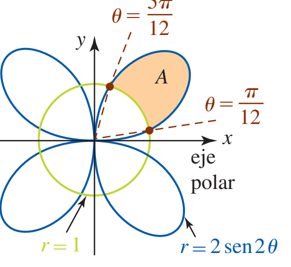


FIGURA 10.6.9 Área del ejemplo 7

Longitud de arco para gráficas polares Hemos visto que si $r = f(\theta)$ es la ecuación de una curva C en coordenadas polares, entonces las ecuaciones paramétricas de C son

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta, \quad \alpha \leq \theta \leq \beta.$$

Si f tiene una derivada continua, entonces es directo derivar una fórmula para la longitud de arco en coordenadas polares. Puesto que

$$\frac{dx}{d\theta} = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta,$$

el álgebra básica indica que

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2.$$

El siguiente resultado se concluye de (9) de la sección 10.3.

Teorema 10.6.3 Longitud de una gráfica polar

Sea f una función para la cual f' es continua sobre un intervalo $[\alpha, \beta]$. Entonces la **longitud** L de la gráfica $r = f(\theta)$ sobre el intervalo es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \qquad (6)$$

EJEMPLO 8 Longitud de una cardioide

Determine la longitud de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi$.

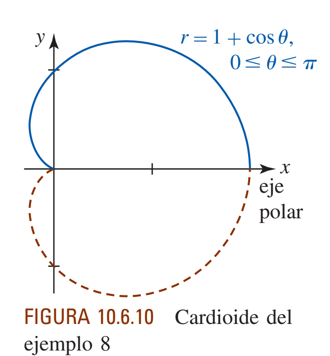


FIGURA 10.6.10 Cardioide del ejemplo 8

Solución La gráfica de $r = 1 + \cos\theta$ para $0 \le \theta \le \pi$ se ilustra en azul en la FIGURA 10.6.10. En este caso, $dr/d\theta = -\operatorname{sen}\theta$, de modo que

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) + \operatorname{sen}^2\theta = 2 + 2\cos\theta$$

y

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{2 + 2\cos\theta} = \sqrt{2}\sqrt{1 + \cos\theta}.$$

Por consiguiente, de (6) la longitud de la porción azul de la gráfica en la figura 10.6.10 es:

$$L = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos\theta}\, d\theta.$$

Para evaluar esta integral empleamos la fórmula del ángulo medio para el coseno en la forma $\cos^2(\theta/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)$ o $1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$. La longitud de la gráfica para $0 \le \theta \le \pi$ está dada por

$$L = 2\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta = 4\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\bigg]_0^{\pi} = 4\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 4.$$ ■

Se pide al lector que lea las *Notas desde el aula* siguientes.

$\dfrac{d}{d\theta}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Es fácil cometer un error en los límites de integración en las integrales de área y de longitud de arco (4) y (6). En el ejemplo 8 recurrimos a la simetría para ver que la longitud de una cardioide completa, esto es $r = 1 + \cos\theta$ para $0 \le \theta \le 2\pi$ es $2(4) = 8$ unidades, pero esto *no* es lo que produce (6) integrando sobre el intervalo $0 \le \theta \le 2\pi$:

$$L = 2\int_0^{2\pi} \cos(\theta/2)\, d\theta. \qquad (7)$$

Reflexione por qué se obtiene una respuesta incorrecta de (7) y después trabaje los problemas 45 y 46 de los ejercicios 10.6.

Ejercicios 10.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-33.

Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la pendiente de la recta tangente en el valor indicado de θ.

1. $r = \theta$; $\theta = \pi/2$
2. $r = 1/\theta$; $\theta = 3$
3. $r = 4 - 2\operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi/3$
4. $r = 1 - \cos\theta$; $\theta = 3\pi/4$
5. $r = \operatorname{sen}\theta$; $\theta = \pi/6$
6. $r = 10\cos\theta$; $\theta = \pi/4$

En los problemas 7 y 8, determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación dada en los cuales la recta tangente es horizontal y los puntos en los que la recta tangente es vertical.

7. $r = 2 + 2\cos\theta$
8. $r = 1 - \operatorname{sen}\theta$

En los problemas 9 y 10, determine la ecuación rectangular de la recta tangente en el punto indicado.

9. $r = 4\cos 3\theta$
10. $r = 1 + 2\cos\theta$

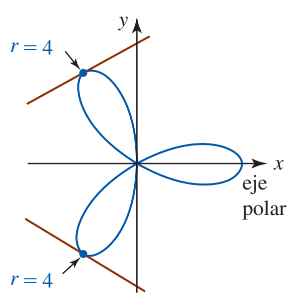


FIGURA 10.6.11 Gráfica del problema 9

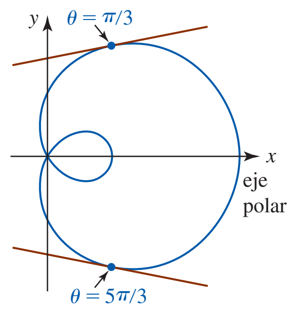


FIGURA 10.6.12 Gráfica del problema 10

En los problemas 11-16, encuentre la ecuación polar de cada recta tangente a la gráfica polar en el origen.

11. $r = -2\,\text{sen}\,\theta$ **12.** $r = 3\cos\theta$

13. $r = 1 + \sqrt{2}\,\text{sen}\,\theta$ **14.** $r = 1 - 2\,\text{sen}\,\theta$

15. $r = 2\cos 5\theta$ **16.** $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$

En los problemas 17-24, encuentre el área de la región que está acotada por la gráfica de la ecuación polar que se indica.

17. $r = 2\,\text{sen}\,\theta$ **18.** $r = 10\cos\theta$

19. $r = 4 + 4\cos\theta$ **20.** $r = 1 - \text{sen}\,\theta$

21. $r = 3 + 2\,\text{sen}\,\theta$ **22.** $r = 2 + \cos\theta$

23. $r = 3\,\text{sen}\,2\theta$ **24.** $r = \cos 3\theta$

En los problemas 25-30, determine el área de la región que está acotada por la gráfica de una ecuación polar dada y los rayos indicados.

25. $r = 2\theta, \theta \geq 0, \theta = 0, \theta = 3\pi/2$

26. $r\theta = \pi, \theta > 0, \theta = \pi/2, \theta = \pi$

27. $r = e^{\theta}, \theta = 0, \theta = \pi$

28. $r = 10e^{-\theta}, \theta = 1, \theta = 2$

29. $r = \tan\theta, \theta = 0, \theta = \pi/4$

30. $r\,\text{sen}\,\theta = 5, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3$

En los problemas 31 y 32, la gráfica es de la ecuación polar $r = 1 + 2\cos\theta$. Determine el área de la región sombreada.

31.

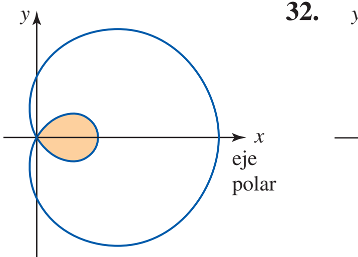


FIGURA 10.6.13 Región del problema 31

32.

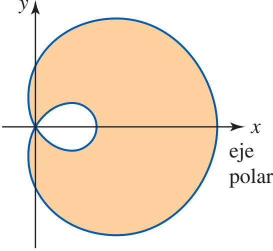


FIGURA 10.6.14 Región del problema 32

En los problemas 33-38, determine el área de la región descrita.

33. Fuera del círculo $r = 1$ y dentro de la curva de la rosa $r = 2\cos 3\theta$.

34. Común a los interiores de los círculos $r = \cos\,\theta$ y $r = \text{sen}\,\theta$.

35. Dentro del círculo $r = 5\,\text{sen}\,\theta$ y fuera de la limacón $r = 3 - \text{sen}\,\theta$.

36. Común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones del problema 35.

37. Dentro de la cardioide $r = 4 - 4\cos\theta$ y fuera del círculo $r = 6$.

38. Común a los interiores de las gráficas de las ecuaciones en el problema 37.

En los problemas 39-44, encuentre la longitud de la curva para los valores indicados de θ.

39. $r = 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

40. $r = 6\cos\theta$, gráfica completa

41. $r = e^{\theta/2}, 0 \leq \theta \leq 4$

42. $r = \theta, 0 \leq \theta \leq 1$

43. $r = 3 - 3\cos\theta$, gráfica completa

44. $r = \text{sen}^3(\theta/3), 0 \leq \theta \leq \pi$

☰ Piense en ello

45. Considere la lemniscata $r^2 = 9\cos 2\theta$.

a) Explique por qué el área de la región acotada por la gráfica no está dada por la integral $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 9\cos 2\theta\,d\theta$.

b) Al utilizar una integral apropiada, determine el área de la región acotada por la gráfica.

46. En el ejemplo 8 explique por qué la longitud de la cardioide completa $r = 1 + \cos\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, no está dada por la integral $2\int_0^{2\pi} \cos(\theta/2)\,d\theta$. Luego reexamine el problema 43 y explique por qué no hay dificultades al integrar sobre el intervalo $[0, 2\pi]$.

47. Dibuje la región común a los interiores de las gráficas de $r = \text{sen}\,2\theta$ y $r = \cos 2\theta$. Encuentre el área de esta región.

48. El área de la región que está acotada por la gráfica de la región de $r = 1 + \cos\theta$ es $3\pi/2$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de las áreas acotadas por las gráficas de $r = 1 - \cos\theta$, $r = 1 + \text{sen}\,\theta$ y $r = 1 - \text{sen}\,\theta$? Justifique sus respuestas sin calcular las áreas utilizando (4).

49. ¿El área de la región acotada por la gráfica de $r = 2(1 + \cos\theta)$ es igual al doble del área de la región acotada por la gráfica de $r = 1 + \cos\theta$?

50. Encuentre el área de la región sombreada en la FIGURA 10.6.15. Cada círculo tiene radio 1.

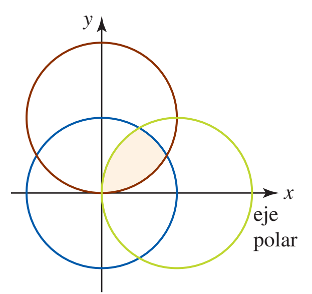


FIGURA 10.6.15 Círculos que se intersecan en el problema 50

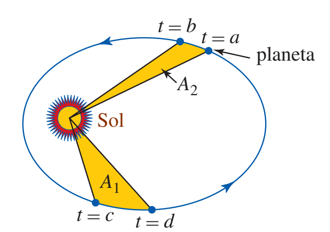
☰ Proyectos

51. Segunda ley de Kepler En coordenadas polares, el **momento angular** de una partícula en movimiento de masa m se define como $L = mr^2\,d\theta/dt$. Suponga que las coordenadas polares de un planeta de masa m son (r_1, θ_1) y (r_2, θ_2) en los tiempos $t = a$ y $t = b$, $a < b$, respectivamente. Puesto que la fuerza gravitacional que actúa sobre el planeta es una fuerza central, el momento angular L del planeta es una constante. Use este hecho para demostrar que el área A barrida por r es $A = L(b - a)/2m$. Cuando se considera que el Sol está en el origen, esta ecuación

demuestra la segunda ley de Kepler del movimiento planetario:

- Una recta que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

Vea la FIGURA 10.6.16.



$A_1 = A_2$ cuando $b - a = d - c$

FIGURA 10.6.16 Órbita del planeta del problema 51

52. Un poco de historia: Los discos de larga duración (LP) Antes de los iPod, los reproductores MP3 y los CD, la música se obtenía reproduciendo un *disco*. Entre los años 1960-1990 el formato popular fue el disco LP (siglas de larga duración en inglés: *long-playing*) que giraba sobre una tornamesa a razón de 33 revoluciones por minuto.* Aunque ahora es posible encontrarlos en almacenes que se especializan en objetos coleccionables, muchos de nosotros aún tenemos colecciones de estos grandes discos de vinil negro de 33 rpm almacenados en cajas. El sonido se codificaba en estos discos por medios mecánicos a lo largo con un surco continuo. Cuando se reproducía un disco, una aguja empezaba en un punto cercano al borde más externo del disco y recorría el surco hasta un punto cercano a su centro. ¿Cuán largo es el surco de un disco? Suponga que un disco se reproduce durante 20 minutos a 33 revoluciones por minuto. Cuando el disco se reproduce, la aguja va del radio más exterior R_o a un radio más interior R_i. Vea la FIGURA 10.6.17. Suponga que el surco del disco es una espiral que puede describirse mediante una ecuación polar de la forma $r = R_o - k\theta$, donde k es una constante y θ se mide en radianes.

a) Exprese k en términos de R_o, R_i y N, donde N es el número de revoluciones completadas por el disco.

b) Demuestre que la longitud L del surco del disco está dada por

$$L = \frac{1}{k}\int_{R_i}^{R_o} \sqrt{k^2 + u^2}\, du.$$

c) Utilice la serie del binomio para establecer la aproximación

$$\sqrt{k^2 + u^2} \approx u\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{k}{u}\right)^2\right].$$

d) En el inciso *b*), utilice el resultado que se obtuvo en el inciso *c*) para demostrar que la longitud L del surco del disco está dada por la aproximación

$$L \approx \pi N(R_i + R_o) + \frac{R_o - R_i}{4\pi N}\ln\frac{R_o}{R_i}.$$

e) Emplee el resultado en el inciso *d*) para aproximar la longitud L si $R_o = 6$ pulg y $R_i = 2.5$ pulg.

f) Use una sustitución apropiada para evaluar la integral en el inciso *b*) empleando los valores específicos de R_o y R_i dados en el inciso *e*). Compare esta respuesta con la que obtuvo en el inciso *e*).

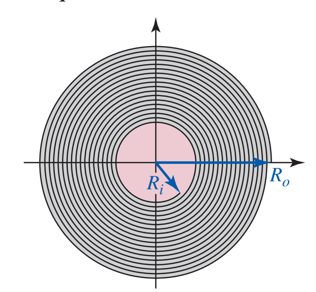


FIGURA 10.6.17 Disco LP del problema 52

*Los discos de 33 en realidad giraban a $33\frac{1}{3}$ revoluciones por minuto.

10.7 Secciones cónicas en coordenadas polares

Introducción En la primera sección de este capítulo dedujimos las ecuaciones de la parábola, elipse e hipérbola mediante la fórmula de la distancia en coordenadas rectangulares. Al emplear coordenadas polares y el concepto de excentricidad, ahora daremos una definición general de una sección cónica que comprende a las tres curvas.

Definición 10.7.1 Sección cónica

Considere que L es una recta fija en el plano y que F es un punto que no se encuentre sobre la recta. Una **sección cónica** es el conjunto de puntos P en el plano para los cuales la distancia de P a F dividida entre la distancia de P a L es una constante.

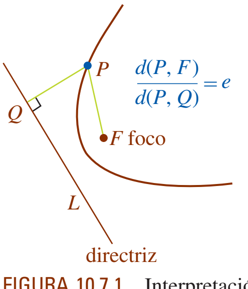


FIGURA 10.7.1 Interpretación geométrica de (1)

La recta fija L recibe el nombre de **directriz** y el punto F es un **foco**. La constante fija es la **excentricidad** e de la cónica. Como indica la FIGURA 10.7.1 el punto P yace sobre la cónica si y sólo si

$$\frac{d(P, F)}{d(P, Q)} = e, \tag{1}$$

donde Q denota el pie de la perpendicular de P a L. En (1), si

- $e = 1$, la cónica es una **parábola**,
- $0 < e < 1$, la cónica es una **elipse**, y
- $e > 1$, la cónica es una **hipérbola**.

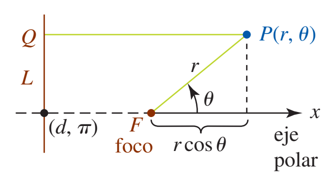


FIGURA 10.7.2 Interpretación de la coordenada polar de (2)

Ecuaciones polares de cónicas La ecuación (1) se interpreta fácilmente utilizando coordenadas polares. Suponga que el foco F se coloca en el polo y la directriz L está d unidades ($d > 0$) a la *izquierda* de F perpendicular al eje polar extendido. Se advierte de la FIGURA 10.7.2 que (1) escrita como $d(P, F) = ed(P, Q)$ es la misma que

$$r = e(d + r\cos\theta) \qquad \text{o} \qquad r - er\cos\theta = ed. \tag{2}$$

Al resolver para r obtenemos

$$r = \frac{ed}{1 - e\cos\theta}. \tag{3}$$

Para ver que (3) produce las familiares ecuaciones de las cónicas, superpondremos un sistema de coordenadas rectangular sobre el sistema de coordenadas polares con origen en el polo y el eje x positivo coincidiendo con los ejes polares. Después expresamos la primera ecuación en (2) en coordenadas rectangulares y simplificamos:

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{x^2 + y^2} &= ex + ed \\ x^2 + y^2 &= e^2x^2 + 2e^2dx + e^2d^2 \\ (1 - e^2)x^2 - 2e^2dx + y^2 &= e^2d^2. \end{aligned} \tag{4}$$

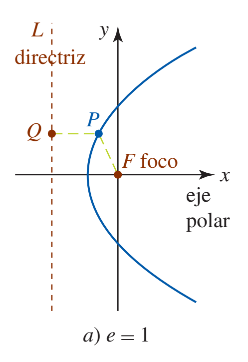
Eligiendo $e = 1$, (4) se convierte en

$$-2dx + y^2 = d^2 \qquad \text{o} \qquad y^2 = 2d\left(x + \frac{d}{2}\right),$$

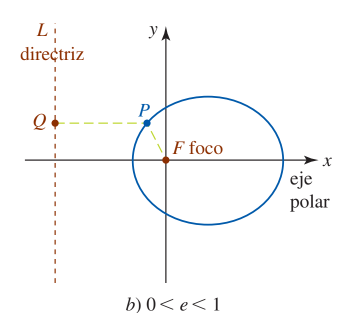
que es una ecuación en forma estándar de una parábola cuyo eje es el eje x, el vértice está en $(-d/2, 0)$ y, consistente con la ubicación de F, cuyo foco está en el origen.

Es un buen ejercicio de álgebra mostrar que (2) produce ecuaciones en forma estándar de una elipse en el caso $0 < e < 1$ y una hipérbola en el caso $e > 1$. Vea el problema 43 en los ejercicios 10.7. De modo que, dependiendo del valor de e, la ecuación polar (3) tiene tres posibles gráficas como se muestra en la FIGURA 10.7.3.

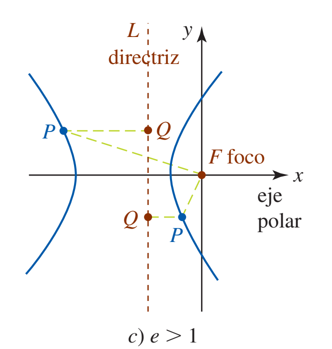
Si ubicamos la directriz L a la *derecha* del foco F en el origen en la deducción de la ecuación polar (3), entonces la ecuación resultante sería $r = ed/(1 + e\cos\theta)$. Cuando elige la directriz L paralela al eje polar, esto es, horizontal, entonces encontrará que la ecuación de la cónica es $r = ed/(1 + e\,\text{sen}\,\theta)$ (directriz debajo del origen) o $r = ed/(1 + e\,\text{sen}\,\theta)$ (directriz sobre el origen). En el siguiente teorema se da un resumen de la discusión precedente.



a) $e = 1$



b) $0 < e < 1$



c) $e > 1$

FIGURA 10.7.3 Gráficas de la ecuación (3); directriz L a la izquierda de F

Teorema 10.7.1 Ecuaciones polares de cónicas

Cualquier ecuación polar de la forma

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\cos\theta} \tag{5}$$

o

$$r = \frac{ed}{1 \pm e\,\text{sen}\,\theta} \tag{6}$$

es una **sección cónica** con foco en el origen y directriz a d unidades del origen y perpendicular (en el caso de (5)) o paralela (en el caso (6)) al eje x. La cónica es una parábola si $e = 1$, una elipse si $0 < e < 1$ y una hipérbola si $e > 1$.

EJEMPLO 1 Identificación de cónicas

Identifique cada una de las siguientes cónicas:

a) $r = \dfrac{2}{1 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ ***b***) $r = \dfrac{3}{4 + \cos\theta}$.

Solución

a) Una comparación término por término de la ecuación dada con la forma polar $r = ed/(1 - e\ \text{sen}\,\theta)$ permite hacer la identificación $e = 2$. En consecuencia, la cónica es una hipérbola.

b) Para identificar la sección cónica, dividimos el numerador y el denominador de la ecuación dada entre 4. Esto deja a la ecuación en la forma

$$r = \frac{\frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{4}\cos\theta}.$$

Luego, al comparar con $r = ed/(1 + e\cos\theta)$, observamos que $e = \frac{1}{4}$. En consecuencia, la cónica es una elipse. ■

Gráficas Es posible que obtenga una gráfica aproximada de una cónica definida por (5) o (6) si conoce la orientación de sus ejes, determina las intersecciones con los ejes *x* y *y* y encuentra los vértices. En los casos de las ecuaciones (5) y (6) tenemos, respectivamente:

- los dos vértices de la **elipse** o **hipérbola** ocurren en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$; el vértice de una **parábola** puede ocurrir sólo en uno de los valores: $\theta = 0$ o $\theta = \pi$.
- los dos vértices de una elipse o una **hipérbola** ocurren en $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$; el vértice de una **parábola** puede ocurrir únicamente en uno de los valores $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$.

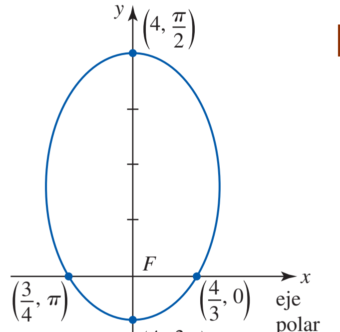


FIGURA 10.7.4 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Graficación de una cónica

Grafique $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$.

Solución Al escribir la ecuación como $r = \dfrac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}\text{sen}\,\theta}$ vemos que la excentricidad es $e = \frac{2}{3}$ y por ello la cónica es una elipse. Además, debido a que la ecuación es de la forma dada en (6), sabemos que la directriz es paralela al eje *x*. Ahora bien, en vista de la discusión precedente a este ejemplo, tenemos

$$\textit{vértices:}\quad (4, \pi/2), \left(\tfrac{4}{5}, 3\pi/2\right)$$

$$\textit{intersecciones } x\text{:}\quad \left(\tfrac{4}{3}, 0\right), \left(\tfrac{4}{3}, \pi\right).$$

Según vemos en la FIGURA 10.7.4, el eje mayor de la elipse yace a lo largo del eje *y*. ■

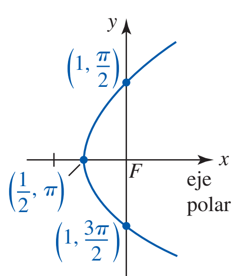


FIGURA 10.7.5 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Graficación de una cónica

Grafique $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$.

Solución Al revisar la ecuación vemos que es de la forma dada en (5) con $e = 1$. Por consiguiente, la sección cónica es una parábola cuya directriz es perpendicular al eje *x*. Puesto que *r* no está definido en $\theta = 0$, el vértice de la parábola ocurre en $\theta = \pi$:

$$\textit{vértices:}\quad \left(\tfrac{1}{2}, \pi\right)$$

$$\textit{intersecciones } y\text{:}\quad (1, \pi/2), (1, 3\pi/2).$$

Como observamos en la FIGURA 10.7.5, el eje de simetría de la parábola yace a lo largo del eje *x*. ■

EJEMPLO 4 Graficación de una cónica

Grafique $r = \dfrac{2}{1 + 2\cos\theta}$.

Solución De (5) vemos que $e = 2$, y por ello la sección cónica es una hipérbola cuya directriz es perpendicular al eje x. Los vértices ocurren en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$:

$$\textit{vértices:}\quad \left(\tfrac{2}{3}, 0\right), (-2, \pi)$$
$$\textit{intersecciones } y\text{:}\quad (2, \pi/2), (2, 3\pi/2).$$

Como aparece en la FIGURA 10.7.6, el eje transversal de la hipérbola yace a lo largo del eje x. ■

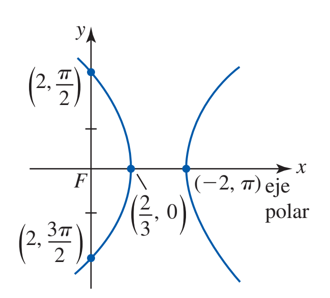


FIGURA 10.7.6 Gráfica de la ecuación polar del ejemplo 4

Cónicas rotadas En la sección 10.5 vimos que las gráficas de $r = f(\theta - \gamma)$ y $r = f(\theta + \gamma)$, $\gamma > 0$, son rotaciones de la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$ alrededor del origen en una cantidad γ. De tal modo,

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{ed}{1 \pm e\cos(\theta - \gamma)} \\ r &= \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}(\theta - \gamma)} \end{aligned}\right\} \text{cónicas rotadas en sentido contrario al de las manecillas del reloj en torno al origen}$$

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{ed}{1 \pm e\cos(\theta + \gamma)} \\ r &= \frac{ed}{1 \pm e\,\mathrm{sen}(\theta + \gamma)} \end{aligned}\right\} \text{cónicas rotadas en el sentido de las manecillas del reloj alrededor del origen}$$

EJEMPLO 5 Cónica rotada

En el ejemplo 2 se vio que la gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\mathrm{sen}\,\theta}$ es una elipse con eje mayor a lo largo del eje y. Es la gráfica azul en la FIGURA 10.7.7. La gráfica de $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\mathrm{sen}(\theta - 2\pi/3)}$ es la gráfica roja en la figura 10.7.7 y corresponde a una rotación contraria a las manecillas del reloj de la gráfica en la cantidad $2\pi/3$ (o 120°) alrededor del origen. El eje mayor de la gráfica roja yace a lo largo de la recta $\theta = 7\pi/6$. ■

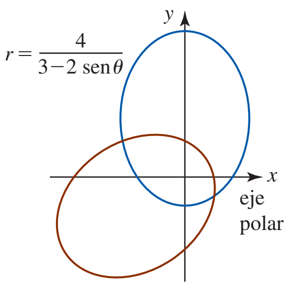


FIGURA 10.7.7 Gráficas de las ecuaciones polares del ejemplo 5

Aplicaciones Las ecuaciones del tipo en (5) y en (6) son bastante apropiadas para describir una órbita cerrada de un satélite alrededor del Sol (Tierra o Luna) puesto que una órbita de este tipo es una elipse con el Sol (Tierra o Luna) en un foco. Suponga que una ecuación de la órbita está dada por $r = ed/(1 - e\cos\theta)$, $0 < e < 1$, y r_p es el valor de r en el perihelio (perigeo o periluna) y r_a es el valor de r en el afelio (apogeo o apoluna). Éstos son los puntos en la órbita que ocurren sobre el eje x, en los cuales el satélite está más cerca o más lejos, respectivamente, del Sol (Tierra o Luna). Vea la FIGURA 10.7.8. Se le deja como ejercicio demostrar que la excentricidad e de la órbita se relaciona con r_p y r_a mediante

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}. \tag{7}$$

Vea el problema 44 en los ejercicios 10.7.

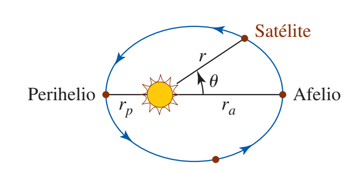


FIGURA 10.7.8 Órbita de un satélite alrededor del Sol

EJEMPLO 6 Determinación de la ecuación polar de una órbita

Encuentre una ecuación polar de la órbita del planeta Mercurio alrededor del Sol si $r_p = 2.85 \times 10^7$ mi y $r_a = 4.36 \times 10^7$ mi.

Solución De (7), la excentricidad de la órbita de Mercurio es

$$e = \frac{4.36 \times 10^7 - 2.85 \times 10^7}{4.36 \times 10^7 + 2.85 \times 10^7} = 0.21.$$

Por consiguiente, $$r = \frac{0.21d}{1 - 0.21\cos\theta}.$$



Mercurio es el planeta más cercano al Sol

Todo lo que necesita hacer ahora es resolver para la cantidad $0.21d$. Para ello recurra al hecho de que el afelio ocurre en $\theta = 0$:

$$4.36 \times 10^7 = \frac{0.21d}{1 - 0.21}.$$

Al resolver la última ecuación para la cantidad $0.21d$ obtiene $0.21d = 3.44 \times 10^7$. Por consiguiente, una ecuación polar de la órbita de Mercurio es

$$r = \frac{3.44 \times 10^7}{1 - 0.21\cos\theta}.$$ ■

Ejercicios 10.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-33.

Fundamentos

En los problemas 1-10, determine la excentricidad, identifique la sección cónica y dibuje su gráfica.

1. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$

2. $r = \dfrac{2}{2 - \operatorname{sen}\theta}$

3. $r = \dfrac{15}{4 - \cos\theta}$

4. $r = \dfrac{5}{2 - 2\operatorname{sen}\theta}$

5. $r = \dfrac{4}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

6. $r = \dfrac{12}{6 + 2\operatorname{sen}\theta}$

7. $r = \dfrac{18}{3 + 6\cos\theta}$

8. $r = \dfrac{6\sec\theta}{\sec\theta - 1}$

9. $r = \dfrac{10}{5 + 4\operatorname{sen}\theta}$

10. $r = \dfrac{2}{2 + 5\cos\theta}$

En los problemas 11-14, determine la excentricidad e de la cónica dada. Después convierta la ecuación polar en una ecuación rectangular y verifique que $e = c/a$.

11. $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}\theta}$

12. $r = \dfrac{10}{2 - 3\cos\theta}$

13. $r = \dfrac{12}{3 - 2\cos\theta}$

14. $r = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \operatorname{sen}\theta}$

En los problemas 15-20, encuentre una ecuación polar de la cónica con foco en el origen que satisfaga las condiciones dadas.

15. $e = 1$, directriz $x = 3$

16. $e = \frac{3}{2}$, directriz $y = 2$

17. $e = \frac{2}{3}$, directriz $y = -2$

18. $e = \frac{1}{2}$, directriz $x = 4$

19. $e = 2$, directriz $x = 6$

20. $e = 1$, directriz $y = -2$

21. Encuentre una ecuación polar de la cónica del problema 15 si la gráfica se rota en dirección de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $2\pi/3$.

22. Encuentre una ecuación polar de la cónica del problema 16 si la gráfica se rota en dirección contraria a la de las manecillas del reloj alrededor del origen en una cantidad $\pi/6$.

En los problemas 23-28, encuentre una ecuación polar de la parábola con foco en el origen y el vértice dado.

23. $\left(\frac{3}{2}, 3\pi/2\right)$

24. $(2, \pi)$

25. $\left(\frac{1}{2}, \pi\right)$

26. $(2, 0)$

27. $\left(\frac{1}{4}, 3\pi/2\right)$

28. $\left(\frac{3}{2}, \pi/2\right)$

En los problemas 29-32, encuentre las coordenadas polares de los vértices o vértice de la cónica rotada que se indica.

29. $r = \dfrac{4}{1 + \cos(\theta - \pi/4)}$

30. $r = \dfrac{5}{3 + 2\cos(\theta - \pi/3)}$

31. $r = \dfrac{10}{2 - \operatorname{sen}(\theta + \pi/6)}$

32. $r = \dfrac{6}{1 + 2\operatorname{sen}(\theta + \pi/3)}$

Aplicaciones

33. Un satélite de comunicaciones se encuentra a 12 000 km sobre la Tierra en su apogeo. La excentricidad de su órbita es 0.2. Emplee (7) para determinar la distancia del perigeo.

34. Encuentre una ecuación polar $r = ed/(1 - e\cos\theta)$ de la órbita del satélite en el problema 33.

35. Encuentre una ecuación polar de la órbita de la Tierra alrededor del Sol si $r_p = 1.47 \times 10^8$ km y $r_a = 1.52 \times 10^8$ km.

36. ***a)*** La excentricidad de la órbita elíptica del cometa Halley es 0.97 y la longitud del eje mayor de su órbita corresponde a 3.34×10^9 mi. Determine una ecuación polar de su órbita de la forma $r = ed/(1 - e\cos\theta)$.

b) Utilice la ecuación en el inciso *a)* para obtener r_p y r_a para la órbita del cometa Halley.

Problemas con calculadora/SAC

Las características orbitales (excentricidad, perigeo y eje mayor) de un satélite cercano a la Tierra se degradan de manera gradual a lo largo del tiempo debido a muchas fuerzas pequeñas que actúan sobre el satélite aparte de la fuerza gravitacional de la Tierra. Estas fuerzas incluyen el arrastre atmosférico, atracciones gravitacionales del Sol y la Luna y fuerzas magnéticas. Aproximadamente una vez al mes se activan diminutos cohetes durante unos segundos para "aumentar" las características orbitales de nuevo en el rango deseado. Los cohetes se activan en mayor grado para un cambio mayor en la órbita del satélite. La forma más eficiente en cuanto a combustible para mover de una órbita interna a una externa, lo que se denomina una **transferencia de Hohmann**, consiste en añadir velocidad en la dirección del vuelo en el momento en que el satélite alcanza el perigeo sobre su órbita interior, seguir la elipse de transferencia de Hohmann de medio camino alrededor de su apogeo, y agregar velocidad de nuevo para alcanzar la órbita exterior. Un proceso similar (restar velocidad

en el apogeo en la órbita exterior y restar velocidad en el perigeo en la órbita de transferencia de Hohmann) mueve al satélite de la órbita exterior a la órbita interior.

En los problemas 37-40, emplee una calculadora o un SAC para superponer las gráficas de las tres ecuaciones polares dadas sobre los mismos ejes coordenados. Imprima su resultado y utilice un lápiz de colores para trazar la transferencia de Hohmann.

37. Órbita interior $r = \dfrac{24}{1 + 0.2\cos\theta}$,

transferencia Hohmann $r = \dfrac{32}{1 + 0.6\cos\theta}$,

órbita exterior $r = \dfrac{56}{1 + 0.3\cos\theta}$

38. Órbita interior $r = \dfrac{5.5}{1 + 0.1\cos\theta}$,

transferencia Hohmann $r = \dfrac{7.5}{1 + 0.5\cos\theta}$,

orbita exterior $r = \dfrac{13.5}{1 + 0.1\cos\theta}$

39. Órbita interior $r = 9$,

transferencia Hohmann $r = \dfrac{15.3}{1 + 0.7\cos\theta}$,

orbita exterior $r = 51$

40. Órbita interior $r = \dfrac{73.5}{1 + 0.05\cos\theta}$,

transferencia Hohmann $r = \dfrac{77}{1 + 0.1\cos\theta}$,

órbita exterior $r = \dfrac{84.7}{1 + 0.01\cos\theta}$

En los problemas 41 y 42, utilice una calculadora o SAC para superponer las gráficas de las dos ecuaciones polares dadas sobre los mismos ejes de coordenadas.

41. $r = \dfrac{4}{4 + 3\cos\theta}$; $r = \dfrac{4}{4 + 3\cos(\theta - \pi/3)}$

42. $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}\theta}$; $r = \dfrac{2}{1 - \operatorname{sen}(\theta + 3\pi/4)}$

≡ Piense en ello

43. Muestre que (2) produce ecuaciones de forma estándar de una elipse en el caso $0 < e < 1$ y de una hipérbola en el caso $e > 1$.

44. Emplee la ecuación $r = ed/(1 - e\cos\theta)$ para deducir el resultado en (7).

Revisión del capítulo 10

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-34.

A. Verdadero/Falso

En los problemas 1-26, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. En una parábola, la distancia del vértice al foco es la misma que la distancia del vértice a la directriz. _____

2. El eje menor de una elipse biseca al eje mayor. _____

3. Las asíntotas de $x^2/a^2 - y^2/a^2 = 1$ son perpendiculares. _____

4. Las intersecciones con el eje y de la gráfica $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ son $(0, b)$ y $(0, -b)$. _____

5. El punto $(-2, 5)$ está en la elipse $x^2/8 + y^2/50 = 1$. _____

6. La gráfica de $y = x^2$ y $y^2 - x^2 = 1$ tiene a lo más dos puntos en común. _____

7. Si para todos los valores de θ los puntos $(-r, \theta)$ y $(r, \theta + \pi)$ están en la gráfica de la ecuación polar $r = f(\theta)$, entonces la gráfica es simétrica con respecto al origen. _____

8. La gráfica de la curva $x = t^2$, $y = t^4 + 1$ es la misma que la gráfica de $y = x^2 + 1$. _____

9. La gráfica de la curva $x = t^2 + t - 12$, $y = t^3 - 7t$ cruza al eje y en $(0, 6)$. _____

10. $(3, \pi/6)$ y $(-3, -5\pi/6)$ son coordenadas polares del mismo punto._____

11. Las coordenadas rectangulares de un punto en el plano son únicas._____

12. La gráfica de la curva de la rosa $r = 5\operatorname{sen} 6\theta$ tiene seis "pétalos". _____

13. El punto $(4, 3\pi/2)$ no está en la gráfica de $r = 4\cos 2\theta$, pues sus coordenadas no satisfacen la ecuación. _____

14. La excentricidad de una parábola es $e = 1$. _____

15. El eje transversal de la hipérbola $r = 5/(2 + 3\cos\theta)$ yace a lo largo del eje x. _____

16. La gráfica de la elipse $r = 90/(15 - \operatorname{sen}\theta)$ es casi circular. _____

17. Las coordenadas rectangulares del punto $\left(-\sqrt{2}, 5\pi/4\right)$ en coordenadas polares son $(1, 1)$.

_____

18. La gráfica de la ecuación polar $r = -5\sec\theta$ es una recta. _____

19. El lado final del ángulo θ está siempre en el mismo cuadrante que el punto (r, θ). _____

20. La pendiente de la tangente de la gráfica de $r = e^{\theta}$ en $\theta = \pi/2$ es -1. _____

21. Las gráficas de las cardioides $r = 3 + 3\cos\theta$ y $r = -3 + 3\cos\theta$ son las mismas. _____

22. El área acotada por $r = \cos 2\theta$ es $2\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos^2 2\theta\, d\theta$. _____

23. El área acotada por $r = 2\ \text{sen}\, 3\theta$ es $6\int_0^{\pi/3}\text{sen}^2 3\theta\ d\theta$. _____

24. El área acotada por $r = 1 - 2\cos\theta$ es $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\theta)^2\, d\theta$. _____

25. El área acotada por $r^2 = 36\cos 2\theta$ es $18\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\, d\theta$. _____

26. La coordenada θ de un punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones polares $r = f(\theta)$ y $r = g(\theta)$ debe satisfacer la ecuación $f(\theta) = g(\theta)$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-22, llene los espacios en blanco.

1. $y = 2x^2$, foco ________

2. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{12} = 1$, focos ________

3. $4x^2 + 5(y + 3)^2 = 20$, centro ________

4. $25y^2 - 4x^2 = 100$, asíntotas ________

5. $8(y + 3) = (x - 1)^2$, directriz ________

6. $\dfrac{(x + 1)^2}{36} + \dfrac{(y + 7)^2}{16} = 1$, vértices ________

7. $x = y^2 + 4y - 6$, vértice ________

8. $x^2 - 2y^2 = 18$, longitud del eje conjugado ________

9. $(x - 4)^2 - (y + 1)^2 = 4$, puntos frontera del eje transversal ________

10. $\dfrac{(x - 3)^2}{7} + \dfrac{(y + 3/2)^2}{8} = 1$, ecuación de la recta que contiene al eje mayor ________

11. $25x^2 + y^2 - 200x + 6y + 384 = 0$, centro ________

12. $(x + 1)^2 + (y + 8)^2 = 100$, intersecciones con el eje x ________

13. $y^2 - (x - 2)^2 = 1$, intersecciones con el eje y ________

14. $y^2 - y + 3x = 3$, pendiente de la recta tangente en $(1, 1)$ ________

15. $x = t^3$, $y = 4t^3$, nombre de la gráfica rectangular ________

16. $x = t^2 - 1$, $y = t^3 + t + 1$, intersecciones con el eje y ________

17. $r = -2\cos\theta$, nombre de la gráfica polar ________

18. $r = 2 + \text{sen}\,\theta$, nombre de la gráfica polar ________

19. $r = \text{sen}\, 3\theta$, tangentes a la gráfica en el origen________

20. $r = \dfrac{1}{2 + 5\,\text{sen}\,\theta}$, excentricidad ________

21. $r = \dfrac{10}{1 - \text{sen}\,\theta}$, foco ________ y vértice ________

22. $r = \dfrac{12}{2 + \cos\theta}$, centro ________, foco ________, vértices ________

C. Ejercicios

1. Encuentre una ecuación de la recta que es normal a la gráfica de la curva $x = t - \text{sen}\, t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, en $t = \pi/3$.

2. Determine la longitud de la curva dada en el problema 1.

3. Encuentre los puntos sobre la gráfica de la curva $x = t^2 + 4$, $y = t^3 - 9t^2 + 2$ en los cuales la recta tangente es paralela a $6x + y = 8$.

4. Determine los puntos sobre la gráfica de la curva $x = t^2 + 1$, $y = 2t$ en los cuales la recta tangente pasa por $(1, 5)$.

5. Considere la ecuación rectangular $y^2 = 4x^2(1 - x^2)$.
a) Explique por qué es necesario que $|x| \leq 1$.
b) Si $x = \text{sen}\, t$, entonces $|x| \leq 1$. Encuentre las ecuaciones paramétricas que tengan la misma gráfica que la dada en la ecuación rectangular.
c) Con ecuaciones paramétricas, determine los puntos sobre la gráfica de la ecuación rectangular en la cual la tangente es horizontal.
d) Dibuje la gráfica de la ecuación rectangular.

6. Determine el área de la región que es externa al círculo $r = 4\cos\theta$ e interna a la limacón $r = 3 + \cos\theta$.

7. Encuentre el área de la región que es común al interior del círculo $r = 3\,\text{sen}\,\theta$ y la cardioide $r = 1 + \text{sen}\,\theta$.

8. En coordenadas polares, dibuje la región cuya área A se describe por medio de $A = \int_0^{\pi/2}(25 - 25\,\text{sen}^2\theta)\, d\theta$.

9. Encuentre ***a)*** una ecuación rectangular y ***b)*** una ecuación polar de la recta tangente a la gráfica de $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$ en $\theta = \pi/4$.

10. Determine las coordenadas rectangulares de los vértices de la elipse cuya ecuación polar es $r = 2/(2 - \text{sen}\,\theta)$.

En los problemas 11 y 12, encuentre una ecuación rectangular que tenga la misma gráfica que la ecuación polar dada.

11. $r = \cos\theta + \text{sen}\,\theta$

12. $r = \sec\theta - 5\cos\theta$

En los problemas 13 y 14, encuentre una ecuación polar que tenga la misma gráfica que la ecuación rectangular dada.

13. $2xy = 5$

14. $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2)$

15. Determine una ecuación polar para el conjunto de puntos que son equidistantes del origen (polo) y la recta $r = -\sec\theta$.

16. Encuentre una ecuación polar de la hipérbola con foco en el origen, vértices (en coordenadas rectangulares) $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ y $(0, -4)$ y excentricidad 2.

En los problemas 17 y 18, escriba una ecuación de la gráfica polar dada.

17.

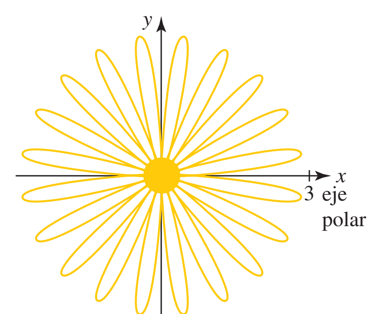


FIGURA 10.R.1 Gráfica del problema 17

18.

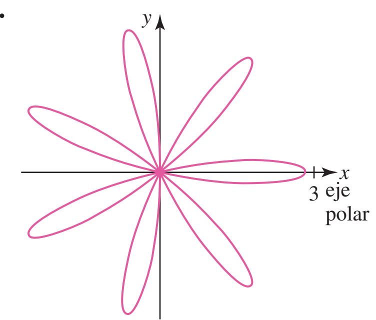


FIGURA 10.R.2 Gráfica del problema 18

19. Determine una ecuación de la hipérbola que tiene asíntotas $3y = 5x$ y $3y = -5x$ y vértices $(0, 10)$ y $(0, -10)$.

20. Encuentre una ecuación rectangular de la recta tangente a la gráfica de $r = 1/(1 + \cos\theta)$ en $\theta = \pi/2$.

21. El folium de Descartes, discutido antes en la sección 3.6, tiene la ecuación rectangular $x^3 + y^3 = 3axy$, donde $a > 0$ es una constante. Emplee la sustitución $y = tx$ para encontrar las ecuaciones paramétricas de la curva. Vea la FIGURA 10.R.3.

22. Emplee las ecuaciones paramétricas que se encontraron en el problema 21 para determinar los puntos sobre el folium de Descartes donde la recta tangente es horizontal. Vea la figura 10.R.3.

23. *a*) Encuentre una ecuación polar para el folium de Descartes en el problema 21.
b) Emplee una ecuación polar para encontrar el área del lazo sombreado en el primer cuadrante en la figura 10.R.3. [*Sugerencia*: Deje que $u = \tan\theta$.]

24. Utilice las ecuaciones paramétricas encontradas en el problema 21 para mostrar que el folium de Descartes tiene la asíntota inclinada $x + y + a = 0$. Es la línea punteada roja de la figura 10.R.3. [*Sugerencia*: Considere lo que pasa a x, y y $x + y$ cuando $r \to -1$.]

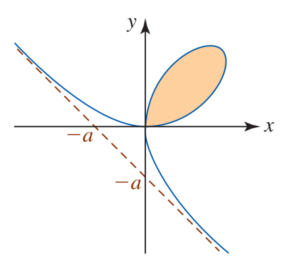


FIGURA 10.R.3 Gráfica de los problemas 21-24

25. La gráfica de $r = 2\ \text{sen}(\theta/3)$ dada en la FIGURA 10.R.4 se asemeja a una limacón con un lazo interior. Determine el área del lazo interior.

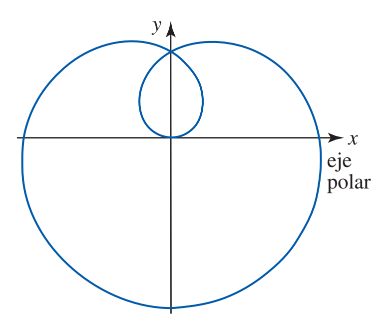


FIGURA 10.R.4 Gráfica del problema 25

26. Encuentre el área de la región sombreada en la FIGURA 10.R.5. Cada círculo tiene un radio igual a 1.

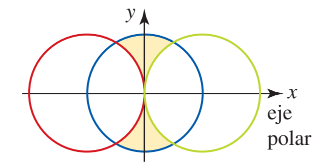


FIGURA 10.R.5 Gráfica del problema 26

En los problemas 27 y 28, la gráfica de la ecuación polar dada se rota en torno al origen en la cantidad indicada.

a) Encuentre una ecuación polar de la nueva gráfica.

b) Encuentre una ecuación rectangular para la nueva gráfica.

27. $r = 2\cos\theta$; en sentido contrario al de las manecillas del reloj, $\pi/4$

28. $r = 1/(1 + \cos\theta)$; en el sentido de las manecillas del reloj, $\pi/6$

29. Un satélite gira alrededor del planeta Júpiter en una órbita elíptica con el centro del planeta en un foco. La longitud del eje mayor de la órbita es 10^9 m y la longitud del eje menor corresponde a 6×10^8 m. Determine la distancia mínima entre el satélite y el centro de Júpiter. ¿Cuál es la distancia máxima?

30. Encuentre el ancho w de cada pétalo de la curva de la rosa $r = \cos 2\theta$. Se muestra un pétalo en la FIGURA 10.R.6.

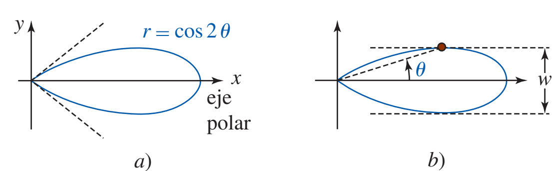
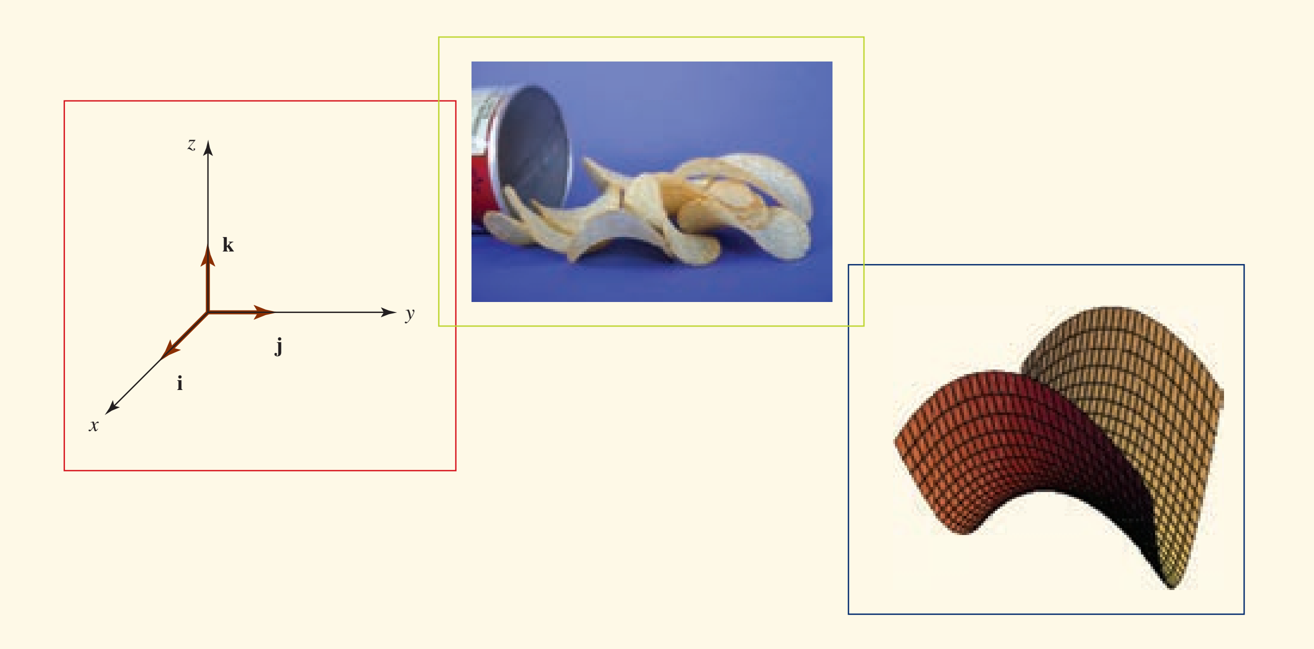


FIGURA 10.R.6 Gráfica del problema 30

Capítulo 11

Vectores y espacio tridimensional



En este capítulo Hasta ahora hemos efectuado la mayoría de los intentos en cálculo en la tierra plana del plano cartesiano bidimensional o espacio 2. En los siguientes capítulos centraremos el interés en examinar la vida matemática en tres dimensiones o espacio 3. Iniciamos el estudio con un examen de los vectores en dos y tres dimensiones.

11.1 Vectores en el espacio bidimensional

Introducción Hasta este punto hemos concentrado el estudio, principalmente, en las funciones de una sola variable cuyas gráficas existen en un plano bidimensional. En esta sección iniciamos el estudio del cálculo de varias variables con una introducción a los vectores en el espacio bidimensional. En secciones y capítulos subsecuentes el enfoque principal será en vectores y funciones definidos en el espacio tridimensional.

Escalares En ciencia, matemáticas e ingeniería se distinguen dos cantidades importantes: *escalares* y *vectores*. Un **escalar** es simplemente un número real y se representa mediante una letra itálica minúscula, a, k o x. Los escalares se usan para representar magnitudes y pueden tener unidades específicas asociadas; por ejemplo, 80 pies o 20 °C.

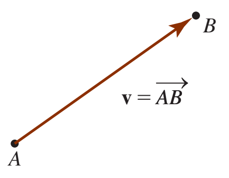


FIGURA 11.1.1 Un vector del punto inicial A al punto final B

Vectores geométricos Por otro lado, un **vector** o **vector de desplazamiento** puede considerarse como una flecha que conecta dos puntos A y B en el espacio. La *cola* de la flecha se llama **punto inicial** y la *punta* de la flecha se denomina **punto final**. Como se muestra en la FIGURA 11.1.1, un vector puede representarse utilizando una letra negrita tal como **v** o, si deseamos enfatizar los puntos inicial y final A y B, utilizamos $\overrightarrow{AB}$ para representar el vector. Ejemplos de cantidades vectoriales mostrados en la FIGURA 11.1.2 son el peso **p**, la velocidad **v** y la fuerza de fricción retardadora $\mathbf{F}_f$.

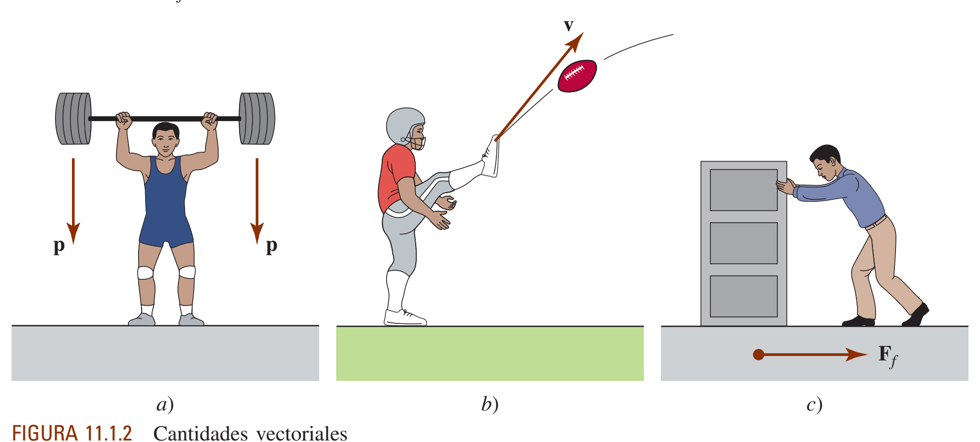
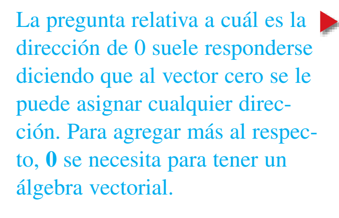


FIGURA 11.1.2 Cantidades vectoriales

Notación y terminología La distancia entre los puntos inicial y final de un vector $\overrightarrow{AB}$ se denomina **longitud**, **magnitud** o **norma** del vector y se denota mediante $|\overrightarrow{AB}|$. Dos vectores que tienen la misma magnitud y la misma dirección se dice que son **iguales**. Así, en la FIGURA 11.1.3 tenemos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. El **negativo** de un vector $\overrightarrow{AB}$, escrito $-\overrightarrow{AB}$, es un vector que tiene la misma magnitud que $\overrightarrow{AB}$ pero la dirección opuesta. Si $k \neq 0$ es un escalar, el **múltiplo escalar** de un vector, $k\overrightarrow{AB}$, es un vector que es $|k|$ veces la longitud de $\overrightarrow{AB}$. Si $k > 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene la misma dirección que el vector $\overrightarrow{AB}$; si $k < 0$, entonces $k\overrightarrow{AB}$ tiene la dirección opuesta a la de $\overrightarrow{AB}$. Cuando $k = 0$, afirmamos que $0\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ es el **vector cero**. Dos vectores son **paralelos** si y sólo si no son múltiplos escalares uno del otro. Vea la FIGURA 11.1.4.


La pregunta relativa a cuál es la dirección de 0 suele responderse diciendo que al vector cero se le puede asignar cualquier dirección. Para agregar más al respecto, **0** se necesita para tener un álgebra vectorial.

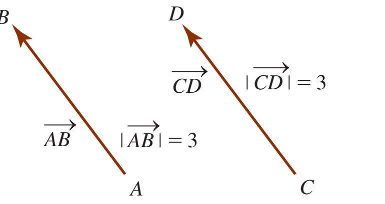


FIGURA 11.1.3 Vectores iguales

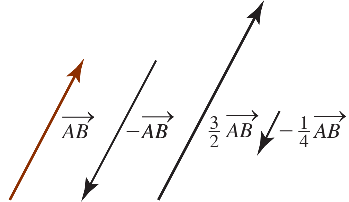


FIGURA 11.1.4 Vectores paralelos

Suma y resta Es posible considerar a dos vectores con el mismo punto inicial común, tal como A en la FIGURA 11.1.5*a*). Así, si vectores no paralelos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados de un paralelogramo en la figura 11.1.5*b*), se dice que el vector que está en la diagonal principal, o $\overrightarrow{AD}$, es la **suma** de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Se escribe

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

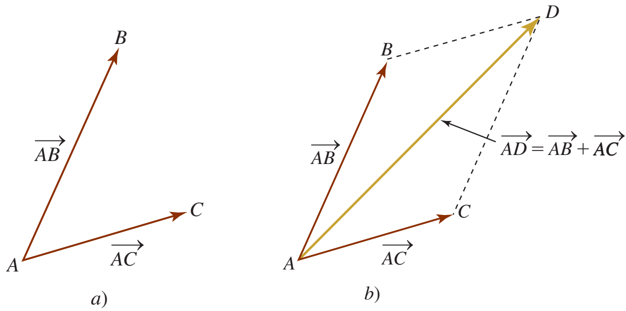


FIGURA 11.1.5 Suma de dos vectores

En ciencia y en ingeniería, si dos vectores representan fuerzas, entonces su suma se denomina la **fuerza resultante**.

La **diferencia** de dos vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ se define mediante

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AC}).$$

Como puede observar en la FIGURA 11.1.6*a*), la diferencia $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ puede interpretarse como la diagonal principal del paralelogramo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $-\overrightarrow{AC}$. Sin embargo, como muestra la figura 11.1.6*b*), la misma diferencia vectorial también puede interpretarse como el tercer lado de un triángulo con lados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. En esta segunda interpretación, observe que la diferencia de vectores $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ apunta hacia el punto final del vector *desde* el cual se está restando el segundo vector. Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, entonces $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 0$.

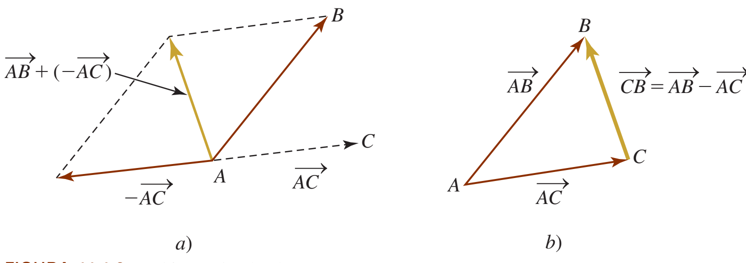


FIGURA 11.1.6 Diferencia de dos vectores

Vectores en un plano de coordenadas Para describir un vector analíticamente, supondremos en el resto de esta sección que los vectores a considerar yacen en un plano de coordenadas bidimensional o **espacio bidimensional**. El vector que se muestra en la FIGURA 11.1.7, cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final es $P(x_1, y_1)$, recibe el nombre de **vector posición** del punto P y se escribe

$$\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1 \rangle.$$

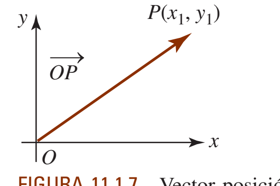


FIGURA 11.1.7 Vector posición

Componentes En general, cualquier vector en el espacio bidimensional puede identificarse con un vector posición único $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$. Los números a_1 y a_2 son las **componentes** del vector posición $\mathbf{a}$.

EJEMPLO 1 Vector posición

El desplazamiento desde el punto inicial $P_1(x, y)$ hasta el punto final $P_2(x + 4, y + 3)$ en la FIGURA 11.1.8*a*) está cuatro unidades a la derecha y tres unidades hacia arriba. Como se ve en la figura 11.1.8*b*), el vector posición de $\mathbf{a} = \langle 4, 3 \rangle$ es equivalente al vector de desplazamiento $\overrightarrow{P_1P_2}$ desde $P_1(x, y)$ hasta $P_2(x + 4, y + 3)$.

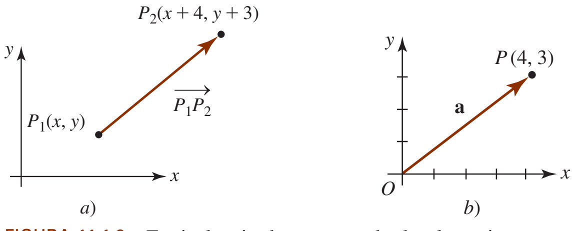


FIGURA 11.1.8 Equivalencia de vectores de desplazamiento y posición ■

Ya hemos definido geométricamente la suma algebraica, la multiplicación escalar y la igualdad de vectores. Ahora daremos las definiciones algebraicas equivalentes utilizando la forma de componentes de vectores.

Definición 11.1.1 Aritmética de componentes

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ vectores en el espacio bidimensional.

i) Adición: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle$ (1)

ii) Multiplicación escalar: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2 \rangle$ (2)

iii) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ (3)

Restas Utilizando (2) definimos el **negativo** del vector **b** mediante

$$-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2 \rangle.$$

Entonces es posible definir la **resta**, o la diferencia, de dos vectores como

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle. \tag{4}$$

En la FIGURA 11.1.9*a*) vemos ilustrada la suma de dos vectores $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$. En la figura 11.1.9*b*) el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$, con punto inicial P_1 y punto final P_2, es la diferencia de los vectores de posición.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle.$$

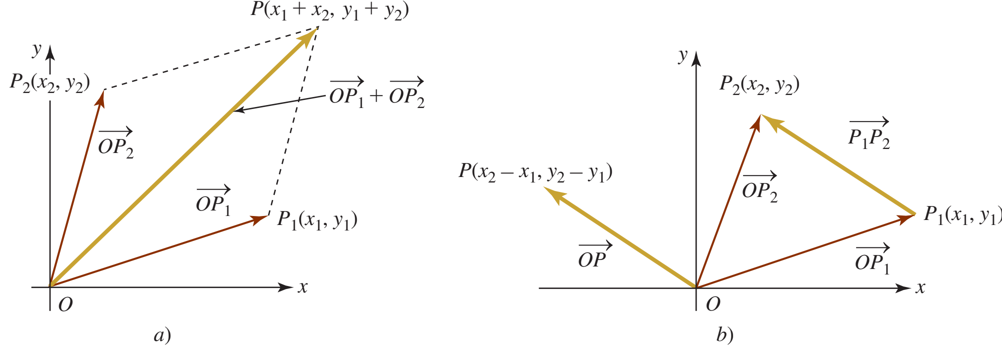


FIGURA 11.1.9 Resta de vectores

Como se muestra en la figura 11.1.9*b*), el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse ya sea a partir del punto final de $\overrightarrow{OP_1}$ y terminar en el punto final de $\overrightarrow{OP_2}$, o como el vector posición $\overrightarrow{OP}$ cuyo punto final tiene las coordenadas $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Recuerde, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{P_1P_2}$ se consideran iguales debido a que tienen la misma magnitud y dirección.

EJEMPLO 2 Suma y diferencia de vectores

Si $\mathbf{a} = \langle 1, 4 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -6, 3 \rangle$, se encuentra que

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, ***b***) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ y ***c***) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$.

Solución Se emplean (1), (2) y (4).

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle 1 + (-6), 4 + 3 \rangle = \langle -5, 7 \rangle$

b) $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \langle 1 - (-6), 4 - 3 \rangle = \langle 7, 1 \rangle$

c) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} = \langle 2, 8 \rangle + \langle -18, 9 \rangle = \langle -16, 17 \rangle$ ■

Propiedades La forma de componentes de un vector puede usarse para verificar cada una de las siguientes propiedades.

Teorema 11.1.1 Propiedades de la aritmética de vectores

i) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ ← ley conmutativa
ii) $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$ ← ley asociativa
iii) $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ ← identidad aditiva
iv) $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ ← inverso aditivo
v) $k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = k\mathbf{a} + k\mathbf{b}$, k un escalar
vi) $(k_1 + k_2)\mathbf{a} = k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{a}$, k_1 y k_2 escalares
vii) $(k_1)(k_2\mathbf{a}) = (k_1k_2)\mathbf{a}$, k_1 y k_2 escalares
viii) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$
ix) $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$

El **vector cero 0** en las propiedades *iii*), *iv*) y *ix*) se define como

$$\mathbf{0} = \langle 0, 0\rangle.$$

Magnitud Con base en el teorema de Pitágoras y la FIGURA 11.1.10, definimos la **magnitud**, **longitud** o **norma** de un vector $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ como

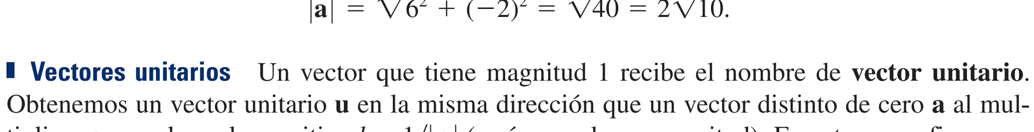
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Claramente, $|\mathbf{a}| \geq 0$ para cualquier vector $\mathbf{a}$, y $|\mathbf{a}| = 0$ si y sólo si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Por ejemplo, si $\mathbf{a} = \langle 6, -2\rangle$, entonces

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

y
a
a_2
x
a_1

FIGURA 11.1.10 Magnitud de un vector



Vectores unitarios Un vector que tiene magnitud 1 recibe el nombre de **vector unitario**. Obtenemos un vector unitario **u** en la misma dirección que un vector distinto de cero **a** al multiplicar **a** por el escalar positivo $k = 1/|\mathbf{a}|$ (recíproco de su magnitud). En este caso afirmamos que $\mathbf{u} = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$ es la **normalización** del vector **a**. La normalización del vector **a** es el vector unitario debido a que

$$|\mathbf{u}| = \left|\frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\right| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1.$$

Nota: A menudo es conveniente escribir el múltiplo escalar $\mathbf{u} = (1/|\mathbf{a}|)\mathbf{a}$ como

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

EJEMPLO 3 Vector unitario

Dado $\mathbf{v} = \langle 2, -1\rangle$, forme un vector unitario

a) en la misma dirección de **v** y ***b***) en la dirección opuesta de **v**.

Solución Primero encontramos la magnitud del vector **v**:

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + (-1)^2} = \sqrt{5}.$$

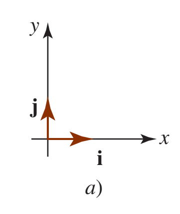
a) Un vector unitario en la misma dirección de **v** es entonces

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}\langle 2, -1\rangle = \left\langle \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right\rangle.$$

b) Un vector unitario en la dirección opuesta de **v** es el negativo de **u**:

$$-\mathbf{u} = \left\langle -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right\rangle.$$ ■

Si **a** y **b** son vectores y c_1 y c_2 son escalares, entonces la expresión $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b}$ se denomina **combinación lineal** de **a** y **b**. Como veremos a continuación, cualquier vector en el espacio bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de dos vectores especiales.



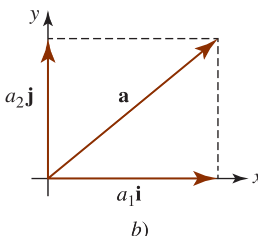


FIGURA 11.1.11 Los vectores **i** y **j** en forma de componentes

Los vectores i, j En vista de (1) y (2), cualquier vector **a** = $\langle a_1, a_2\rangle$ puede escribirse como una suma:

$$\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, 0\rangle + \langle 0, a_2\rangle = a_1\langle 1, 0\rangle + a_2\langle 0, 1\rangle. \quad (5)$$

Los vectores unitarios $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 0, 1\rangle$ suelen darse mediante los símbolos especiales **i** y **j**, respectivamente. Vea la FIGURA 11.1.11*a*). Así, si

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle \quad \text{y} \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle,$$

entonces (5) se vuelve

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}. \quad (6)$$

Puesto que cualquier vector **a** puede escribirse únicamente como una combinación lineal de **i** y **j**, estos vectores unitarios se conocen como la **base estándar** del sistema de vectores bidimensionales. Si $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ es un vector de posición, entonces la figura 11.1.11*b*) muestra que **a** es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$ y $a_2\mathbf{j}$, los cuales tienen el origen como un punto inicial común y yacen, respectivamente, sobre los ejes *x* y *y*. El escalar a_1 se denomina la **componente horizontal** de **a** y el escalar a_2 se llama la **componente vertical** de **a**.

EJEMPLO 4 Varias formas de vectores

a) $\langle 4, 7\rangle = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

b) $(2\mathbf{i} - 5\mathbf{j}) + (8\mathbf{i} + 13\mathbf{j}) = 10\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

c) $|\mathbf{i} + \mathbf{j}| = \sqrt{2}$

d) $10(3\mathbf{i} - \mathbf{j}) = 30\mathbf{i} - 10\mathbf{j}$

e) $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ son paralelos, puesto que **b** es un múltiplo escalar de **a**. En este caso $\mathbf{b} = \frac{3}{2}\mathbf{a}$. ■

EJEMPLO 5 Gráficas de la suma y diferencia

Sea $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$. Grafique los vectores $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ y $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Solución De (1) y (4) tenemos, respectivamente,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = 6\mathbf{i} - 3\mathbf{j}.$$

Las gráficas de estos dos vectores en el plano *xy* están dadas en la FIGURA 11.1.12.

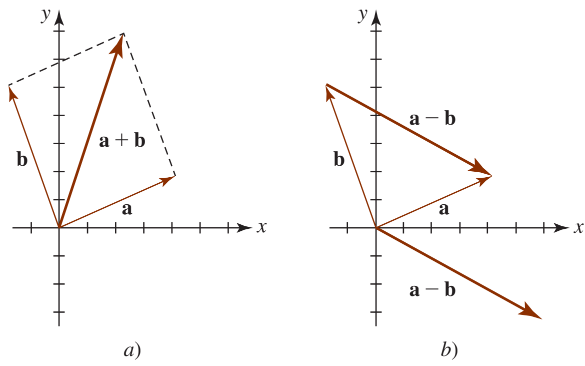


FIGURA 11.1.12 Gráficas de los vectores del ejemplo 5

Ejercicios 11.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-35.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-8, encuentre

a) 3**a**, *b*) **a** + **b**, *c*) **a** − **b**,
d) |**a** + **b**| y *e*) |**a** − **b**|.

1. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

2. $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 3\rangle$

3. $\mathbf{a} = \langle 4, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -5\rangle$

4. $\mathbf{a} = \frac{1}{6}\mathbf{i} - \frac{1}{6}\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{5}{6}\mathbf{j}$

5. $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 7\mathbf{j}$

6. $\mathbf{a} = \langle 1, 3\rangle$, $\mathbf{b} = -5\mathbf{a}$

7. $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} - 9\mathbf{j}$

8. $\mathbf{a} = \langle 7, 10\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2\rangle$

En los problemas 9-14, determine

a) 4**a** − 2**b** y *b*) −3**a** − 5**b**.

9. $\mathbf{a} = \langle 1, -3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1\rangle$

10. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

11. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

12. $\mathbf{a} = \langle 2, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, -3\rangle$

13. $\mathbf{a} = \langle 4, 10\rangle$, $\mathbf{b} = -2\langle 1, 3\rangle$

14. $\mathbf{a} = \langle 3, 1\rangle + \langle -1, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 5\rangle - \langle 1, 2\rangle$

En los problemas 15-18, encuentre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$. Grafique $\overrightarrow{P_1P_2}$ y su correspondiente vector posición.

15. $P_1(3, 2), P_2(5, 7)$ **16.** $P_1(-2, -1), P_2(4, -5)$

17. $P_1(3, 3), P_2(5, 5)$ **18.** $P_1(0, 3), P_2(2, 0)$

19. Encuentre el punto final del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = 4\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ si su punto inicial es $(-3, 10)$.

20. Encuentre el punto inicial del vector $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle -5, -1\rangle$ si su punto final es $(4, 7)$.

21. Determine cuáles de los siguientes vectores son paralelos a $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$.

a) $-4\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$ *b*) $-\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}$

c) $10\mathbf{i} + 15\mathbf{j}$ *d*) $2(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - 3\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{5}{12}\mathbf{j}\right)$

e) $8\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ *f*) $(5\mathbf{i} + \mathbf{j}) - (7\mathbf{i} + 4\mathbf{j})$

22. Determine un escalar c de manera que $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ sean paralelos.

En los problemas 23 y 24, encuentre $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ para los vectores dados.

23. $\mathbf{a} = \langle 5, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle -2, 4\rangle, \mathbf{c} = \langle 3, 10\rangle$

24. $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle, \mathbf{b} = \langle 4, 3\rangle, \mathbf{c} = \langle 0, -2\rangle$

En los problemas 25-28, encuentre un vector unitario

a) en la misma dirección de **a**, y
b) en la dirección opuesta de **a**.

25. $\mathbf{a} = \langle 2, 2\rangle$ **26.** $\mathbf{a} = \langle -3, 4\rangle$

27. $\mathbf{a} = \langle 0, -5\rangle$ **28.** $\mathbf{a} = \langle 1, -\sqrt{3}\rangle$

En los problemas 29 y 30, normalice el vector dado cuando $\mathbf{a} = \langle 2, 8\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 3, 4\rangle$.

29. $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ **30.** $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$

En los problemas 31 y 32, encuentre el vector **b** que es paralelo al vector **a** dado y tiene la magnitud indicada.

31. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 7\mathbf{j}, |\mathbf{b}| = 2$ **32.** $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{2}\mathbf{j}, |\mathbf{b}| = 3$

33. Encuentre un vector en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 4, 10\rangle$ pero de longitud igual a $\frac{3}{4}$.

34. Dado que $\mathbf{a} = \langle 1, 1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle -1, 0\rangle$, encuentre un vector en la misma dirección que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ pero cinco veces su longitud.

En los problemas 35 y 36, emplee la figura dada para dibujar el vector que se indica.

35. $3\mathbf{b} - \mathbf{a}$ **36.** $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

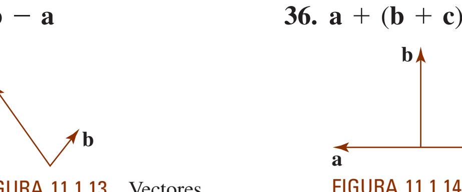


FIGURA 11.1.13 Vectores del problema 35

FIGURA 11.1.14 Vectores del problema 36

En los problemas 37 y 38, exprese el vector **x** en términos de los vectores **a** y **b**.

37. **38.**

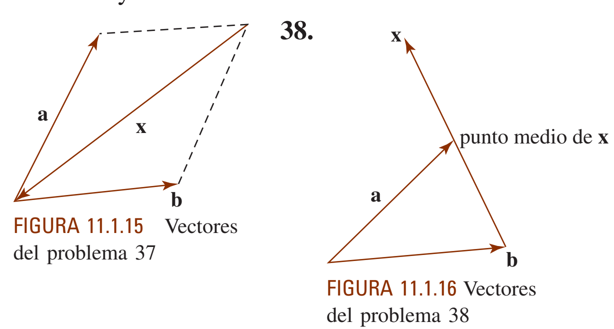


FIGURA 11.1.15 Vectores del problema 37

FIGURA 11.1.16 Vectores del problema 38

En los problemas 39 y 40, emplee la figura dada para demostrar el resultado que se indica.

39. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$



40. $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$

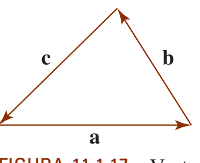


FIGURA 11.1.17 Vectores del problema 39

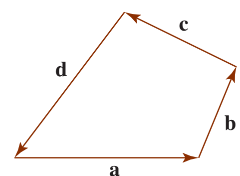


FIGURA 11.1.18 Vectores del problema 40

En los problemas 41 y 42, exprese el vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ como una combinación lineal de los vectores dados **b** y **c**.

41. $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

42. $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}, \mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 7\mathbf{j}$

Se dice que un vector es tangente a una curva en un punto si es paralelo a la recta tangente en el punto. En los problemas 43 y 44, encuentre un vector tangente unitario a la curva dada en el punto que se indica.

43. $y = \frac{1}{4}x^2 + 1; \quad (2, 2)$

44. $y = -x^2 + 3x; \quad (0, 0)$

45. Sean P_1, P_2 y P_3 puntos distintos tales que $\mathbf{a} = \overrightarrow{P_1P_2}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{P_2P_3}$ y $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{P_1P_3}$.

a) ¿Cuál es la relación de $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ con $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?
b) ¿Bajo qué condición es $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$?

☰ Aplicaciones

46. Una carga eléctrica Q se distribuye de manera uniforme a lo largo del eje y entre $y = -a$ y $y = a$. Vea la FIGURA 11.1.19. La fuerza total ejercida sobre la carga q sobre el eje x por la carga Q es $\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j}$, donde

$$F_x = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{L}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}}dy$$

y

$$F_y = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{y}{2a(L^2 + y^2)^{3/2}}dy.$$

Determine **F**.

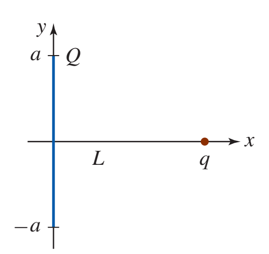


FIGURA 11.1.19 Carga eléctrica del problema 46

47. Al caminar, el pie de una persona golpea el suelo con una fuerza **F** a un ángulo θ desde la vertical. En la FIGURA 11.1.20, el vector **F** se descompone en dos componentes vectoriales $\mathbf{F}_g$, que es paralela al suelo, y $\mathbf{F}_n$, que es perpendicular al suelo. Para que el pie no resbale, la fuerza $\mathbf{F}_g$ debe ser compensada por la fuerza opuesta $\mathbf{F}_f$ de la fricción; esto es, $\mathbf{F}_f = -\mathbf{F}_g$.

***a*)** Utilice el hecho de que $|\mathbf{F}_f| = \mu|\mathbf{F}_n|$, donde el símbolo μ es el coeficiente de fricción, para demostrar que $\tan\theta = \mu$. El pie no resbalará para ángulos menores o iguales que θ.

***b*)** Dado que $\mu = 0.6$ para un tacón de hule que golpea una acera de asfalto, encuentre el ángulo de "no resbalamiento".

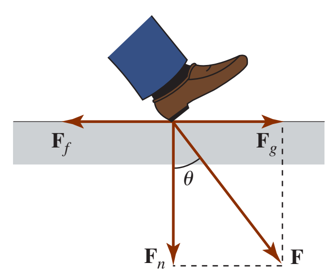


FIGURA 11.1.20 Vectores del problema 47

48. Un semáforo de 200 lb soportado por dos cables cuelga en equilibrio. Como se ilustra en la FIGURA 11.1.21*b*), considere que el peso del semáforo está representado por **w** y las fuerzas en los dos cables por $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. De la figura 11.1.21*c*), se observa que una condición de equilibrio es

$$\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}. \qquad (7)$$

Vea el problema 39. Si

$$\mathbf{w} = -200\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_1 = (|\mathbf{F}_1|\cos 20°)\mathbf{i} + (|\mathbf{F}_1|\operatorname{sen} 20°)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}_2 = -(|\mathbf{F}_2|\cos 15°)\mathbf{i} + (|\mathbf{F}_2|\operatorname{sen} 15°)\mathbf{j},$$

emplee (7) para determinar las magnitudes de $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. [*Sugerencias*: Vuelva a leer *iii*) de la definición 11.1.1.]

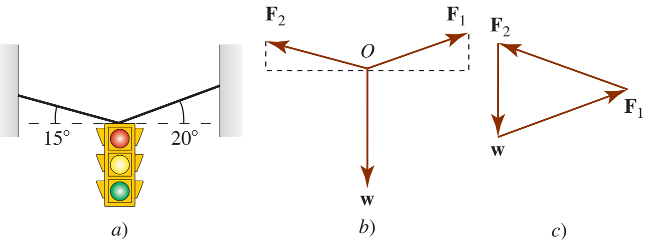


FIGURA 11.1.21 Semáforo en el problema 48

49. El agua que corre por una manguera contra incendios ejerce una fuerza horizontal $\mathbf{F}_1$ de magnitud igual a 200 lb. Vea la FIGURA 11.1.22. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}_3$ que un bombero debe ejercer para sostener la manguera a un ángulo de 45° desde la horizontal?

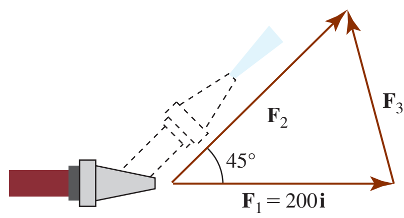


FIGURA 11.1.22 Vectores del problema 49

50. Un avión parte de un aeropuerto ubicado en el origen *O* y vuela a 150 mi en la dirección 20° noreste a la ciudad *A*. De *A* el avión vuela después 200 mi en la dirección 23° noroeste a la ciudad *B*. De *B* el avión vuela 240 mi en la dirección 10° suroeste a la ciudad *C*. Exprese la ubicación de la ciudad *C* como un vector **r** igual al que se presenta en la FIGURA 11.1.23. Determine la distancia de *O* a *C*.

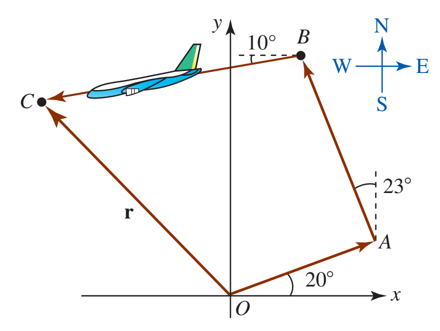


FIGURA 11.1.23 Vectores del problema 50

≡ Piense en ello

51. Mediante vectores, demuestre que las diagonales de un paralelogramo se bisecan entre sí. [*Sugerencia*: Sea *M* el punto medio de una diagonal y *N* el punto medio de la otra.]

52. Empleando vectores, demuestre que el segmento de recta entre los puntos medios de los dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y la mitad de largo.

11.2 Espacio tridimensional y vectores

Introducción En el plano, o espacio bidimensional, una manera de describir la posición de un punto *P* es asignarle coordenadas relativas a dos ejes mutuamente ortogonales denominados ejes *x* y *y*. Si *P* es el punto de intersección de la recta $x = a$ (perpendicular al eje *x*) y la recta $y = b$ (perpendicular al eje *y*), entonces el **par ordenado** (a, b) se dice que son las coordenadas

rectangulares o cartesianas del punto. Vea la FIGURA 11.2.1. En esta sección se extenderá este método de representación al espacio tridimensional y después se considerarán vectores en el espacio tridimensional.

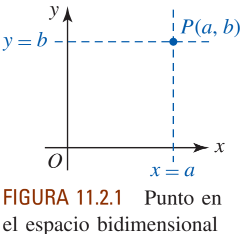


FIGURA 11.2.1 Punto en el espacio bidimensional

Sistema de coordenadas rectangular en el espacio tridimensional En tres dimensiones, o **espacio tridimensional**, se construye un sistema de coordenadas rectangulares utilizando tres ejes mutuamente perpendiculares. El punto en el cual estos ejes se intersecan se denomina **origen** O. Estos ejes, que se muestran en la FIGURA 11.2.2*a*), se marcan de acuerdo con la llamada **regla de la mano derecha**: Si los dedos de la mano derecha, apuntando en la dirección del eje x positivo, se curvan hacia el eje y positivo, el pulgar apuntará entonces en la dirección del nuevo eje perpendicular al plano de los ejes x y y. Este nuevo eje se denomina eje z. Las líneas punteadas en la figura 11.2.2*a*) representan los ejes negativos. Ahora bien, si

Si se intercambian los ejes x y y en la figura 11.2.2*a*), se dice que el sistema de coordenadas es de **mano izquierda**.

$$x = a, \qquad y = b, \qquad z = c$$

son planos perpendiculares a los ejes x, y y z, respectivamente, el punto P en el cual estos planos se intersecan puede representarse mediante una **triada ordenada** de números (a, b, c) que se dice son las **coordenadas rectangulares** o **cartesianas** del punto. Los números a, b y c se denominan, a su vez, las coordenadas x, y y z de $P(a, b, c)$. Vea figura 11.2.2*b*).

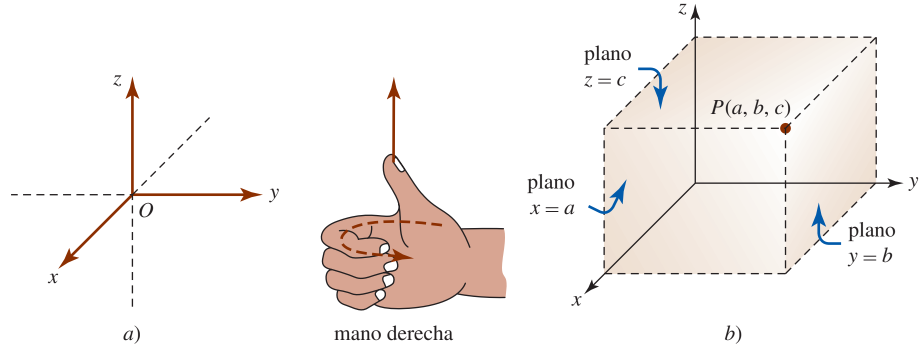


FIGURA 11.2.2 La regla de la mano derecha y un punto en el espacio tridimensional

Octantes Cada par de ejes de coordenadas determina un **plano de coordenadas**. Como se muestra en la FIGURA 11.2.3, los ejes x y y determinan al plano xy, los ejes x y z determinan al plano xz, etcétera. Los planos de coordenadas dividen el espacio tridimensional en ocho partes conocidas como **octantes**. El octante en el cual las tres coordenadas de un punto son *positivas* se denomina **primer octante**. No hay un acuerdo para nombrar a los otros siete octantes.

La siguiente tabla resume las coordenadas de un punto sobre un eje de coordenadas o en un plano de coordenadas. Como se ve en la tabla, también es posible describir, digamos, el plano xy mediante una simple ecuación $z = 0$. De manera similar, el plano xz es $y = 0$ y el plano yz es $x = 0$.

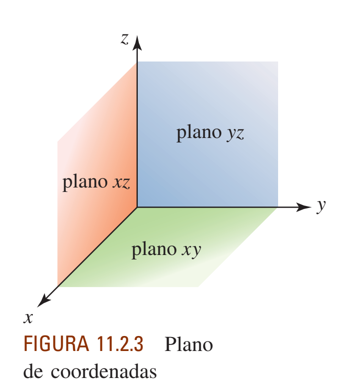


FIGURA 11.2.3 Plano de coordenadas

Ejes	Coordenadas	Plano	Coordenadas
x	$(a, 0, 0)$	xy	$(a, b, 0)$
y	$(0, b, 0)$	xz	$(a, 0, c)$
z	$(0, 0, c)$	yz	$(0, b, c)$

EJEMPLO 1 Graficación de puntos en el espacio tridimensional

Grafique los puntos $(4, 5, 6)$, $(3, -3, -1)$ y $(-2, -2, 0)$.

Solución De los tres puntos que se muestran en la FIGURA 11.2.4, sólo $(4, 5, 6)$ está en el primer octante. El punto $(-2, -2, 0)$ está en el plano xy.

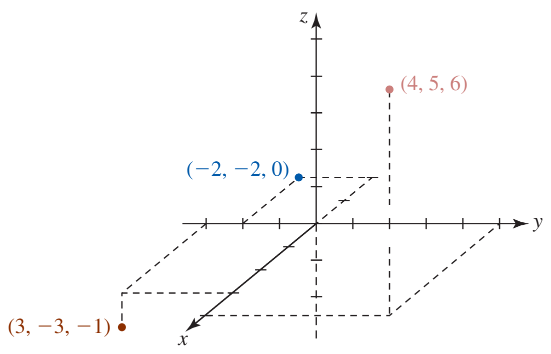


FIGURA 11.2.4 Puntos del ejemplo 1

Fórmula de la distancia Para determinar la **distancia** entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en el espacio tridimensional, vamos a considerar sus proyecciones sobre el plano xy. Como puede observar en la FIGURA 11.2.5, la distancia entre $(x_1, y_1, 0)$ y $(x_2, y_2, 0)$ sigue de la fórmula usual de la distancia en el plano y es $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. En consecuencia, del teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo $P_1P_3P_2$ tenemos

$$[d(P_1, P_2)]^2 = \left[\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right]^2 + |z_2 - z_1|^2$$

o

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{1}$$

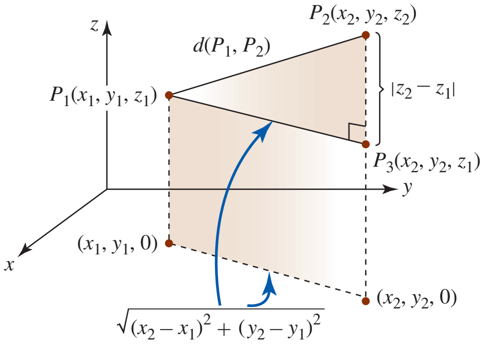


FIGURA 11.2.5 Distancia entre dos puntos en el espacio tridimensional

EJEMPLO 2 Distancia entre puntos en el espacio tridimensional

Encuentre la distancia entre $(2, -3, 6)$ y $(-1, -7, 4)$.

Solución De (1),

$$d = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (-3 - (-7))^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{29}.$$

Fórmula del punto medio Es posible utilizar la fórmula de la distancia para mostrar que las coordenadas del **punto medio del segmento de recta** en el espacio tridimensional que conecta los distintos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right). \tag{2}$$

Vea el problema 64 en los ejercicios 11.2.

EJEMPLO 3 Punto medio en el espacio tridimensional

Determine las coordenadas de punto medio del segmento de recta entre los dos puntos del ejemplo 2.

Solución De (2) obtenemos

$$\left(\frac{2 + (-1)}{2}, \frac{-3 + (-7)}{2}, \frac{6 + 4}{2}\right) \quad \text{o} \quad \left(\frac{1}{2}, -5, 5\right).$$

Vectores en el espacio tridimensional Un **vector a** en el espacio tridimensional es cualquier triada ordenada de números reales

$$\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,$$

donde a_1, a_2 y a_3 son las **componentes** del vector. El **vector posición** de un punto $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en el espacio tridimensional es el vector $\overrightarrow{OP} = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$, cuyo punto inicial es el origen O y cuyo punto final es P. Vea la FIGURA 11.2.6.

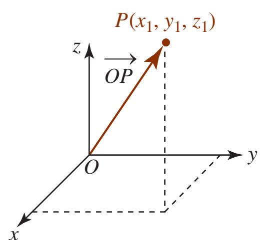


FIGURA 11.2.6 Un vector en el espacio tridimensional

Las definiciones de componentes de la adición, sustracción y multiplicación por un escalar, etc., son generalizaciones naturales de las que se dieron para vectores en el espacio bidimensional.

Definición 11.2.1 Aritmética de componentes

Sean $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ vectores en el espacio tridimensional.

i) Suma: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
ii) Multiplicación escalar: $k\mathbf{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
iii) Igualdad: $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ si y sólo si $a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$
iv) Negativo: $-\mathbf{b} = (-1)\mathbf{b} = \langle -b_1, -b_2, -b_3 \rangle$
v) Resta: $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$
vi) Vector cero: $\mathbf{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$
vii) Magnitud: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Si $\overrightarrow{OP_1}$ y $\overrightarrow{OP_2}$ son los vectores de posición de los puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, entonces el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ está dado por

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle. \tag{3}$$

Como en el espacio bidimensional, $\overrightarrow{P_1P_2}$ puede dibujarse ya sea como un vector cuyo punto inicial es P_1 y cuyo punto final es P_2, o como un vector posición $\overrightarrow{OP}$ con punto final $P = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Vea la FIGURA 11.2.7.

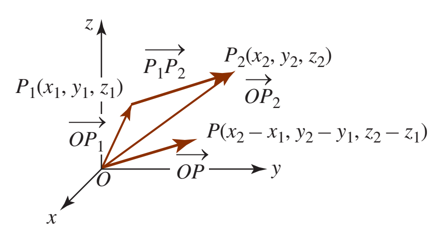


FIGURA 11.2.7 Un vector que conecta dos puntos en el espacio tridimensional

EJEMPLO 4 Vectores entre dos puntos

Determine el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ si los puntos P_1 y P_2 están dados por $P_1 = (4, 6, -2)$ y $P_2 = (1, 8, 3)$.

Solución Si los vectores de posición de los puntos son $\overrightarrow{OP_1} = \langle 4, 6, -2 \rangle$ y $\overrightarrow{OP_2} = (1, 8, 3)$, entonces de (3) tenemos

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \langle 1 - 4, 8 - 6, 3 - (-2) \rangle = \langle -3, 2, 5 \rangle.$$ ■

EJEMPLO 5 Vector unitario

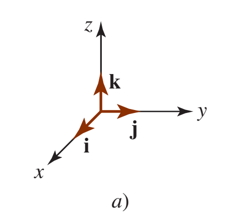
Encuentre un vector unitario en la dirección de $\mathbf{a} = \langle -2, 3, 6 \rangle$.

Solución Puesto que un vector unitario tiene longitud 1, primero encontramos la magnitud de **a** y después se usa el hecho de que $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ es un vector unitario en la dirección de **a**. La magnitud de **a** es

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7.$$

El vector unitario en la dirección de **a** es

$$\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{7}\langle -2, 3, 6 \rangle = \left\langle -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right\rangle.$$ ■



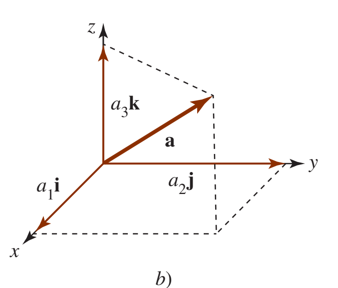


FIGURA 11.2.8 Empleo de los vectores **i, j, k** para representar un vector de posición **a**

Los vectores i, j, k En la sección precedente se mencionó que el conjunto de dos vectores unitarios $\mathbf{i} = \langle 1, 0\rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1\rangle$ constituye una base para el sistema de vectores bidimensionales. Esto es, cualquier vector **a** en el espacio bidimensional puede escribirse como una combinación lineal de **i** y **j**: $a = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$. De igual manera, cualquier vector $a = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ en el espacio tridimensional se puede expresar como una combinación lineal de los vectores unitarios

$$\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle, \quad \mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle, \quad \mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle.$$

Para ver esto usamos *i*) y *ii*) de la definición 11.2.1 para escribir

$$\begin{aligned}\langle a_1, a_2, a_3\rangle &= \langle a_1, 0, 0\rangle + \langle 0, a_2, 0\rangle + \langle 0, 0, a_3\rangle\\ &= a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle,\end{aligned}$$

esto es,

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}.$$

Los vectores **i, j y k** ilustrados en la FIGURA 11.2.8*a*) se llaman la **base estándar** del sistema de vectores tridimensionales. En la figura 11.2.8*b*) observamos que un vector posición $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ es la suma de los vectores $a_1\mathbf{i}$, $a_2\mathbf{j}$ y $a_3\mathbf{k}$, los cuales yacen a lo largo de los ejes de coordenadas y tienen el origen como un punto inicial común.

EJEMPLO 6 Empleo de los vectores **i, j, k**

El vector $\mathbf{a} = \langle 7, -5, 13\rangle$ es el mismo que $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 13\mathbf{k}$. ■

Cuando se toma en consideración la tercera dimensión, cualquier vector en el plano *xy* se describe de manera equivalente como un vector tridimensional que yace en el plano de coordenadas $z = 0$. Si bien los vectores $\langle a_1, a_2\rangle$ y $\langle a_1, a_2, 0\rangle$ técnicamente no son iguales, se ignorará la distinción. Ésta es la razón, por ejemplo, por la que se denotan $\langle 1, 0\rangle$ y $\langle 1, 0, 0\rangle$ mediante el mismo símbolo **i**. Un vector ya sea en el plano *yz* o en el plano *xz* también debe tener una componente cero. En el plano *yz* el vector $\mathbf{b} = \langle 0, b_2, b_3\rangle$ se escribe como $\mathbf{b} = b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

EJEMPLO 7 Vectores en los planos de coordenadas

a) El vector $\mathbf{a} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{k} = 5\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ yace en el plano *xz* y también puede escribirse como $\mathbf{a} = \langle 5, 0, 3\rangle$.

b) $|5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}| = \sqrt{5^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$ ■

EJEMPLO 8 Combinación de vectores

Si $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, encuentre $5\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

Solución Al escribir $5\mathbf{a} = 15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}$ y $2\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k}$ obtenemos

$$\begin{aligned}5\mathbf{a} - 2\mathbf{b} &= (15\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 40\mathbf{k}) - (2\mathbf{i} + 0\mathbf{j} - 8\mathbf{k})\\ &= 13\mathbf{i} - 20\mathbf{j} + 48\mathbf{k}.\end{aligned}$$ ■

Ejercicios 11.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-35.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique el punto dado. Utilice los mismos ejes de coordenadas.

1. (1, 1, 5)
2. (0, 0, 4)
3. (3, 4, 0)
4. (6, 0, 0)
5. (6, −2, 0)
6. (5, −4, 3)

En los problemas 7-10, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfagan la condición dada.

7. $z = 5$
8. $x = 1$
9. $x = 2, y = 3$
10. $x = 4, y = -1, z = 7$

11. Proporcione las coordenadas de los vértices del paralelepípedo rectangular cuyos lados son los planos de coordenadas y los planos $x = 2$, $y = 5$, $z = 8$.

12. En la FIGURA 11.2.9 se muestran dos vértices de un paralelepípedo rectangular que tiene lados paralelos a los planos de coordenadas. Determine las coordenadas de los restantes seis vértices.

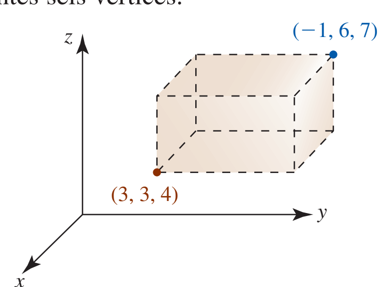


FIGURA 11.2.9 Paralelepípedo del problema 12

13. Considere el punto $P(-2, 5, 4)$.

a) Si las líneas se dibujan desde P perpendicular a los planos coordenados, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de cada perpendicular?

b) Si se dibuja una línea desde P al plano $z = -2$, ¿cuáles son las coordenadas del punto en la base de la perpendicular?

c) Determine el punto en el plano $x = 3$ que es más cercano a P.

14. Determine una ecuación de un plano paralelo a un plano de coordenadas que contenga el par de puntos indicado.

a) $(3, 4, -5), (-2, 8, -5)$

b) $(1, -1, 1), (1, -1, -1)$

c) $(-2, 1, 2), (2, 4, 2)$

En los problemas 15-20, describa el conjunto de puntos $P(x, y, z)$ en el espacio tridimensional cuyas coordenadas satisfagan la ecuación dada.

15. $xyz = 0$ **16.** $x^2 + y^2 + z^2 = 0$

17. $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 0$

18. $(x - 2)(z - 8) = 0$

19. $z^2 - 25 = 0$ **20.** $x = y = z$

En los problemas 21 y 22, encuentre la distancia entre los puntos indicados.

21. $(3, -1, 2), (6, 4, 8)$ **22.** $(-1, -3, 5), (0, 4, 3)$

23. Determine la distancia del punto $(7, -3, -4)$ a

a) el plano yz y ***b***) el eje x.

24. Determine la distancia desde el punto $(-6, 2, -3)$ hasta

a) el plano xz y ***b***) el origen.

En los problemas 25-28, los tres puntos dados forman un triángulo. Determine cuáles triángulos son isósceles y cuáles son triángulos rectos.

25. $(0, 0, 0), (3, 6, -6), (2, 1, 2)$

26. $(0, 0, 0), (1, 2, 4), \left(3, 2, 2\sqrt{2}\right)$

27. $(1, 2, 3), (4, 1, 3), (4, 6, 4)$

28. $(1, 1, -1), (1, 1, 1), (0, -1, 1)$

En los problemas 29-32, utilice la fórmula de la distancia para determinar si los puntos dados son colineales.

29. $P_1(1, 2, 0), P_2(-2, -2, -3), P_3(7, 10, 6)$

30. $P_1(1, 2, -1), P_2(0, 3, 2), P_3(1, 1, -3)$

31. $P_1(1, 0, 4), P_2(-4, -3, 5), P_3(-7, -4, 8)$

32. $P_1(2, 3, 2), P_2(1, 4, 4), P_3(5, 0, -4)$

En los problemas 33 y 34, resuelva para la incógnita.

33. $P_1(x, 2, 3), P_2(2, 1, 1);\quad d(P_1, P_2) = \sqrt{21}$

34. $P_1(x, x, 1), P_2(0, 3, 5);\quad d(P_1, P_2) = 5$

En los problemas 35 y 36, encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta entre los puntos indicados.

35. $\left(1, 3, \frac{1}{2}\right), \left(7, -2, \frac{5}{2}\right)$ **36.** $(0, 5, -8), (4, 1, -6)$

37. Las coordenadas del punto medio del segmento de recta entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(2, 3, 6)$ son $(-1, -4, 8)$. Encuentre las coordenadas de P_1.

38. Sea P_3 el punto medio del segmento de recta entre $P_1(-3, 4, 1)$ y $P_2(-5, 8, 3)$. Encuentre las coordenadas del punto medio del segmento de recta.

a) entre P_1 y P_3 y ***b***) entre P_3 y P_2.

En los problemas 39-42, exprese el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ en forma de componentes.

39. $P_1(3, 4, 5), P_2(0, -2, 6)$ **40.** $P_1(-2, 4, 0), P_2\left(6, \frac{3}{4}, 8\right)$

41. $P_1(0, -1, 0), P_2(2, 0, 1)$ **42.** $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5\right), P_2\left(-\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}, 12\right)$

En los problemas 43-46, dibuje el vector dado.

43. $\langle -3, 5, -2\rangle$ **44.** $\langle 2, 0, 4\rangle$

45. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ **46.** $-4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los problemas 47-50, determine el eje o plano en el cual yace el vector dado.

47. $\langle 7, -3, 0\rangle$ **48.** $\langle 0, 2, 0\rangle$

49. $4\mathbf{k}$ **50.** $-2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 51-58, $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 2\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 2, 6, 9\rangle$. Encuentre el vector o escalar indicado.

51. $\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ **52.** $2\mathbf{a} - (\mathbf{b} - \mathbf{c})$

53. $\mathbf{b} + 2(\mathbf{a} - 3\mathbf{c})$ **54.** $4(\mathbf{a} + 2\mathbf{c}) - 6\mathbf{b}$

55. $|\mathbf{a} + \mathbf{c}|$ **56.** $|\mathbf{c}||2\mathbf{b}|$

57. $\left|\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right| + 5\left|\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right|$ **58.** $|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}$

59. Determine un vector unitario en la dirección opuesta de $\mathbf{a} = \langle 10, -5, 10\rangle$.

60. Encuentre un vector unitario en la misma dirección que $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

61. Encuentre el vector $\mathbf{b}$ que es cuatro veces la longitud de $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ en la misma dirección que $\mathbf{a}$.

62. Encuentre el vector $\mathbf{b}$ para el cual $|\mathbf{b}| = \frac{1}{2}$ que es paralelo a $\mathbf{a} = \langle -6, 3, -2\rangle$ pero tiene la dirección opuesta.

≡ Piense en ello

63. Mediante los vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ que se muestran en la FIGURA 11.2.10, dibuje el "vector promedio" $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

FIGURA 11.2.10 Vectores del problema 63

64. Emplee la fórmula de la distancia para demostrar que

$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

es el punto medio del segmento de recta entre $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$. [*Sugerencia*: Demuestre que

$$d(P_1, M) = d(M, P_2) \text{ y } d(P_1, P_2) = d(P_1, M) + d(M, P_2).]$$

Proyectos

65. Como se ilustra en la FIGURA 11.2.11*a*), una nave espacial puede efectuar rotaciones denominadas **declive**, **balanceo** y **desvío del eje** alrededor de tres ejes distintos. Para descubrir las coordenadas de un punto P se recurre a dos sistemas de coordenadas: un sistema de coordenada cartesiano fijo y tridimensional en el cual las coordenadas de P son (x, y, z) y un sistema de coordenada de la nave espacial que se mueve con la rotación particular. En la figura 11.2.11*b*) se ha ilustrado un desvió del eje (esto es, una rotación alrededor del eje z, que es perpendicular al plano de la página). Cuando la nave espacial efectúa un declive, balanceo y desvío del eje *en secuencia* a través de los ángulos α, β y γ, respectivamente, las coordenadas finales del punto P en el sistema de la nave espacial (x_S, y_S, z_S) se obtienen a partir de la secuencia de transformaciones:

$$\begin{aligned} x_P &= x & x_R &= x_P \cos\beta - z_P \operatorname{sen}\beta \\ y_P &= y\cos\alpha + z\operatorname{sen}\alpha & y_R &= y_P \\ z_P &= -y\operatorname{sen}\alpha + z\cos\alpha, & z_R &= x_P\operatorname{sen}\beta + z_P\cos\beta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_S &= x_R\cos\gamma + y_R\operatorname{sen}\gamma \\ y_S &= -x_R\operatorname{sen}\gamma + y_R\cos\gamma \\ z_S &= z_R. \end{aligned}$$

Suponga que las coordenadas de un punto son (1, 1, 1) en el sistema de coordenadas fijo. Determine las coordenadas del punto en el sistema de la nave espacial si ésta efectúa un declive, balanceo y desvío del eje en secuencia a través de los ángulos $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$.

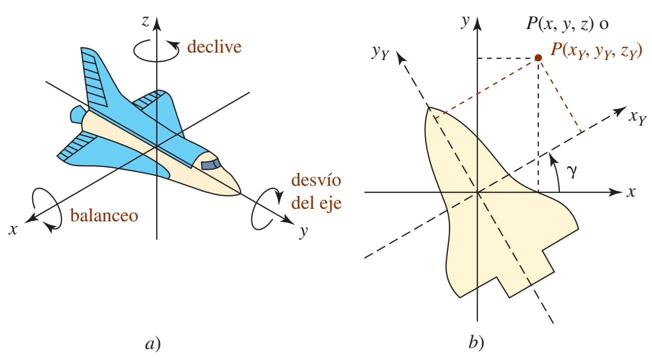


FIGURA 11.2.11 Nave espacial del problema 65

66. *(Para trabajar este problema, debe aprender acerca, o estar familiarizado, con la multiplicación de matrices.)*

a) Cada sistema de ecuaciones en el problema 65 puede escribirse como una ecuación matricial. Por ejemplo, el último sistema es

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \mathbf{M}_Y \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{M}_Y = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \operatorname{sen}\gamma & 0 \\ -\operatorname{sen}\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Identifique las matrices $\mathbf{M}_P$ y $\mathbf{M}_R$ y escriba los primeros dos sistemas como

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} = \mathbf{M}_P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} x_R \\ y_R \\ z_R \end{bmatrix} = \mathbf{M}_R \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}.$$

b) Verifique que las coordenadas finales (x_S, y_S, z_S) en el sistema de la nave espacial después del declive, balanceo y desvío del eje se obtienen de

$$\begin{bmatrix} x_S \\ y_S \\ z_S \end{bmatrix} = \mathbf{M}_Y \mathbf{M}_R \mathbf{M}_P \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

c) Con $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ y $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 60°$, efectúe la multiplicación de matrices indicada en el inciso *b*) y verifique que su respuesta es la misma que en el problema 65.

11.3 Producto punto

Introducción En ésta y en la siguiente sección consideraremos dos tipos de productos entre vectores que se originaron en el estudio de la mecánica, la electricidad y el magnetismo. El primero de estos productos, conocido como **producto punto**, se estudia en esta sección.

Forma de componentes del producto punto El producto punto, definido a continuación, se conoce también como **producto interior** o **producto escalar**. El producto punto de dos vectores **a** y **b** se denota mediante **a** · **b** y es un número real, o escalar, definido en términos de las componentes de los vectores.

Definición 11.3.1 Producto punto de dos vectores

En el espacio bidimensional el **producto punto** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2\rangle$ es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2. \tag{1}$$

En el espacio tridimensional el **producto punto** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ es

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Productos punto utilizando (2)

Si $\mathbf{a} = 10\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, entonces se deduce de (2) que

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (10)\left(-\frac{1}{2}\right) + (2)(4) + (-6)(-3) = 21.$$ ■

EJEMPLO 2 Productos punto de los vectores de la base

Puesto que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$, vemos de (2) que

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{j} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = 0. \tag{3}$$

De manera similar, por (2)

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = 1 \quad \text{y} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1. \tag{4}$$ ■

Propiedades El producto punto posee las siguientes propiedades.

Teorema 11.3.1 Propiedades del producto punto

i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ ← ley conmutativa
iii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ ← ley distributiva
iv) $\mathbf{a}\cdot(k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = k(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, k un escalar
v) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} \geq 0$
vi) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

DEMOSTRACIÓN Se prueban los incisos *iii*) y *vi*). Las demás pruebas se dejan al estudiante. Vea el problema 53 en los ejercicios 11.3. Para probar el inciso *iii*) se deja $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle\cdot(\langle b_1, b_2, b_3\rangle + \langle c_1, c_2, c_3\rangle)\\ &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle\cdot\langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3\rangle\\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)\\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3\\ &= (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)\\ &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{c}.\end{aligned}$$

← puesto que la multiplicación de números reales es distributiva respecto a la adición

Para demostrar el inciso *vi*) notamos que

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle\cdot\langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\mathbf{a}|^2.$$ ■

Forma alterna También puede expresarse el producto punto de dos vectores en términos de las longitudes de los vectores y del ángulo entre ellos.

Esta forma más geométrica es la que se usa por lo general como la definición del producto punto en un curso de física.

Teorema 11.3.2 Forma alterna del producto punto

El producto punto de dos vectores **a** y **b** es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores tal que $0 \le \theta \le \pi$.

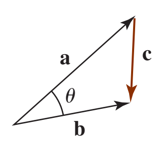


FIGURA 11.3.1 El vector **c** en la prueba del teorema 11.3.2

DEMOSTRACIÓN Suponga que θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$. Entonces el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1 - a_1)\mathbf{i} + (b_2 - a_2)\mathbf{j} + (b_3 - a_3)\mathbf{k}$$

es el tercer lado del triángulo en la FIGURA 11.3.1. Por la ley de los cosenos podemos escribir

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta \quad \text{o} \quad |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = \tfrac{1}{2}(|\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{c}|^2). \tag{6}$$

Al emplear $|\mathbf{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2, \quad |\mathbf{b}|^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2,$

y $|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2,$

se simplifica el lado derecho de la ecuación en (6) a $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Puesto que ésta es la definición del producto punto, se observa que $|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos\theta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. ■

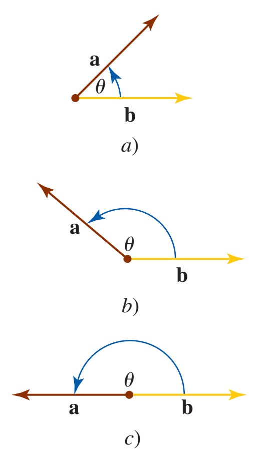


FIGURA 11.3.2 El ángulo θ en el producto punto

Ángulo entre vectores La FIGURA 11.3.2 ilustra tres casos del ángulo θ en (5). Si los vectores **a** y **b** son paralelos, entonces θ es el *más pequeño* de los dos ángulos posibles entre ellos. Al resolver para $\cos\theta$ en (5) y utilizando después la definición del producto punto en (2) tenemos una fórmula para el coseno del ángulo entre los dos vectores:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \tag{7}$$

EJEMPLO 3 Ángulo entre dos vectores

Determine el ángulo entre $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Solución Tenemos $|\mathbf{a}| = \sqrt{14}$, $|\mathbf{b}| = \sqrt{27}$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 14$. En consecuencia, (7) produce

$$\cos\theta = \frac{14}{\sqrt{14}\sqrt{27}} = \frac{1}{9}\sqrt{42},$$

y por ello $\theta = \cos^{-1}\left(\sqrt{42}/9\right) \approx 0.77$ radianes o $\theta \approx 44.9°$. ■

Vectores ortogonales Si **a** y **b** son vectores distintos de cero, entonces el teorema 11.3.2 implica que

i) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ si y sólo si θ es agudo,
ii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ si y sólo si θ es obtuso y
iii) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ si y sólo si $\cos\theta = 0$.

Las palabras *ortogonal* y *perpendicular* se usan indistintamente. Como regla general se usará *ortogonal* al referirse a vectores y *perpendicular* cuando se involucre a una recta o a un plano.

Sin embargo, en el último caso el único número en $[0, 2\pi]$ para el cual $\cos\theta = 0$ es $\theta = \pi/2$. Cuando $\theta = \pi/2$, se dice que los vectores son **ortogonales** o **perpendiculares**. Así, se llega al siguiente resultado.

Teorema 11.3.3 Criterio para vectores ortogonales

Dos vectores distintos de cero **a** y **b** son ortogonales si y sólo si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Puesto que $\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = 0$ para todo vector **b**, el vector cero se considera ortogonal a todo vector.

EJEMPLO 4 Vectores ortogonales

Si $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-3)(2) + (-1)(14) + (4)(5) = 0.$$

Del teorema 11.3.3 concluimos que **a** y **b** son ortogonales. ■

Cosenos directores Para un vector distinto de cero $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en el espacio tridimensional, los ángulos α, β y γ entre **a** y los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, respectivamente, reciben el nombre de **ángulos directores** de **a**. Vea la FIGURA 11.3.3. Ahora bien, por (7),

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}||\mathbf{i}|}, \quad \cos\beta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{a}||\mathbf{j}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{a}||\mathbf{k}|},$$

la cual se simplifica en

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}.$$

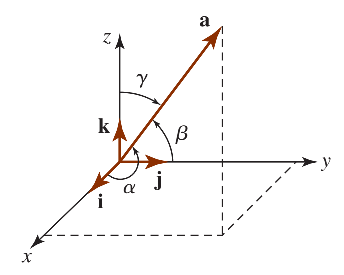


FIGURA 11.3.3 Los ángulos directores de un vector

Afirmamos que $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, son los **cosenos directores** de **a**. Los cosenos directores de un vector distinto de cero **a** son simplemente las componentes del vector unitario $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} &= \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{i} + \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}\mathbf{j} + \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}\mathbf{k} \\ &= (\cos\alpha)\mathbf{i} + (\cos\beta)\mathbf{j} + (\cos\gamma)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Puesto que la magnitud de $\mathbf{a}/|\mathbf{a}|$ es 1, se sigue de la última ecuación que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$



EJEMPLO 5 Cosenos directores y ángulos directores

Determine los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.

Solución De $|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, observamos que los cosenos directores son

$$\cos\alpha = \frac{2}{3\sqrt{5}}, \quad \cos\beta = \frac{5}{3\sqrt{5}}, \quad \cos\gamma = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

Los ángulos directores son

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{5}}\right) \approx 1.27 \text{ radianes} \quad \text{o} \quad \alpha \approx 72.7°$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{5}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.73 \text{ radián} \quad \text{o} \quad \beta \approx 41.8°$$

y

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{4}{3\sqrt{5}}\right) \approx 0.93 \text{ radián} \quad \text{o} \quad \gamma \approx 53.4°.$$

■

Observe en el ejemplo 5 que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4}{45} + \frac{25}{45} + \frac{16}{45} = 1.$$

Componentes de a sobre b Utilizando la ley distributiva junto con (3) y (4) es posible usar las componentes de un vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ en términos del producto punto:

$$a_1 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad a_2 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad a_3 = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{8}$$

De manera simbólica, se escriben las componentes de **a** como

$$\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}, \quad \text{comp}_{\mathbf{j}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{j}, \quad \text{comp}_{\mathbf{k}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{k}. \tag{9}$$

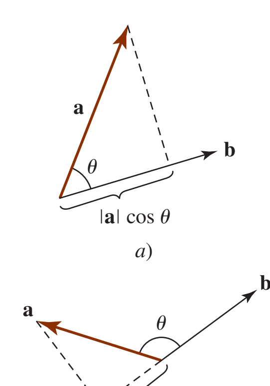


FIGURA 11.3.4 Componente de un vector **a** sobre un vector **b**

A continuación se verá que el procedimiento indicado en (9) continúa para determinar la **componente de un vector a sobre un vector b**. Advierta que en cualquiera de los dos casos que se ilustran en la FIGURA 11.3.4,

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cos\theta. \tag{10}$$

En la figura 11.3.4*b*), $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} < 0$, puesto que $\pi/2 < \theta \leq \pi$. En este caso, al escribir (10) como

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \frac{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

observamos que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right). \tag{11}$$

En otras palabras:

- Para encontrar la componente de un vector **a** sobre un vector **b**, se multiplica **a** con un vector unitario en la dirección de **b**.

EJEMPLO 6 Componente de un vector sobre otro

Sean $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determine

a) $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ y ***b***) $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

Solución

a) Primero se forma un vector unitario en la dirección de **b**:

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{6} \quad \text{por lo que} \quad \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}).$$

Entonces de (11) tenemos

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{6}}.$$

b) Al modificar (11) de manera correspondiente, tenemos

$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\left(\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}\right).$$

Entonces $|\mathbf{a}| = \sqrt{29}$ por lo que $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})$,

y $$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})\cdot\frac{1}{\sqrt{29}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}) = -\frac{3}{\sqrt{29}}.$$ ■

Proyección de a sobre b Como se ilustra en la FIGURA 11.3.5*a*), la proyección de un vector **a** en cualquiera de las direcciones determinadas por **i**, **j**, **k** es simplemente el *vector* formado al multiplicar la componente de **a** en la dirección especificada con un vector unitario en esa dirección; por ejemplo,

$$\text{proy}_{\mathbf{i}}\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{i}}\mathbf{a})\mathbf{i} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i})\mathbf{i} = a_1\mathbf{i},$$

y así sucesivamente. La figura 11.3.5*b*), muestra el caso general de la **proyección de a sobre b**:

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a})\left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\right). \tag{12}$$

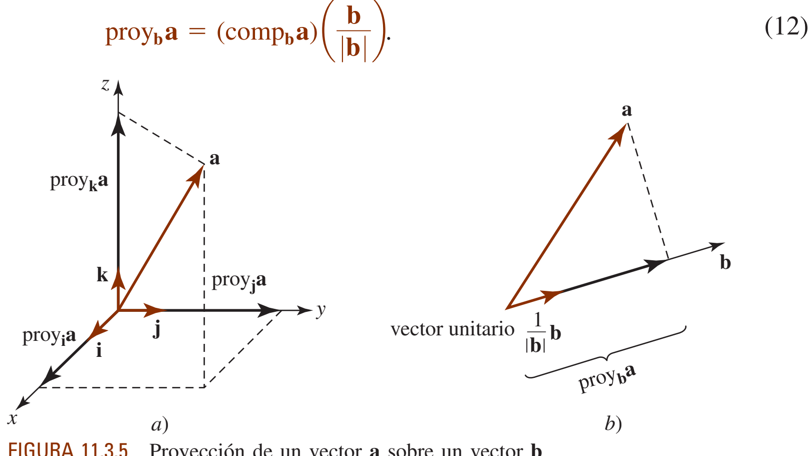


FIGURA 11.3.5 Proyección de un vector **a** sobre un vector **b**

EJEMPLO 7 Proyección de **a** sobre **b**

Determine la proyección de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j}$ sobre el vector $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Grafique.

Solución Primero se determina la componente de **a** sobre **b**. Puesto que $|\mathbf{b}| = \sqrt{13}$, encontramos de (11),

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (4\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{11}{\sqrt{13}}.$$

Así, de (12),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = \left(\frac{11}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{13}}\right)(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) = \frac{22}{13}\mathbf{i} + \frac{33}{13}\mathbf{j}. \quad ■$$

La gráfica de este vector se muestra en la FIGURA 11.3.6.

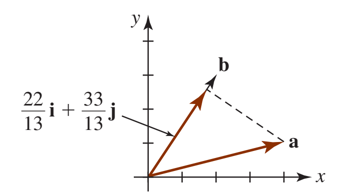


FIGURA 11.3.6 Proyección de **a** sobre **b**

Proyección de a ortogonal sobre b

Como se ve en la FIGURA 11.3.7, los vectores **a** y $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ son la hipotenusa y un lado del triángulo rectángulo, respectivamente. El segundo lado del triángulo es entonces

$$\mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Éste es un vector que es ortogonal a **b** y se le denomina **proyección de a ortogonal a b**.

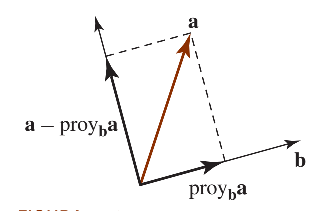


FIGURA 11.3.7 El vector $\mathbf{a} - \text{proy}_b\, \mathbf{a}$ es ortogonal a **b**



EJEMPLO 8 Proyección de **a** ortogonal a **b**

Sean $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Determine la proyección de **a** ortogonal a **b**.

Solución Primero se determina la proyección de **a** en **b**. Puesto que $|\mathbf{b}| = 3$, tenemos por (11) que

$$\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot \frac{1}{3}(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 5,$$

por lo que, utilizando (12),

$$\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (5)\left(\frac{1}{3}\right)(2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = \frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}.$$

Entonces, la proyección de **a** ortogonal a **b** es

$$\mathbf{a} - \text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) - \left(\frac{10}{3}\mathbf{i} + \frac{5}{3}\mathbf{j} + \frac{10}{3}\mathbf{k}\right) = -\frac{1}{3}\mathbf{i} - \frac{8}{3}\mathbf{j} + \frac{5}{3}\mathbf{k}. \quad ■$$

Interpretación física del producto punto

En la sección 6.8 observamos que cuando una fuerza constante de magnitud F mueve un objeto a una distancia d en la misma dirección de la fuerza, el trabajo realizado es simplemente

$$W = Fd. \tag{13}$$

Sin embargo, si una fuerza constante **F** aplicada a un cuerpo actúa en un ángulo θ respecto a la dirección de movimiento, entonces el trabajo realizado por **F** se define como el producto de la componente de **F** en la dirección del desplazamiento y la distancia $|\mathbf{d}|$ que se mueve el cuerpo:

$$W = \left(|\mathbf{F}|\cos\theta\right)|\mathbf{d}| = |\mathbf{F}||\mathbf{d}|\cos\theta.$$

Vea la FIGURA 11.3.8. Se concluye del teorema 11.3.2 que si **F** provoca un desplazamiento **d** de un cuerpo, entonces el trabajo realizado es

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}. \tag{14}$$

Note que (14) se reduce a (13) cuando $\theta = 0$.

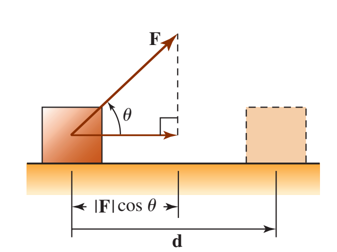


FIGURA 11.3.8 Trabajo realizado por una fuerza que actúa a un ángulo θ con la dirección de movimiento

EJEMPLO 9 Trabajo realizado por una fuerza a un ángulo

Determine el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ sobre un bloque que se mueve de $P_1(1, 1)$ a $P_2(4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ se mide en libras y $|\mathbf{d}|$ se mide en pies.

Solución El desplazamiento del bloque está dado por

$$\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$$

Se concluye de (14) que el trabajo realizado es

$$W = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) = 26 \text{ pies-lb.} \quad ■$$

Ejercicios 11.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-36.

Fundamentos

En los problemas 1-12, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determine el vector o escalar indicado.

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

2. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

3. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

4. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

5. $\mathbf{a} \cdot (4\mathbf{b})$

6. $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{c})$

7. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

8. $(2\mathbf{b}) \cdot (3\mathbf{c})$

9. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$

10. $(2\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$

11. $\left(\dfrac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}\right)\mathbf{b}$

12. $(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})\mathbf{a}$

En los problemas 13-16, determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ si el ángulo más pequeño entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ es como se indica.

13. $|\mathbf{a}| = 10$, $|\mathbf{b}| = 5$, $\theta = \pi/4$

14. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 12$, $\theta = \pi/6$

15. $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $\theta = 2\pi/3$

16. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\theta = 5\pi/6$

En los problemas 17-20, determine un ángulo θ entre los vectores indicados.

17. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$

18. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

19. $\mathbf{a} = \langle 2, 4, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, -1, 4\rangle$

20. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -4, 6\rangle$

21. Encuentre cuáles pares de los siguientes vectores son ortogonales.

a) $\langle 2, 0, 1\rangle$

b) $3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

c) $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

d) $\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

e) $\langle 1, -1, 1\rangle$

f) $\langle -4, 3, 8\rangle$

22. Determine un escalar c de manera que los vectores dados sean ortogonales.

a) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - c\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

b) $\mathbf{a} = \langle c, \frac{1}{2}, c\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 4, c\rangle$

23. Determine un vector $\mathbf{v} = \langle x_1, y_1, 1\rangle$ que es ortogonal tanto a $\mathbf{a} = \langle 3, 1, -1\rangle$ como a $\mathbf{b} = \langle -3, 2, 2\rangle$.

24. Un **rombo** es un paralelogramo de ángulos oblicuos con los cuatro lados iguales. Utilice el producto punto para demostrar que las diagonales de un rombo son perpendiculares.

25. Verifique que el vector

$$\mathbf{c} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$$

es ortogonal al vector $\mathbf{a}$.

26. Determine un escalar c de manera que el ángulo entre $\mathbf{a} = \mathbf{i} + c\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ sea 45°.

En los problemas 27-30, encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector dado.

27. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

28. $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

29. $\mathbf{a} = \langle 1, 0, -\sqrt{3}\rangle$

30. $\mathbf{a} = \langle 5, 7, 2\rangle$

31. Encuentre el ángulo entre la diagonal $\overrightarrow{AD}$ del cubo que se muestra en la FIGURA 11.3.9 y el borde $\overrightarrow{AB}$. Determine el ángulo entre la diagonal $\overrightarrow{AD}$ y la diagonal $\overrightarrow{AC}$.

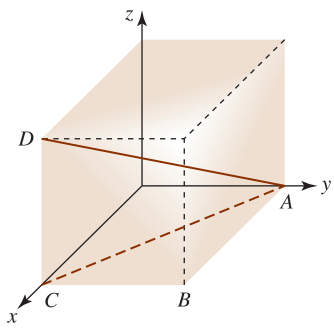


FIGURA 11.3.9 Cubo del problema 31

32. Un avión se encuentra a 4 km de altura, 5 kilómetros hacia el sur y 7 kilómetros hacia el este de un aeropuerto. Vea la FIGURA 11.3.10. Determine los ángulos directores del avión.

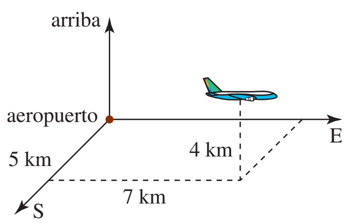


FIGURA 11.3.10 Avión del problema 32

En los problemas 33-36, $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. Determine el número indicado.

33. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$

34. $\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$

35. $\text{comp}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$

36. $\text{comp}_{2\mathbf{b}}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

En los problemas 37 y 38, encuentre la componente del vector indicado en la dirección del origen al punto que se indica.

37. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$; $P(3, 10)$

38. $\mathbf{a} = \langle 2, 1, -1\rangle$; $P(1, -1, 1)$

En los problemas 39-42, determine *a*) $\text{proy}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ y *b*) la proyección de $\mathbf{a}$ ortogonal a $\mathbf{b}$.

39. $\mathbf{a} = -5\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

40. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j}$

41. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 7\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -3, -2\rangle$

42. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -2, 2, -1\rangle$

En los problemas 43 y 44, $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$. Determine el vector indicado.

43. $\text{proy}_{(\mathbf{a}+\mathbf{b})}\mathbf{a}$

44. Proyección de $\mathbf{b}$ ortogonal a $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

≡ Aplicaciones

45. Un trineo se jala horizontalmente sobre el hielo por medio de una cuerda unida a su frente. Una fuerza de 20 lb que actúa a un ángulo de 60° con la horizontal desplaza el trineo 100 pies. Determine el trabajo realizado.

46. Se empuja un tren a lo largo de un riel recto con una fuerza de 3 000 lb actuando a un ángulo de 45° en la dirección de movimiento. Determine el trabajo realizado al mover el tren 400 pies.

47. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ que mueve un objeto de $P_1(3, 1, -2)$ a $P_2(2, 4, 6)$. Suponga que $|\mathbf{F}|$ se mide en newtons y $|\mathbf{d}|$ en metros.

48. Un bloque con un peso $\mathbf{p}$ se jala a lo largo de una superficie horizontal sin fricción mediante una fuerza constante $\mathbf{F}$ de 30 newtons en la dirección dada por un vector $\mathbf{d}$. Vea la FIGURA 11.3.11. Suponga que $|\mathbf{d}|$ se mide en metros.

a) ¿Cuál es el trabajo realizado por el peso $\mathbf{p}$?

b) ¿Cuál es el trabajo efectuado por la fuerza $\mathbf{F}$ si $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$?

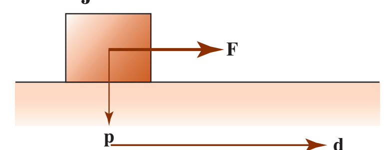


FIGURA 11.3.11 Bloque del problema 48

49. Una fuerza constante $\mathbf{F}$ de magnitud igual a 3 lb se aplica al bloque que se muestra en la FIGURA 11.3.12. $\mathbf{F}$ tiene la misma dirección que el vector $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Determine el trabajo realizado en la dirección de movimiento si el bloque se mueve de $P_1(3, 1)$ a $P_2(9, 3)$. Suponga que la distancia se mide en pies.

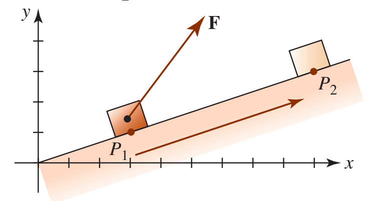


FIGURA 11.3.12 Bloque del problema 49

50. La molécula de metano CH_4 consta de cuatro átomos de hidrógeno que rodean a un solo átomo de carbón. Como se ilustra en la FIGURA 11.3.13, los átomos de hidrógeno se ubican en los vértices de un tetraedro regular. La distancia entre el centro de un átomo de hidrógeno y el centro del átomo de carbono es de 1.10 angstroms (1 angstrom $= 10^{-10}$ m) y el ángulo del enlace hidrógeno-carbón-hidrógeno es $\theta = 109.5°$. Utilizando únicamente métodos vectoriales, determine la distancia entre los dos átomos de hidrógeno.

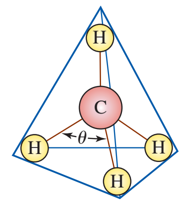


FIGURA 11.3.13 Átomos en la molécula de metano del problema 50

≡ Piense en ello

51. Demuestre que si dos vectores distintos de cero $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales, entonces sus cosenos directores satisfacen

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0.$$

52. Determine un vector unitario cuyos ángulos directores, relativos a los tres ejes de coordenadas, son iguales.

53. Utilice la definición del producto punto para demostrar los incisos *i*), *ii*), *iv*) y *v*) del teorema 11.3.1.

54. Utilice el producto punto para demostrar la **desigualdad de Cauchy-Schwarz**: $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \le |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$.

55. Utilice el producto punto para demostrar la **desigualdad del triángulo**: $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. [*Sugerencia*: Considere la propiedad *vi*) del teorema 11.3.1.]

56. Demuestre que el vector $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ es perpendicular a la recta cuya ecuación es $ax + by + c = 0$. [*Sugerencia*: Considere que $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son puntos distintos de la recta.]

57. Utilice el resultado del problema 56 y la FIGURA 11.3.14 para demostrar que la distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $ax + by + c = 0$ es $d = |ax_1 + by_1 + c|/\sqrt{a^2 + b^2}$.

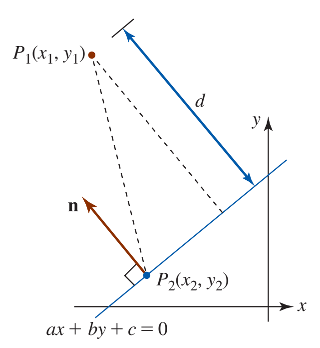


FIGURA 11.3.14 Distancia de un punto a una recta en el problema 57

≡ Proyectos

58. La luz proveniente de una fuente en el punto $S(a, b)$ se refleja en un espejo esférico de radio 1, centrado en el origen, hacia un observador localizado en el punto $O(c, d)$ como se muestra en la FIGURA 11.3.15. El punto de reflexión $P(x, y)$ del espejo esférico yace en el plano determinado por la fuente, el observador y el centro de la esfera. (El análisis de espejos esféricos se da, entre otros lugares, en el estudio del diseño de radares.)

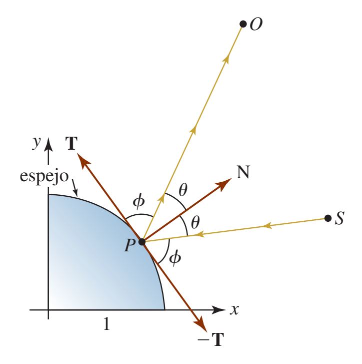


FIGURA 11.3.15 Espejo del problema 58

a) Emplee el teorema 11.3.2 dos veces, una vez con el ángulo θ y una vez con el ángulo ϕ, para demostrar que las coordenadas del punto de reflexión $P(x, y)$ satisfacen la ecuación

$$\frac{ax + by - 1}{ay - bx} = \frac{cx + dy - 1}{dx - cy}.$$

[*Sugerencia*: Como se ilustra en la figura, sean **N** y **T**, respectivamente, un vector normal unitario y una tangente unitaria al círculo en $P(x, y)$. Si $\mathbf{N} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, ¿cómo es **T** en términos de x y y?]

b) Sean $a = 2$, $b = 0$, $c = 0$ y $d = 3$. Utilice la relación $x^2 + y^2 = 1$ para demostrar que la coordenada x del punto de reflexión es una raíz de una ecuación polinomial de cuarto grado.

c) Utilice el método de Newton o un SAC para determinar el punto de reflexión en el inciso *b*). Quizá tenga que considerar las cuatro raíces de la ecuación en el inciso *b*) para encontrar la que corresponde a una solución de la ecuación en el inciso *a*).

11.4 Producto cruz

Introducción El producto punto, que se presentó en la sección anterior, opera tanto en el espacio bidimensional como en el tridimensional y genera un *número*. Por otro lado, el **producto cruz**, que se presenta en esta sección, sólo está definido para vectores en el espacio tridimensional y genera otro *vector* en el espacio tridimensional.

Determinantes de segundo y tercer orden Los siguientes hechos acerca de los determinantes serán importantes en la definición y discusión del producto cruz en esta sección.

Repaso de determinantes

La definición de un **determinante de segundo orden** es el número

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Un **determinante de tercer orden** se define en términos de tres determinantes de segundo orden del modo que sigue:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Lo anterior se denomina **expansión de determinantes por cofactores** del primer renglón.

Se lee como un determinante de "dos por dos".

Aun cuando un determinante es un *número*, es conveniente pensar en él como un arreglo cuadrado. Así, los determinantes de segundo y tercer orden se refieren, respectivamente, como **determinantes 2 × 2** y **3 × 3**. Hay determinantes de orden superior, pero como no se encontrarán en los siguientes capítulos de este libro no se darán sus definiciones.

Para encontrar el valor de un determinante de 2×2 se calculan los productos de los números en las dos diagonales y se restan:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Para un determinante de 3×3, el **cofactor** de una entrada a_{1j} en el primer renglón y la columna j-ésima, $j = 1, 2, 3$, es $(-1)^{1+j}$ veces el determinante 2×2 formado al eliminar el primer renglón y la j-esima columna. Los cofactores de a_1, a_2 y a_3 son, respectivamente,

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Así:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 1 Un determinante de 2×2

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-4)3 - (-2)5 = -2$$

■

EJEMPLO 2 Un determinante de 3×3

$$\begin{vmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8(0) - 5(12) + 4(8) = -28$$

■

Las siguientes propiedades serán de utilidad en la discusión que sigue.

Tres propiedades de determinantes

i) Si toda entrada en un renglón (o columna) de un determinante es 0, entonces el valor del determinante es cero.

ii) Si dos renglones (o columnas) de un determinante son iguales, entonces el valor del determinante es cero.

iii) Cuando dos renglones (o columnas) de un determinante se intercambian, el determinante que resulta es el negativo del determinante original.

Forma de componentes del producto cruz Como se hizo en la discusión del producto punto, definimos el producto cruz de dos vectores **a** y **b** en términos de las componentes de los vectores.

Definición 11.4.1 Producto cruz de dos vectores

El **producto cruz** de dos vectores $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ es el vector

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}. \tag{1}$$

Los coeficientes de los vectores básicos en (1) se reconocen como determinantes de 2×2, por lo que (1) puede escribirse como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Esta representación, a su vez, sugiere que es posible escribir el producto cruz como un determinante de 3×3:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Técnicamente la expresión sobre el lado derecho de la igualdad en (2) *no* es un determinante, ya que sus entradas no son todas escalares. De cualquier modo, el "determinante" en (2) se usa simplemente como una manera de recordar la definición de componentes del producto cruz dada en (1).

EJEMPLO 3 El producto cruz

Sean $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solución Usamos (2) y se desarrolla el determinante utilizando cofactores del primer renglón:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= -3\mathbf{i} + 19\mathbf{j} + 10\mathbf{k}.$$

■

EJEMPLO 4 Productos cruz de los vectores básicos

Puesto que $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0\rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0\rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$, advertimos de (2) o la segunda propiedad de determinantes que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

También por (2)

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{4}$$

■

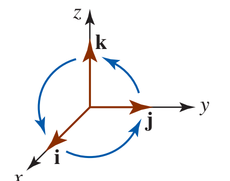


FIGURA 11.4.1 Un mnemónico para productos cruz que implican a **i, j** y **k**

El producto cruz en (4) se obtiene utilizando la mnemónica circular que se muestra en la FIGURA 11.4.1.

Propiedades El siguiente teorema resume algunas de las propiedades importantes del producto cruz.

Teorema 11.4.1 Propiedades del producto cruz

i) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{b} = \mathbf{0}$
ii) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
iii) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$ ← ley distributiva
iv) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ← ley distributiva
v) $\mathbf{a} \times (k\mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, k un escalar
vi) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$
vii) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$
viii) $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$

Advierta en la parte *i)* del teorema 14.4.1 que el producto cruz no es conmutativo. Como consecuencia de esta propiedad no conmutativa hay dos leyes distributivas en los incisos *iii)* y *iv)* del teorema.

DEMOSTRACIÓN Los incisos *i*), *ii*) y *vi*) siguen directamente de las tres propiedades de los determinantes dadas antes. Se demuestra el inciso *iii*) y se dejan las restantes pruebas al estudiante. Vea el problema 60 en los ejercicios 11.4. Para demostrar el inciso *iii*) dejamos $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= [(a_2b_3 + a_2c_3) - (a_3b_2 + a_3c_2)]\mathbf{i} - [(a_1b_3 + a_1c_3) - (a_3b_1 + a_3c_1)]\mathbf{j} \\ &\quad + [(a_1b_2 + a_1c_2) - (a_2b_1 + a_2c_1)]\mathbf{k} \\ &= [(a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}] \\ &\quad + [(a_2c_3 - a_3c_2)\mathbf{i} - (a_1c_3 - a_3c_1)\mathbf{j} + (a_1c_2 - a_2c_1)\mathbf{k}] \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

■

Vectores paralelos En la sección 11.1 vimos que dos vectores distintos de cero son paralelos si y sólo si uno es un múltiplo escalar distinto de cero del otro. Así, dos vectores son paralelos y tienen las formas **a** y k**a**, donde **a** es cualquier vector. Por las propiedades *v*) y *vi*) del teorema 11.4.1, el producto cruz de vectores paralelos debe ser **0**. Esto se enuncia formalmente en el siguiente teorema.

Teorema 11.4.2 Criterio para vectores paralelos

Dos vectores distintos de cero **a** y **b** son paralelos si y sólo si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 5 Vectores paralelos

Determine si $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = -6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ son vectores paralelos.

Solución Del producto cruz

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$
$$= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

y el teorema 11.4.2 concluimos que **a** y **b** son vectores paralelos. ■

Regla de la mano derecha Una caracterización alterna del producto cruz utiliza la **regla de la mano derecha**. Como se observa en la FIGURA 11.4.2*a*), si los dedos de la mano derecha apuntan a lo largo del vector **a** y después se curvan hacia el vector **b**, el pulgar dará la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. En la figura 11.4.1*b*), la regla de la mano derecha muestra la dirección de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

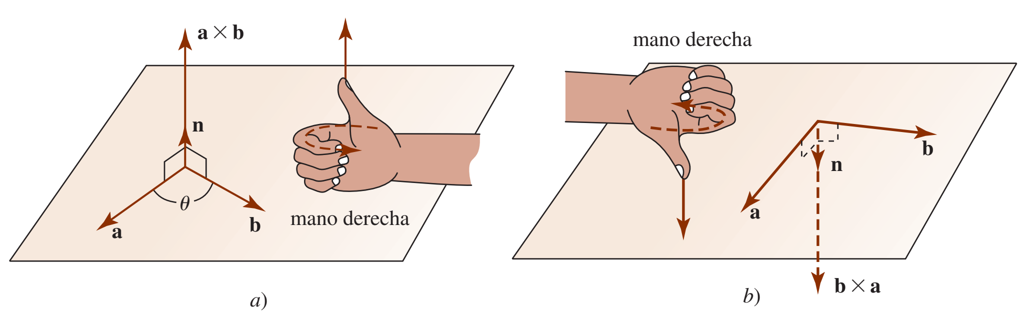


FIGURA 11.4.2 La regla de la mano derecha

Teorema 11.4.3 Forma alterna del producto cruz

Sean **a** y **b** dos vectores distintos de cero que no son paralelos entre sí. Entonces el producto cruz de **a** y **b** es

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta)\mathbf{n}, \tag{5}$$

donde θ es el ángulo entre los vectores tal que $0 \le \theta \le \pi$ y **n** es un vector unitario perpendicular al plano de **a** y **b** con dirección dada por la regla de la mano derecha.

DEMOSTRACIÓN Se observa de las propiedades *vii*) y *viii*) del teorema 11.4.1 que tanto **a** como **b** son perpendiculares a $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Así, la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es perpendicular al plano de **a** y **b**, y puede demostrarse que la regla de la mano derecha determina la dirección apropiada. Resta demostrar que la magnitud de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dada por

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta. \tag{6}$$

Calculamos por separado los cuadrados de los lados izquierdo y derecho de esta ecuación utilizando las formas de componentes de **a** y **b**:

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2\\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_3a_3b_2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_3a_3b_1 + a_3^2b_1^2\\
&\qquad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_2a_2b_1 + a_2^2b_1^2\\
\big(|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta\big)^2 &= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\operatorname{sen}^2\theta = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1-\cos^2\theta)\\
&= |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2\theta = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2\\
&= \big(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\big)\big(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\big) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\\
&= a_2^2b_3^2 - 2a_2b_2a_3b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1b_1a_3b_3 + a_3^2b_1^2\\
&\qquad + a_1^2b_2^2 - 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_1^2.
\end{aligned}$$

Puesto que ambos lados son iguales a la misma cantidad, deben ser iguales entre sí, por lo que

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = \big(|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta\big)^2.$$

Por último, tomando la raíz cuadrada de ambos lados y utilizando el hecho de que $\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta$ puesto que $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $0 \leq \theta \leq \pi$, tenemos $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$. ■

Combinando los teoremas 11.4.2 y 11.4.3 advertimos que para *cualquier* par de vectores **a** y **b**,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \big(|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta\big)\mathbf{n}.$$

Esta forma más geométrica se usa por lo general como la definición del producto cruz en un curso de física.

Productos especiales El **triple producto escalar** de los vectores **a**, **b** y **c** es $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Utilizando las formas de las componentes de las definiciones de los productos punto y cruz, tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})\cdot\left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\mathbf{k}\right]\\
&= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3\\ c_1 & c_3\end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Así, vemos que el triple producto escalar puede escribirse como un determinante de 3×3:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}. \tag{7}$$

Utilizando las propiedades de determinantes puede demostrarse que

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}. \tag{8}$$

Vea el problema 61 en los ejercicios 11.4.

El **triple producto vectorial** de tres vectores **a**, **b** y **c** es

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

El triple producto vectorial se relaciona con el producto punto por medio de

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}. \tag{9}$$

Vea el problema 62 en los ejercicios 11.4.

Áreas Dos vectores distintos de cero y no paralelos **a** y **b** pueden considerarse como los lados de un paralelogramo. El **área *A* de un paralelogramo** es

$$A = (\text{base})(\text{altura}).$$

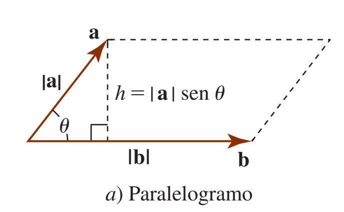
De la FIGURA 11.4.3*a*), observamos que $A = |\mathbf{b}|\big(|\mathbf{a}|\operatorname{sen}\theta\big) = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\operatorname{sen}\theta$

o

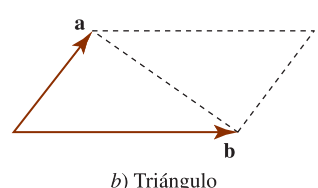
$$A = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|. \tag{10}$$

De igual modo que en la figura 11.4.3*b*), vemos que el **área del triángulo** con lados **a** y **b** es

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|. \tag{11}$$



a) Paralelogramo



b) Triángulo

FIGURA 11.4.3 El área de un paralelogramo

EJEMPLO 6 Área del triángulo

Encuentre el área del triángulo determinado por los puntos $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(2, 3, 4)$ y $P_3(3, 0, -1)$.

Solución Los vectores $\overrightarrow{P_1P_2}$ y $\overrightarrow{P_2P_3}$ pueden considerarse como dos lados del triángulo. Puesto que

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{P_2P_3} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

tenemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_2P_3} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\mathbf{k} \\ &= -\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.\end{aligned}$$

De (11) vemos que el área es

$$A = \frac{1}{2}|-\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}| = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$ ■

Volumen de un paralelepípedo Si los vectores **a**, **b** y **c** no yacen en el mismo plano, entonces el **volumen del paralelepípedo** con bordes **a**, **b** y **c** que se muestra en la FIGURA 11.4.4 es

$$\begin{aligned} V &= (\text{área de la base})(\text{altura}) \\ &= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}|\,|\text{comp}_{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\mathbf{a}| \\ &= |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \left|\mathbf{a} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}\mathbf{b} \times \mathbf{c}\right)\right| \end{aligned}$$

o

$$V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|. \tag{12}$$

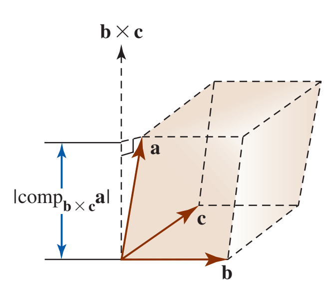


FIGURA 11.4.4 Paralelepípedo formado por tres vectores

Así, el volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores es el valor absoluto del triple producto escalar de los vectores.

Vectores coplanares Los vectores que yacen en el mismo plano se dice que son **coplanares**. Se ha visto que si los vectores **a**, **b** y **c** no son coplanares, entonces necesariamente $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$, pues el volumen de un paralelepípedo con bordes **a**, **b** y **c** tiene volumen distinto de cero. Enunciado de manera equivalente, esto quiere decir que si $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$, entonces los vectores **a**, **b** y **c** son coplanares. Puesto que lo inverso de este último enunciado también es cierto (vea el problema 64 en los ejercicios 11.4), ocurre que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0 \quad \textit{si y sólo si} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ y } \mathbf{c} \textit{ son coplanares.}$$

Interpretación física del producto cruz En física una fuerza **F** que actúa en el extremo de un vector de posición **r**, como se muestra en la FIGURA 11.4.5, se dice que produce una **torsión** $\boldsymbol{\tau}$ definida por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por ejemplo, si $|\mathbf{F}| = 20$ N, $|\mathbf{r}| = 3.5$ m y $\theta = 30°$, entonces de (6),

$$|\boldsymbol{\tau}| = (3.5)(20)\text{sen}\,30° = 35 \text{ N-m}.$$

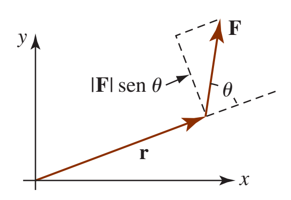


FIGURA 11.4.5 Una fuerza actuando en el extremo de un vector

Si **F** y **r** están en el plano de la página, la regla de la mano derecha implica que la dirección de $\boldsymbol{\tau}$ es hacia afuera de la misma, y perpendicular a ella (hacia el lector).

Como podemos advertir en la FIGURA 11.4.6, cuando una fuerza **F** se aplica a una llave de tuercas, la magnitud de la torsión $\boldsymbol{\tau}$ es una medida del efecto de rotación alrededor del punto pivote P y el vector $\boldsymbol{\tau}$ se dirige a lo largo del eje de la tuerca. En este caso $\boldsymbol{\tau}$ apunta hacia adentro de la página.

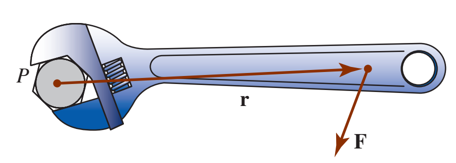


FIGURA 11.4.6 Una llave que aplica torsión a una tuerca

$\overrightarrow{OP}$ NOTAS DESDE EL AULA

Cuando se trabaja con vectores, debe tenerse cuidado de no mezclar los símbolos de los productos punto y cruz, esto es, $\cdot$ y $\times$, con los símbolos de la multiplicación ordinaria, así como ser cuidadosos, en especial, en el uso, o falta del mismo, de paréntesis. Por ejemplo, si a, b y c son números reales, entonces el producto abc está bien definido puesto que

$$abc = a(bc) = (ab)c.$$

Por otro lado, la expresión $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ no está bien definida puesto que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

Vea el problema 59 en los ejercicios 11.4. Otras expresiones, tal como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, no tienen sentido, incluso si se incluye paréntesis. ¿Por qué?

Ejercicios 11.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-36.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

1. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ **2.** $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{k}$

3. $\mathbf{a} = \langle 1, -3, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, 4\rangle$

4. $\mathbf{a} = \langle 1, 1, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -5, 2, 3\rangle$

5. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

6. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

7. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 6, 0\rangle$ **8.** $\mathbf{a} = \langle 0, 5, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, -3, 4\rangle$

9. $\mathbf{a} = \langle 2, 2, -4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, -3, 6\rangle$

10. $\mathbf{a} = \langle 8, 1, -6\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, -2, 10\rangle$

En los problemas 11 y 12, encuentre $\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$.

11. $P_1(2, 1, 3)$, $P_2(0, 3, -1)$, $P_3(-1, 2, 4)$

12. $P_1(0, 0, 1)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(1, 2, 3)$

En los problemas 13 y 14, encuentre un vector distinto de cero que sea perpendicular tanto a $\mathbf{a}$ como a $\mathbf{b}$.

13. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

14. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 4\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, -1, 0\rangle$

En los problemas 15 y 16, verifique que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ y $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

15. $\mathbf{a} = \langle 5, -2, 1\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 0, -7\rangle$

16. $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

En los problemas 17 y 18,

a) calcule $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ seguido de $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

b) Verifique los resultados del inciso *a*) mediante (9) de esta sección.

17. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

18. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$

En los problemas 19-36, encuentre el escalar o vector indicado *sin usar* (2), (7) o (9).

19. $(2\mathbf{i}) \times \mathbf{j}$ **20.** $\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})$

21. $\mathbf{k} \times (2\mathbf{i} - \mathbf{j})$ **22.** $\mathbf{i} \times (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$

23. $[(2\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j})] \times (4\mathbf{j})$ **24.** $(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times \mathbf{i}$

25. $(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{i} + 5\mathbf{k})$ **26.** $\mathbf{i} \times \mathbf{k} - 2(\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

27. $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{k})$ **28.** $\mathbf{i} \cdot [\mathbf{j} \times (-\mathbf{k})]$

29. $|4\mathbf{j} - 5(\mathbf{i} \times \mathbf{j})|$ **30.** $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \cdot (3\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

31. $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j})$ **32.** $(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{i}$

33. $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j}$ **34.** $(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i})(\mathbf{i} \times \mathbf{j})$

35. $2\mathbf{j} \cdot [\mathbf{i} \times (\mathbf{j} - 3\mathbf{k})]$ **36.** $(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \times (\mathbf{j} \times \mathbf{i})$

En los problemas 37-44, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Encuentre el escalar o vector indicado.

37. $\mathbf{a} \times (3\mathbf{b})$ **38.** $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$

39. $(-\mathbf{a}) \times \mathbf{b}$ **40.** $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

41. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ **42.** $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$

43. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ **44.** $(4\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

En los problemas 45 y 46,

a) verifique que el cuadrilátero dado es un paralelogramo y

b) determine el área del paralelogramo.

45.

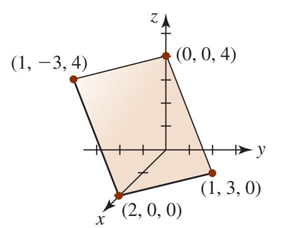


FIGURA 11.4.7 Paralelogramo del problema 45

46.

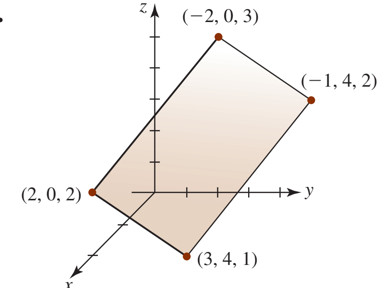


FIGURA 11.4.8 Paralelogramo del problema 46

En los problemas 47-50, encuentre el área del triángulo determinado por los puntos dados.

47. $P_1(1, 1, 1)$, $P_2(1, 2, 1)$, $P_3(1, 1, 2)$

48. $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(0, 1, 2)$, $P_3(2, 2, 0)$

49. $P_1(1, 2, 4)$, $P_2(1, -1, 3)$, $P_3(-1, -1, 2)$

50. $P_1(1, 0, 3)$, $P_2(0, 0, 6)$, $P_3(2, 4, 5)$

En los problemas 51 y 52, encuentre el volumen del paralelepípedo para el cual los vectores dados son los tres bordes.

51. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

52. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 53 y 54, determine si los vectores indicados son coplanares.

53. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \frac{5}{2}\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$

54. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = \frac{3}{2}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

En los problemas 55 y 56, determine si los cuatro puntos indicados yacen en el mismo plano.

55. $P_1(1, 1, -2)$, $P_2(4, 0, -3)$, $P_3(1, -5, 10)$, $P_4(-7, 2, 4)$

56. $P_1(2, -1, 4)$, $P_2(-1, 2, 3)$, $P_3(0, 4, -3)$, $P_4(4, -2, 2)$

57. Como se muestra en la FIGURA 11.4.9, el vector **a** yace en el plano xy y el vector **b** se ubica a lo largo del eje z positivo. Sus magnitudes son $|\mathbf{a}| = 6.4$ y $|\mathbf{b}| = 5$.

a) Emplee (5) para encontrar $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

b) Utilice la regla de la mano derecha para determinar la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

c) Use el inciso *b*) para expresar $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ en términos de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**.

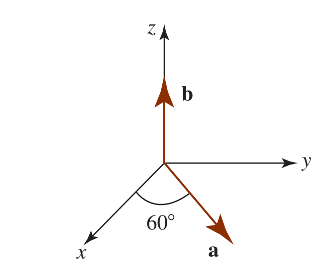


FIGURA 11.4.9 Vectores del problema 57

58. Dos vectores **a** y **b** yacen en el plano xz de manera que el ángulo entre ellos es 120°. Si $|\mathbf{a}| = \sqrt{27}$ y $|\mathbf{b}| = 8$, encuentre todos los valores posibles de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

≡ Piense en ello

59. Si $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3\rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 5, 6\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 7, 8, 3\rangle$, muestre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

60. Demuestre los incisos *iv*), *v*), *vii*) y *viii*) del teorema 11.4.1.

61. Demuestre $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

62. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

63. Demuestre $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

64. Demuestre que si **a**, **b** y **c** son coplanares, entonces $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$.

≡ Proyectos

65. Una retícula tridimensional es una colección de combinaciones enteras de tres vectores básicos no coplanares **a**, **b** y **c**. En cristalografía, una retícula puede especificar las ubicaciones de átomos en un cristal. Los estudios de difracción de rayos X de cristales utilizan la "retícula recíproca", la cual tiene los vectores de la base

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{c}}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{c} \times \mathbf{a}}{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a})}, \quad \mathbf{C} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}.$$

a) Cierta retícula tiene los vectores de la base $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$. Determine los vectores de la base de la retícula recíproca.

b) La celda unitaria de la retícula recíproca es el paralelepípedo con lados **A**, **B** y **C**, en tanto que la celda unitaria de la retícula original es el paralelepípedo con lados **a**, **b** y **c**. Demuestre que el volumen de la celda unitaria de la retícula recíproca es el recíproco del volumen de la celda unitaria de la retícula original. [*Sugerencia*: Empiece con $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y utilice (9).]

11.5 Rectas en el espacio tridimensional

Introducción En la sección 1.3 vimos que la clave para escribir la ecuación de una recta en el plano es la noción de la pendiente. La pendiente de una recta (o su ángulo de inclinación) proporciona un indicio de la dirección. Una recta en el plano se determina especificando ya sea un punto y una pendiente o cualesquiera dos puntos distintos. Básicamente lo mismo es cierto en el espacio tridimensional.

A continuación verá que los conceptos de vectores son una ayuda importante en la obtención de la ecuación de una recta en el espacio.

Ecuación vectorial Una recta en el espacio se determina especificando un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y un vector distinto de cero **v**. A través del punto P_0 pasa sólo una recta L paralela al vector dado. Suponga que $P(x, y, z)$ es *cualquier* punto sobre la recta. Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ y $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ son los vectores de posición de P y P_0, entonces debido a que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es paralelo al vector **v** existe una escalar t tal que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. Esto proporciona una **ecuación vectorial**

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \qquad (1)$$

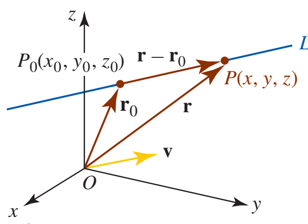


FIGURA 11.5.1 Línea que pasa por P_0 paralela a $\mathbf{v}$

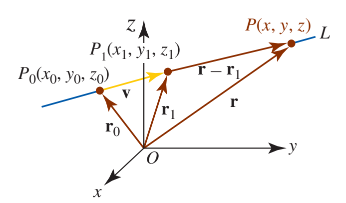


FIGURA 11.5.2 Línea que pasa por P_0 y P_1

de la recta L. Al emplear componentes, $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ y $\mathbf{v} = \langle a, b, c\rangle$ advertimos que (1) es igual a

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\rangle. \tag{2}$$

El escalar t se denomina **parámetro** y el vector $\mathbf{v}$ distinto de cero recibe el nombre de **vector direccional**; las componentes a, b y c del vector direccional $\mathbf{v}$ se llaman **números direccionales** de la recta L. Para cada número real t el vector $\mathbf{r}$ en (1) es el vector de posición de un punto sobre L y por ello es posible prever la recta como si se estuviera trazando en el espacio a partir de la punta en movimiento de $\mathbf{r}$. Vea la FIGURA 11.5.1.

Cualesquiera dos puntos distintos $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y $P_1(x_1, y_1, z_1)$ en el espacio tridimensional determinan únicamente la recta L entre ellos. Si $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$ y $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ son vectores de posición, vemos en la FIGURA 11.5.2 que el vector $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0$ es paralelo al vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$. De tal manera, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$. Debido a que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ también es paralelo a $\mathbf{v}$, una ecuación vectorial alterna para la recta es $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0). \tag{3}$$

Si escribimos $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle = \langle a, b, c\rangle$ veremos que (3) es lo mismo que (1). De hecho, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(-\mathbf{v})$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t(k\mathbf{v})$, con k un escalar distinto de cero, también son ecuaciones de L.

EJEMPLO 1 Ecuación vectorial de una recta

Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por $(4, 6, -3)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

Solución Con la identificación $x_0 = 4$, $y_0 = 6$, $z_0 = -3$, $a = 5$, $b = -10$ y $c = 2$ obtenemos de (2) una ecuación vectorial de la recta:

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 6, -3\rangle + t\langle 5, -10, 2\rangle \quad \text{o} \quad \langle x, y, z\rangle = \langle 4 + 5t, 6 - 10t, -3 + 2t\rangle. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Ecuación vectorial de una recta

Encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por $(2, -1, 8)$ y $(5, 6, -3)$.

Solución Si marcamos los puntos como $P_0(2, -1, 8)$ y $P_1(5, 6, -3)$, entonces un vector direccional para la recta que pasa por P_0 y P_1 es

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_0} = \langle 5 - 2, 6 - (-1), -3 - 8\rangle = \langle 3, 7, -11\rangle.$$

De (3) una ecuación vectorial de la recta es

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 2, -1, 8\rangle + t\langle 3, 7, -11\rangle.$$

Ésta es una de las muchas ecuaciones vectoriales posibles de la recta. Por ejemplo, dos ecuaciones alternas son

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle 3, 7, -11\rangle$$
$$\langle x, y, z\rangle = \langle 5, 6, -3\rangle + t\langle -3, -7, 11\rangle. \quad \blacksquare$$

Ecuaciones paramétricas

Al igualar las componentes en (2) obtenemos

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct. \tag{4}$$

Las ecuaciones en (4) se llaman **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por P_0. La recta L completa, que se extiende indefinidamente en ambas direcciones, se obtiene al permitir que el parámetro t aumente de $-\infty$ a ∞; en otras palabras, el intervalo del parámetro es $(-\infty, \infty)$. Si el parámetro t se restringe a un intervalo cerrado $[t_0, t_1]$, entonces cuando t aumenta (4) define un **segmento de recta** que empieza en el punto que corresponde a t_0 y termina en el punto correspondiente a t_1.

EJEMPLO 3 Ecuaciones paramétricas de una recta

Determine las ecuaciones paramétricas de la recta
a) que pasa por $(5, 2, 4)$ y es paralela a $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, y ***b***) que pasa por $(-1, 0, 1)$ y $(2, -1, 6)$.

Solución

a) Con las identificaciones $x_0 = 5$, $y_0 = 2$, $z_0 = 4$, $a = 4$, $b = 7$ y $c = -9$, vemos de (4) que las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$x = 5 + 4t,\ y = 2 + 7t,\ z = 4 - 9t.$$

b) Procediendo como en el ejemplo 2, un vector direccional de la recta es

$$\mathbf{v} = \langle 2, -1, 6\rangle - \langle -1, 0, 1\rangle = \langle 3, -1, 5\rangle.$$

Con números direccionales $a = 3$, $b = -1$ y $c = 5$, (4) produce

$$x = -1 + 3t,\ y = -t,\ z = 1 + 5t.$$ ■

Si se limita el intervalo del parámetro en el inciso *a*) del ejemplo 3, por ejemplo, $-1 \le t \le 0$, entonces

$$x = 5 + 4t, \quad y = 2 + 7t, \quad z = 4 - 9t, \quad -1 \le t \le 0$$

son ecuaciones paramétricas del segmento de recta que empieza en el punto $(1, -5, 13)$ y termina en $(5, 2, 4)$.

EJEMPLO 4 Repaso del ejemplo 1

Encuentre el punto donde la recta del ejemplo 1 interseca al plano *xy*.

Solución Al igualar componentes en la ecuación vectorial $\langle x, y, z\rangle = \langle 4 + 5t, 6 - 10t, -3 + 2t\rangle$ se producen las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$x = 4 + 5t, \quad y = 6 - 10t, \quad z = -3 + 2t.$$

Puesto que una ecuación para el plano *xy* es $z = 0$, resolvemos $z = -3 + 2t = 0$ para *t*. Al sustituir $t = \frac{3}{2}$ en las restantes dos ecuaciones se producen $x = 4 + 5\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{23}{2}$ y $y = 6 - 10\left(\frac{3}{2}\right) = -9$. El punto de intersección en el plano *z* es entonces $\left(\frac{23}{2}, -9, 0\right)$. ■

Ecuaciones simétricas

De (4) se observa que es posible eliminar el parámetro escribiendo

$$t = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

siempre que cada uno de los tres números direccionales *a*, *b* y *c* sea distinto de cero. Las ecuaciones resultantes

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{5}$$

se dice que son **ecuaciones simétricas** de la recta que pasa por P_0.

Si uno de los números direccionales *a*, *b* o *c* es cero, empleamos las dos ecuaciones restantes para eliminar el parámetro *t*. Por ejemplo, si $a = 0$, $b \ne 0$, $c \ne 0$, entonces (4) produce

$$x = x_0 \quad \text{y} \quad t = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

En este caso,

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{6}$$

son ecuaciones simétricas de la recta. Puesto que $x = x_0$ es una ecuación de un plano vertical perpendicular al eje *x*, la recta descrita por (6) yace en ese plano.

EJEMPLO 5 Repaso del ejemplo 3

Determine las ecuaciones simétricas de la recta que se encontró en el inciso *a*) del ejemplo 3.

Solución A partir de la identificación dada en la solución del ejemplo 3 podemos escribir de inmediato de acuerdo con (5) que

$$\frac{x - 5}{4} = \frac{y - 2}{7} = \frac{z - 4}{-9}.$$ ■

EJEMPLO 6 Ecuaciones simétricas

Encuentre las ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos (5, 3, 1) y (2, 1, 1).

Solución Definimos $a = 5 - 2 = 3$, $b = 3 - 1 = 2$ y $c = 1 - 1 = 0$. De acuerdo con la discusión precedente se deduce que las ecuaciones simétricas para la recta son

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{2}, \quad z = 1.$$

En otras palabras, las ecuaciones simétricas describen una recta en el plano $z = 1$. ■

Rectas perpendicular y paralela La siguiente definición proporciona una manera de usar los vectores direccionales de dos rectas para determinar si las rectas son perpendiculares o paralelas.

Definición 11.5.1 Rectas perpendicular y paralela

Dos rectas L_1 y L_2 con vectores direccionales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, respectivamente, son

i) **perpendiculares** si $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ y
ii) **paralelas** si $\mathbf{v}_2 = k\mathbf{v}_1$, para algún escalar k distinto de cero.

EJEMPLO 7 Rectas perpendiculares

Determine si las rectas

$$L_1: \quad x = -6 - t, \quad y = 20 + 3t, \quad z = 1 + 2t$$
$$L_2: \quad x = 5 + 2s, \quad y = -9 - 4s, \quad z = 1 + 7s$$

son perpendiculares.

Solución Al leer los coeficientes de los parámetros t y s, observamos que

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

son los vectores direccionales de L_1 y L_2, respectivamente. Como $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = -2 - 12 + 14 = 0$ concluimos que las rectas son perpendiculares. ■

EJEMPLO 8 Rectas paralelas

Los vectores direccionales de las rectas

$$L_1: \quad x = 4 - 2t, \quad x = 1 + 4t, \quad z = 3 + 10t$$
$$L_2: \quad x = s, \quad y = 6 - 2s, \quad z = \frac{1}{2} - 5s$$

son $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$. Como $\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_2$ $\left(\text{o } \mathbf{v}_2 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1\right)$, concluimos que las rectas son paralelas. ■

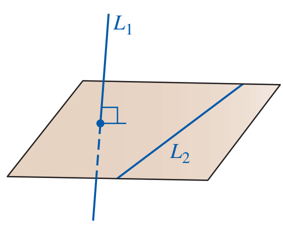


FIGURA 11.5.3 Líneas perpendiculares

Advierta que *i*) de la definición 11.5.1 no exige que las dos rectas se intersequen para que sean perpendiculares. La FIGURA 11.5.3 muestra dos rectas perpendiculares L_1 y L_2 que no se intersecan. En otras palabras, L_1 puede ser perpendicular a un plano que contiene a L_2.

EJEMPLO 9 Repaso del ejemplo 7

Determine si las rectas L_1 y L_2 del ejemplo 7 se intersecan.

Solución Puesto que un punto (x, y, z) de la intersección es común a ambas rectas, debemos tener

$$\left.\begin{aligned} -6 - t &= 5 + 2s \\ 20 + 3t &= -9 - 4s \\ 1 + 2t &= 1 + 7s \end{aligned}\right\} \quad \text{o} \quad \left\{\begin{aligned} 2s + t &= -11 \\ 4s + 3t &= -29 \\ -7s + 2t &= 0\,. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Después de esto resolvemos simultáneamente cualquiera de las *dos* ecuaciones en (7) y usamos la ecuación restante para la verificación. Al elegir la primera y la tercera, encontramos del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2s + t &= -11 \\ -7s + 2t &= 0 \end{aligned}$$

que $s = -2$ y $t = -7$. La sustitución de estos valores en la segunda ecuación en (7) produce la identidad $-8 - 21 = -29$. Así, L_1 y L_2 se intersecan. Para encontrar el punto de intersección, usamos, por ejemplo, $s = -2$:

$$x = 5 + 2(-2) = 1, \quad y = -9 - 4(-2) = -1, \quad z = 1 + 7(-2) = -13.$$

El punto de intersección es $(1, -1, -13)$. ■

En el ejemplo 9, al no haberse satisfecho las ecuaciones restantes cuando se sustituyeron los valores $s = -2$ y $t = -7$, entonces las tres ecuaciones no se satisfarían simultáneamente y por ello las rectas no se intersecarían. Dos rectas L_1 y L_2 en el espacio tridimensional que no se intersecan y que no son paralelas reciben el nombre de **rectas oblicuas**. Como se muestra en la FIGURA 11.5.4, las rectas oblicuas yacen en planos paralelos.

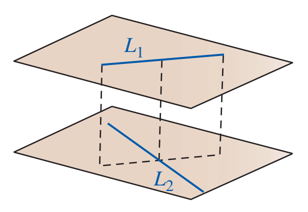


FIGURA 11.5.4 Rectas oblicuas

Ejercicios 11.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-36.

Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre una ecuación vectorial para la recta que pasa por el punto y es paralela al vector dado.

1. $(4, 6, -7)$, $\mathbf{v} = \langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\rangle$
2. $(1, 8, -2)$, $\mathbf{v} = -7\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$
3. $(0, 0, 0)$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
4. $(0, -3, 10)$, $\mathbf{v} = \langle 12, -5, -6\rangle$

En los problemas 5-10, encuentre la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos indicados.

5. $(1, 2, 1)$, $(3, 5, -2)$
6. $(0, 4, 5)$, $(-2, 6, 3)$
7. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
8. $(10, 2, -10)$, $(5, -3, 5)$
9. $(1, 1, -1)$, $(-4, 1, -1)$
10. $(3, 2, 1)$, $\left(\frac{5}{2}, 1, -2\right)$

En los problemas 11-16, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos indicados.

11. $(2, 3, 5)$, $(6, -1, 8)$
12. $(2, 0, 0)$, $(0, 4, 9)$
13. $(1, 0, 0)$, $(3, -2, -7)$
14. $(0, 0, 5)$, $(-2, 4, 0)$
15. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $\left(-6, -\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right)$
16. $(-3, 7, 9)$, $(4, -8, -1)$

En los problemas 17-22, encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por los puntos indicados.

17. $(1, 4, -9)$, $(10, 14, -2)$
18. $\left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(1, 3, \frac{1}{4}\right)$
19. $(4, 2, 1)$, $(-7, 2, 5)$
20. $(-5, -2, -4)$, $(1, 1, 2)$
21. $(5, 10, -2)$, $(5, 1, -14)$
22. $\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{10}\right)$

23. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(6, 4, -2)$ y que es paralela a la recta $x/2 = (1 - y)/3 = (z - 5)/6$.
24. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por $(4, -11, -7)$ y que es paralela a la recta $x = 2 + 5t$, $y = -1 + \frac{1}{3}t$, $z = 9 - 2t$.
25. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(2, -2, 15)$ y que es paralela al plano xz y al plano xy.
26. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por $(1, 2, 8)$ que es
    a) paralela al eje x y
    b) perpendicular al plano xy.

En los problemas 27 y 28, demuestre que las rectas L_1 y L_2 son las mismas.

27. L_1: $\mathbf{r} = t\langle 1, 1, 1\rangle$
    L_2: $\mathbf{r} = \langle 6, 6, 6\rangle + t\langle -3, -3, -3\rangle$
28. L_1: $x = 2 + 3t$, $y = -5 + 6t$, $z = 4 - 9t$
    L_2: $x = 5 - t$, $y = 1 - 2t$, $z = -5 + 3t$
29. Dado que las rectas L_1 y L_2 definidas por las ecuaciones paramétricas
    L_1: $x = 3 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = -1 + 6t$
    L_2: $x = 5 - s$, $y = 3 + \frac{1}{2}s$, $z = 5 - 3s$
    son iguales,
    a) encuentre un valor de t tal que $(-7, 9, -31)$ sea un punto sobre L_1 y
    b) encuentre un valor de s tal que $(-7, 9, -31)$ sea un punto sobre L_2.
30. Determine cuáles de las siguientes rectas son perpendiculares y cuáles son paralelas.
    a) $\mathbf{r} = \langle 1, 0, 2\rangle + t\langle 9, -12, 6\rangle$
    b) $x = 1 + 9t$, $y = 12t$, $z = 2 - 6t$
    c) $x = 2t$, $y = -3t$, $z = 4t$
    d) $x = 5 + t$, $y = 4t$, $z = 3 + \dfrac{5}{2}t$
    e) $x = 1 + t$, $y = \dfrac{3}{2}t$, $z = 2 - \dfrac{3}{2}t$
    f) $\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y + 6}{4} = \dfrac{z - 3}{-2}$

En los problemas 31 y 32, determine los puntos de intersección de la recta dada y los tres planos de coordenadas.

31. $x = 4 - 2t, y = 1 + 2t, z = 9 + 3t$

32. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{2}$

En los problemas 33-36, determine si las rectas L_1 y L_2 se intersecan. Si es así, encuentre el punto de intersección.

33. L_1: $x = 4 + t, y = 5 + t, z = -1 + 2t$
L_2: $x = 6 + 2s, y = 11 + 4s, z = -3 + s$

34. L_1: $x = 1 + t, y = 2 - t, z = 3t$
L_2: $x = 2 - s, y = 1 + s, z = 6s$

35. L_1: $x = 2 - t, y = 3 + t, z = 1 + t$
L_2: $x = 4 + s, y = 1 + s, z = 1 - s$

36. L_1: $x = 3 - t, y = 2 + t, z = 8 + 2t$
L_2: $x = 2 + 2s, y = -2 + 3s, z = -2 + 8s$

En los problemas 37 y 38, determine si los puntos dados yacen sobre la misma recta.

37. (4, 3, −5), (10, 15, −11), (−1, −7, 0)

38. (1, 6, 6), (−11, 10, −2), (−2, 7, 5)

39. Encuentre ecuaciones paramétricas del segmento de recta que une los puntos (2, 5, 9) y (6, −1, 3).

40. Encuentre ecuaciones paramétricas para el segmento de recta que une los puntos medios de los segmentos de recta dados.

$$x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = 4 - 3t, 1 \le t \le 2$$
$$x = -2 + 4t, y = 6 + t, z = 5 + 6t, -1 \le t \le 1$$

En los problemas 41 y 42, encuentre el ángulo entre las rectas dadas L_1 y L_2. El ángulo entre las dos rectas es el ángulo entre sus vectores direccionales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

41. L_1: $x = 4 - t, y = 3 + 2t, z = -2t$
L_2: $x = 5 + 2s, y = 1 + 3s, z = 5 - 6s$

42. L_1: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+5}{7} = \dfrac{z-1}{-1}$
L_2: $\dfrac{x+3}{-2} = y - 9 = \dfrac{z}{4}$

En los problemas 43 y 44, las rectas L_1 y L_2 yacen en el mismo plano. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto indicado y que es perpendicular a este plano.

43. L_1: $x = 3 + t, y = -2 + t, z = 9 + t$
L_2: $x = 1 - 2s, y = 5 + s, z = -2 - 5s$; (4, 1, 6)

44. L_1: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{4}$
L_2: $\dfrac{x+4}{6} = \dfrac{y-6}{4} = \dfrac{z-10}{8}$; (1, −1, 0)

En los problemas 45 y 46, demuestre que L_1 y L_2 son rectas oblicuas.

45. L_1: $x = -3 + t, y = 7 + 3t, z = 5 + 2t$
L_2: $x = 4 + s, y = 8 - 2s, z = 10 - 4s$

46. L_1: $x = 6 + 2t, y = 6t, z = -8 + 10t$
L_2: $x = 7 + 8s, y = 4 - 4s, z = 3 - 24s$

≡ Piense en ello

47. Suponga que L_1 y L_2 son rectas torcidas. Considere que L_1 y L_2 son puntos sobre la línea L_1 y sean P_3 y P_4 puntos sobre la línea L_2. Emplee el vector $\overrightarrow{P_1P_3}$, ilustrado en la FIGURA 11.5.5, para demostrar que la distancia más corta d entre L_1 y L_2 (y en consecuencia la distancia más corta entre los planos) es

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_3} \cdot (\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_4})|}{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_3P_4}|}.$$

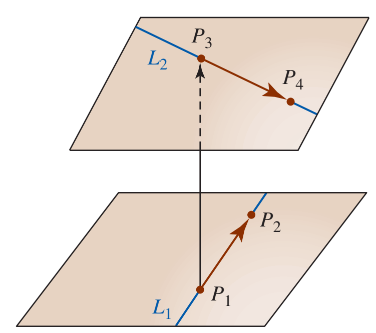


FIGURA 11.5.5 Distancia entre las dos rectas oblicuas del problema 47

48. Utilizando el resultado del problema 47, encuentre la distancia entre las rectas oblicuas del problema 45.

11.6 Planos

Introducción En esta sección aplicamos métodos vectoriales para obtener ecuaciones de planos.

Ecuación vectorial La FIGURA 11.6.1*a*) ilustra el hecho de que hay un número infinito de planos $S_1, S_2, S_3, \ldots$ que pasan por un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Sin embargo, como se muestra en la figura 11.6.1*b*), si se especifican un punto P_0 y un vector distinto de cero $\mathbf{n}$, sólo hay *un* plano S que contiene a P_0 con la **normal n**, o perpendicular, al plano. Además, si $P(x, y, z)$ representa cualquier punto sobre el plano, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OP_0}$, entonces como se ilustra en la figura 11.6.1*c*), $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ yace en el plano S. Se concluye que una **ecuación vectorial** del plano es

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0. \qquad (1)$$

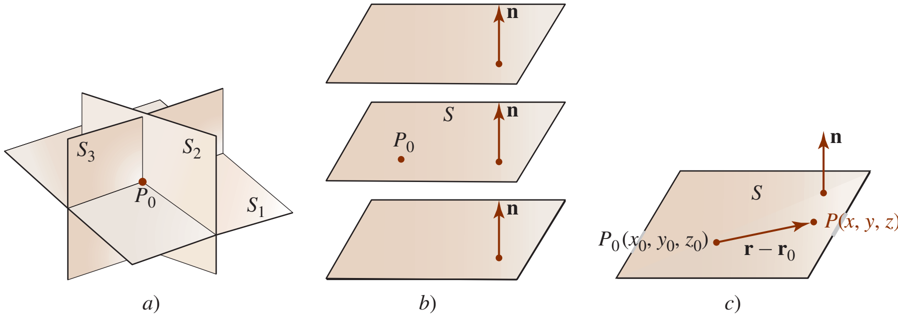


FIGURA 11.6.1 Un punto P_0 y un vector **n** determinan un plano

Ecuación rectangular En concreto, si el vector normal es $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, entonces (1) produce una **ecuación rectangular** o **cartesiana** del plano que contiene a $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0. \tag{2}$$

La ecuación (2) se denomina la forma **punto-normal** de la ecuación de un plano.

EJEMPLO 1 Ecuación de un plano

Determine una ecuación del plano que contiene al punto $(4, -1, 3)$ y es perpendicular al vector $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$.

Solución Se concluye de inmediato de (2) con $x_0 = 4$, $y_0 = -1$, $z_0 = 3$, $a = 2$, $b = 8$, $c = -5$ que

$$2(x - 4) + 8(y + 1) - 5(z - 3) = 0 \quad \text{o} \quad 2x + 8y - 5z + 15 = 0. \quad ■$$

La ecuación en (2) siempre puede escribirse como $ax + by + cz + d = 0$ identificando $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. De modo converso, se probará que una **ecuación lineal**

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{3}$$

a, b, c no todas cero, es un plano.

Teorema 11.6.1 Plano y vector normal

La gráfica de una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$, a, b, c no todas cero, es un plano con vector normal $\mathbf{n} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$.

DEMOSTRACIÓN Suponga que x_0, y_0 y z_0 son números que satisfacen la ecuación dada. Entonces $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ implica que $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$. Al sustituir este valor de d en la ecuación original obtenemos, después de simplificar,

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

o, en términos de vectores,

$$[a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}] \cdot [(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}] = 0.$$

Esta última ecuación implica que $a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ es normal al plano que contiene el punto (x_0, y_0, z_0) y el vector

$$(x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}. \quad ■$$

EJEMPLO 2 Vector normal a un plano

Al leer los coeficientes de x, y y z en la ecuación lineal $3x - 4y + 10z - 8 = 0$ obtenemos un vector normal

$$\mathbf{n} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$$

al plano. ■

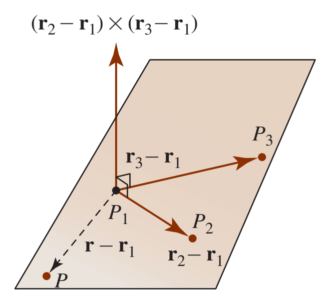


FIGURA 11.6.2 Plano determinado por tres puntos no colineales

Desde luego, un múltiplo escalar distinto de cero de un vector normal **n** sigue siendo perpendicular al plano.

Tres puntos no colineales P_1, P_2 y P_3 determinan también un plano S. Para obtener una ecuación del plano, sólo necesitamos formar dos vectores entre dos pares de puntos. Como se ilustra en la FIGURA 11.6.2, su producto cruz es un vector normal al plano que contiene estos vectores. Si $P(x, y, z)$ representa cualquier punto sobre el plano, y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$, $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OP}_1$, $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OP}_2$, $\mathbf{r}_3 = \overrightarrow{OP}_3$ entonces $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ (o, de esa manera, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_2$ o $\mathbf{r} - \mathbf{r}_3$) está en el plano. Por consiguiente,

$$[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \times (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)] \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) = 0 \tag{4}$$

es una ecuación vectorial del plano S. Se pide al lector no memorizar la última fórmula. El procedimiento es el mismo que en (1) con la excepción de que el vector normal al plano se obtiene por medio del producto cruz.

EJEMPLO 3 Ecuación de un plano

Encuentre una ecuación del plano que contiene a $(1, 0, -1)$, $(3, 1, 4)$ y $(2, -2, 0)$.

Solución Se necesitan tres vectores. Al juntar los puntos a la izquierda, como se muestra, se producen los vectores a la derecha. El orden en el cual se realiza la resta es irrelevante.

$$\left.\begin{matrix}(1, 0, -1)\\(3, 1, 4)\end{matrix}\right\}\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\left.\begin{matrix}(3, 1, 4)\\(2, -2, 0)\end{matrix}\right\}\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

$$\left.\begin{matrix}(2, -2, 0)\\(x, y, z)\end{matrix}\right\}\mathbf{w} = (x - 2)\mathbf{i} + (y + 2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Ahora,

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\2 & 1 & 5\\1 & 3 & 4\end{vmatrix} = -11\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

es un vector normal al plano que contiene los puntos dados. En consecuencia, de (1), una ecuación vectorial del plano es $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = 0$. La última ecuación produce

$$-11(x - 2) - 3(y + 2) + 5z = 0 \quad \text{o} \quad -11x - 3y + 5z + 16 = 0. \quad ■$$

Planos perpendicular y paralelo La FIGURA 11.6.3 ilustra la validez de la siguiente definición respecto a los planos **perpendicular** y **paralelo**.

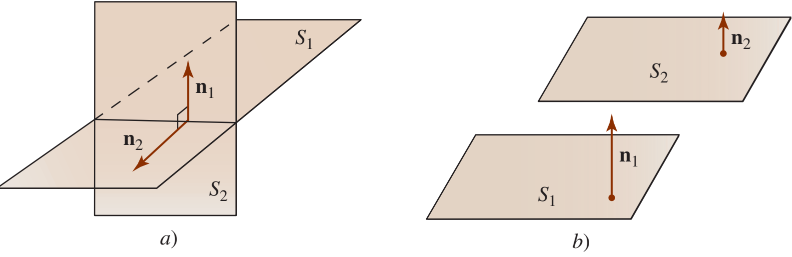


FIGURA 11.6.3 Planos perpendiculares *a*); planos paralelos *b*)

Definición 11.6.1 Planos perpendiculares y paralelos

Dos planos S_1 y S_2 con vectores normales $\mathbf{n}_1$ y $\mathbf{n}_2$, respectivamente, son

i) **perpendiculares** si $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ y

ii) **paralelos** si $\mathbf{n}_2 = k\mathbf{n}_1$, para algún escalar k distinto de cero.

EJEMPLO 4 Planos paralelos

Los tres planos dados por

$$S_1:\quad 2x - 4y + 8z = 7$$
$$S_2:\quad x - 2y + 4z = 0$$
$$S_3:\quad -3x + 6y - 12z = 1$$

son paralelos, ya que sus respectivos vectores normales

$$\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$$
$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \frac{1}{2}\mathbf{n}_1$$
$$\mathbf{n}_3 = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 12\mathbf{k} = -\frac{3}{2}\mathbf{n}_1$$

son paralelos. ■

Gráficas Las siguientes listas son algunas guías para trazar la gráfica de un plano.

Guías para graficar un plano

- Las gráficas de cada una de las ecuaciones $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, donde x_0, y_0 y z_0 son constantes, son planos perpendiculares, respectivamente, a los ejes x, y y z.
- Para graficar una ecuación lineal $ax + by + cz + d = 0$, encuentre las intersecciones x, y y z o, si es necesario, encuentre la traza del plano en cada plano de coordenadas.

Una **traza** de un plano en un plano de coordenadas es la línea de intersección del plano con el plano de coordenadas.

EJEMPLO 5 Gráfica

Grafique la ecuación $2x + 3y + 6z = 18$.

Solución Al dejar:

$$y = 0,\ z = 0 \text{ produce } x = 9$$
$$x = 0,\ z = 0 \text{ produce } y = 6$$
$$x = 0,\ y = 0 \text{ produce } z = 3.$$

Como se ilustra en la FIGURA 11.6.4, empleamos las intersecciones x, y y z (9, 0, 0), (0, 6, 0) y (0, 0, 3) para dibujar la gráfica del plano en el primer octante. ■

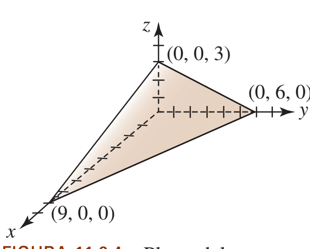


FIGURA 11.6.4 Plano del ejemplo 5

EJEMPLO 6 Gráfica

Grafique la ecuación $6x + 4y = 12$.

Solución En dos dimensiones la gráfica de la ecuación es una línea con intersección (2, 0) con el eje x e intersección (0, 3) con el eje y. Sin embargo, en tres dimensiones esta recta es la traza de un plano en el plano de coordenadas xy. Puesto que z no está especificada, puede ser cualquier número real. En otras palabras, (x, y, z) es un punto sobre el plano siempre que x y y estén relacionados por la ecuación dada. Como se muestra en la FIGURA 11.6.5, la gráfica es un plano paralelo al eje z. ■

$6x + 4y = 12$

FIGURA 11.6.5 Plano del ejemplo 6

EJEMPLO 7 Gráfica

Grafique la ecuación $x + y - z = 0$.

Solución Observe primero que el plano pasa por el origen (0, 0, 0). En este caso, la traza del plano en el plano xz ($y = 0$) es $z = x$, en tanto que su traza en el plano yz ($x = 0$) es $z = y$. El dibujo de estas dos rectas conduce a la gráfica dada en la FIGURA 11.6.6. ■

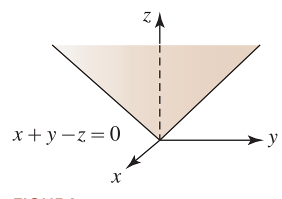


FIGURA 11.6.6 Plano del ejemplo 7

Dos planos S_1 y S_2 que no son paralelos deben intersecarse en una línea L. Vea la FIGURA 11.6.7. El ejemplo 8 ilustra una manera de encontrar ecuaciones paramétricas para la recta de intersección. En el ejemplo 9 vemos cómo encontrar un punto de intersección (x_0, y_0, z_0) de un plano S y una recta L. Vea la FIGURA 11.6.8.

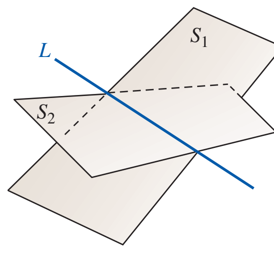


FIGURA 11.6.7 Dos planos que se intersecan

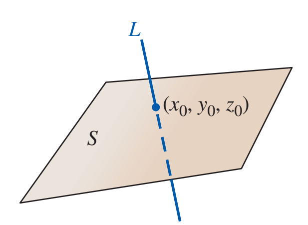


FIGURA 11.6.8 Intersección de una recta y un plano

EJEMPLO 8 Línea de intersección

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la línea de intersección $x - y + 2z = 1$ y $x + y + z = 3$.

Solución En un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, elegimos arbitrariamente una variable, digamos $z = t$, y se resuelve para x y y de

$$x - y = 1 - 2t$$
$$x + y = 3 - t.$$

Al resolver el sistema obtenemos

$$x = 2 - \frac{3}{2}t, \quad y = 1 + \frac{1}{2}t, \quad z = t.$$

Éstas son ecuaciones paramétricas de la recta de intersección L de los planos dados. La recta se muestra en rojo, el plano $x - y + 2z = 1$ es azul y el plano $x + y + z = 3$ es morado en la FIGURA 11.6.9. ■

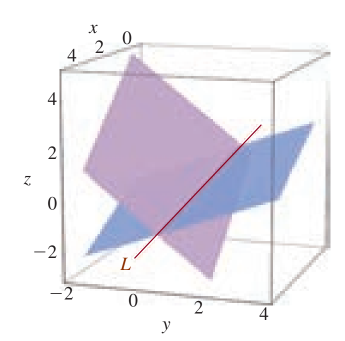


FIGURA 11.6.9 Recta L de intersección de dos planos en el ejemplo 8

La recta en el ejemplo 8 puede obtenerse de otra manera. Vea el problema 52 en los ejercicios 11.6.

EJEMPLO 9 Punto de intersección

Encuentre el punto de intersección del plano $3x - 2y + z = -5$ y la recta $x = 1 + t$, $y = -2 + 2t$, $z = 4t$.

Solución Si (x_0, y_0, z_0) denota el punto de intersección, entonces debe tenerse

$$3x_0 - 2y_0 + z_0 = -5 \quad \text{y} \quad x_0 = 1 + t_0, y_0 = -2 + 2t_0, z_0 = 4t_0$$

para algún número t_0. Al sustituir las últimas ecuaciones en la ecuación del plano encontramos que

$$3(1 + t_0) - 2(-2 + 2t_0) + 4t_0 = -5 \quad \text{o} \quad t_0 = -4.$$

De las ecuaciones paramétricas de la recta obtenemos entonces $x_0 = -3$, $y_0 = -10$ y $z_0 = -16$. El punto de intersección es $(-3, -10, -16)$. ■

Ejercicios 11.6 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-36.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una ecuación del plano que contenga el punto dado y sea perpendicular al vector que se indica.

1. $(5, 1, 3)$; $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$
2. $(1, 2, 5)$; $4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
3. $(6, 10, -7)$; $-5\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$
4. $(0, 0, 0)$; $6\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
5. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$; $6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$
6. $(-1, 1, 0)$; $-\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

En los problemas 7-12, determine, si es posible, una ecuación de un plano que contenga a los puntos dados.

7. $(3, 5, 2), (2, 3, 1), (-1, -1, 4)$
8. $(0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, -1)$
9. $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (3, 2, -1)$
10. $(0, 0, 3), (0, -1, 0), (0, 0, 6)$
11. $(1, 2, -1), (4, 3, 1), (7, 4, 3)$
12. $(2, 1, 2), (4, 1, 0), (5, 0, -5)$

En los problemas 13-22, determine una ecuación del plano que satisfaga las condiciones indicadas.

13. Contiene a (2, 3, −5) y es paralelo a $x + y - 4z = 1$

14. Contiene al origen y es paralelo a $5x - y + z = 6$

15. Contiene a (3, 6, 12) y es paralelo al plano *xy*

16. Contiene a (−7, −5, 18) y es perpendicular al eje *y*

17. Contiene las rectas $x = 1 + 3t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + t$; $x = 4 + 4s$, $y = 2s$, $z = 3 + s$

18. Contiene las rectas $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-5}{6}$; $\mathbf{r} = \langle 1, -1, 5\rangle + t\langle 1, 1, -3\rangle$

19. Contiene las rectas paralelas $x = 1 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 3 + t$; $x = 3 + s$, $y = 2s$, $z = -2 + s$

20. Contiene al punto (4, 0, −6) y la recta $x = 3t$, $y = 2t$, $z = -2t$

21. Contiene a (2, 4, 8) y es perpendicular a la recta $x = 10 - 3t$, $y = 5 + t$, $z = 6 - \frac{1}{2}t$

22. Contiene a (1, 1, 1) y es perpendicular a la recta que pasa por (2, 6, −3) y (1, 0, −2)

23. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares y cuáles son paralelos.

a) $2x - y + 3z = 1$ ***b***) $x + 2y + 2z = 9$

c) $x + y - \frac{3}{2}z = 2$ ***d***) $-5x + 2y + 4z = 0$

e) $-8x - 8y + 12z = 1$ ***f***) $-2x + y - 3z = 5$

24. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta que contiene a (−4, 1, 7) y es perpendicular al plano $-7x + 2y + 3z = 1$.

25. Determine cuáles de los siguientes planos son perpendiculares a la recta $x = 4 - 6t$, $y = 1 + 9t$, $z = 2 + 3t$.

a) $4x + y + 2z = 1$ ***b***) $2x - 3y + z = 4$

c) $10x - 15y - 5z = 2$ ***d***) $-4x + 6y + 2z = 9$

26. Determine cuáles de los siguientes planos es paralelo a la recta $(1 - x)/2 = (y + 2)/4 = z - 5$.

a) $x - y + 3z = 1$ ***b***) $6x - 3y = 1$

c) $x - 2y + 5z = 0$ ***d***) $-2x + y - 2z = 7$

En los problemas 27-30, encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos dados.

27. $5x - 4y - 9z = 8$, $x + 4y + 3z = 4$

28. $x + 2y - z = 2$, $3x - y + 2z = 1$

29. $4x - 2y - z = 1$, $x + y + 2z = 1$

30. $2x - 5y + z = 0$, $y = 0$

En los problemas 31-34, encuentre el punto de intersección del plano y la recta dados.

31. $2x - 3y + 2z = -7$; $x = 1 + 2t$, $y = 2 - t$, $z = -3t$

32. $x + y + 4z = 12$; $x = 3 - 2t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2 - \frac{1}{2}t$

33. $x + y - z = 8$; $x = 1$, $y = 2$, $z = 1 + t$

34. $x - 3y + 2z = 0$; $x = 4 + t$, $y = 2 + t$, $z = 1 + 5t$

En los problemas 35 y 36, encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto indicado y que es paralela a los planos dados.

35. $x + y - 4z = 2$, $2x - y + z = 10$; (5, 6, −12)

36. $2x + z = 0$, $-x + 3y + z = 1$; (−3, 5, −1)

En los problemas 37 y 38, encuentre una ecuación del plano que contiene a la recta dada y que es perpendicular al plano indicado.

37. $x = 4 + 3t$, $y = -t$, $z = 1 + 5t$; $x + y + z = 7$

38. $\dfrac{2-x}{3} = \dfrac{y+2}{5} = \dfrac{z-8}{2}$; $2x - 4y - z + 16 = 0$

En los problemas 39-44, grafique la ecuación dada.

39. $5x + 2y + z = 10$

40. $3x + 2z = 9$

41. $-y - 3z + 6 = 0$

42. $3x + 4y - 2z - 12 = 0$

43. $-x + 2y + z = 4$

44. $3x - y - 6 = 0$

45. Demuestre que la recta $x = -2t$, $y = t$, $z = -t$ es

a) paralela pero por arriba del plano $x + y - z = 1$,

b) paralela pero por debajo del plano $-3x - 4y + 2z = 8$.

46. Sea $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre el plano $ax + by + cz + d = 0$ y considere que **n** es un vector normal al plano. Vea la FIGURA 11.6.10. Demuestre que si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ es cualquier punto fuera del plano, entonces la **distancia *D* desde un punto a un plano** está dada por

$$D = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

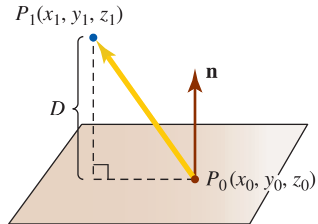


FIGURA 11.6.10 Distancia entre un punto y un plano en el problema 46

47. Emplee el resultado del problema 46 para encontrar la distancia del punto (2, 1, 4) al plano $x - 3y + z - 6 = 0$.

48. ***a***) Demuestre que los planos $x - 2y + 3z = 3$ y $-4x + 8y - 12z = 7$ son paralelos.

b) Encuentre la distancia entre los planos en el inciso *a*).

Como se muestra en la FIGURA 11.6.11, el **ángulo entre dos planos** se define como el ángulo agudo entre sus vectores normales. En los problemas 49 y 50, encuentre los ángulos entre los planos indicados.

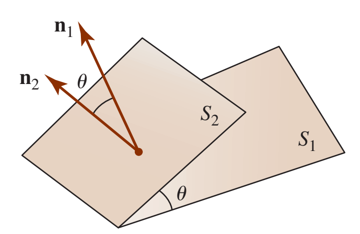


FIGURA 11.6.11 Ángulo entre dos planos en los problemas 49 y 50

49. $x - 3y + 2z = 14$, $-x + y + z = 10$

50. $2x + 6y + 3z = 13$, $4x - 2y + 4z = -7$

☰ Piense en ello

51. Si siempre se ha sentado en una mesa de cuatro patas que se mece, tal vez haya considerado sustituirla con una mesa de tres patas. ¿Por qué?

52. Vuelva a leer el ejemplo 8. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta L de intersección entre los dos planos utilizando el hecho de que L yace en ambos planos y por ello debe ser perpendicular al vector normal de cada plano. Si obtiene una respuesta que difiere de las ecuaciones en el ejemplo 8, demuestre que las respuestas son equivalentes.

53. ***a***) Encuentre una ecuación del plano cuyos puntos son equidistantes de $(1, -2, 3)$ y $(2, 5, -1)$.

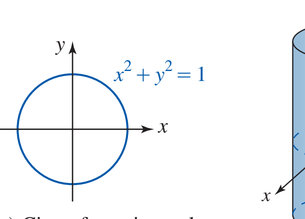
b) Encuentre la distancia entre el plano y los puntos dados en el inciso *a*).

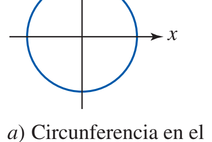
11.7 Cilindros y esferas

Introducción En el espacio bidimensional la gráfica de la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ es una circunferencia centrada en el origen del plano xy. Sin embargo, en el espacio tridimensional es posible interpretar la gráfica del conjunto

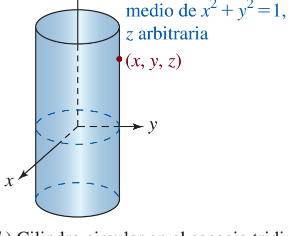
$$\{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, z \text{ arbitraria}\}$$

como una **superficie** que es el cilindro circular recto que se muestra en la FIGURA 11.7.1*b*).





a) Circunferencia en el espacio bidimensional



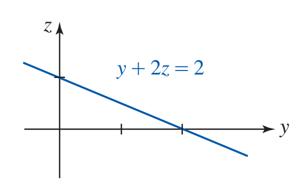
b) Cilindro circular en el espacio tridimensional

FIGURA 11.7.1 Interpretación de la ecuación de una circunferencia en los espacios bidimensional y tridimensional

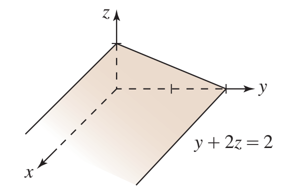
De modo similar, ya hemos visto en la sección 11.6 que la gráfica de una ecuación tal como $y + 2z = 2$ es una recta en el espacio bidimensional (el plano yz), pero en el espacio tridimensional la gráfica del conjunto

$$\{(x, y, z) | y + 2z = 2, x \text{ arbitraria}\}$$

es el plano perpendicular al plano yz mostrado en la FIGURA 11.7.2*b*). Las superficies de este tipo reciben un nombre especial.



a) Recta en el espacio bidimensional



b) Plano en el espacio tridimensional

FIGURA 11.7.2 Interpretación de una ecuación de una recta en los espacios bidimensional y tridimensional

Cilindro Las superficies ilustradas en las figuras 11.7.1 y 11.7.2 se llaman **cilindros**. Usamos el término *cilindro* en un sentido más general que el de un cilindro circular recto. Específicamente, si C es una curva en un plano y L es una recta no paralela al plano, entonces el conjunto de todos los puntos (x, y, z) generado al mover una línea que recorra a C paralela a L se denomina **cilindro**. La curva C recibe el nombre de **directriz** del cilindro. Vea la FIGURA 11.7.3.

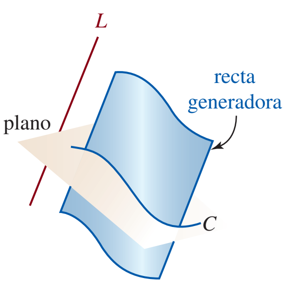


FIGURA 11.7.3 La recta en movimiento sobre C paralela a L genera un cilindro

Así, una ecuación de una curva en un plano de coordenadas, cuando se consideran tres dimensiones, es una ecuación de un cilindro perpendicular a ese plano de coordenadas.

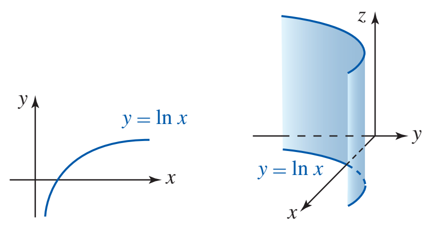
- Si las gráficas de $f(x, y) = c_1$, $g(y, z) = c_2$ y $h(x, z) = c_3$ son curvas en el espacio bidimensional de sus respectivos planos de coordenadas, entonces sus gráficas en el espacio tridimensional son superficies denominadas cilindros. Un cilindro se genera al mover una línea que recorre la curva paralela al eje de coordenadas que es representada por la variable que falta en su ecuación.

La FIGURA 11.7.4 muestra una curva C definida por $f(x, y) = c_1$ en el plano xy y una colección de líneas rojas llamado **bastidor** que representa diversas posiciones de una línea generadora que recorre a C mientras se mueve paralela al eje z.

FIGURA 11.7.4 Bastidor del cilindro $f(x, y) = c_1$

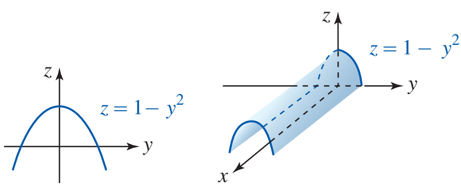
En el siguiente ejemplo comparamos la gráfica de una ecuación en un plano de coordenadas con su interpretación como un cilindro en el espacio tridimensional (FIGURAS 11.7.5-11.7.8). Como en la figura 11.7.2*b*), sólo se muestra una parte del cilindro.

EJEMPLO 1 Cilindros



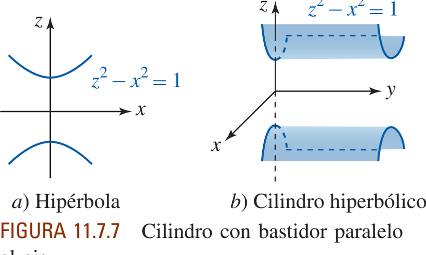
a) Curva logarítmica *b*) Cilindro logarítmico

FIGURA 11.7.5 Cilindro con bastidor paralelo al eje z



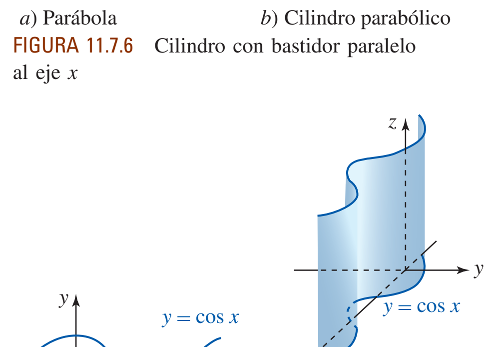
a) Parábola *b*) Cilindro parabólico

FIGURA 11.7.6 Cilindro con bastidor paralelo al eje x



a) Hipérbola *b*) Cilindro hiperbólico

FIGURA 11.7.7 Cilindro con bastidor paralelo al eje y



a) Curva senoidal *b*) Cilindro senoidal

FIGURA 11.7.8 Cilindro con bastidor paralelo al eje z

■

Esferas Como la circunferencia, una esfera puede definirse por medio de la fórmula de la distancia.

Definición 11.7.1 Esfera

Una **esfera** es el conjunto de todos los puntos $P(x, y, z)$ en el espacio tridimensional que son equidistantes de un punto fijo llamado **centro**.

Si r denota la distancia fija, o **radio** de la esfera, y si el centro es $P_1(a, b, c)$, entonces un punto $P(x, y, z)$ está sobre la esfera si y sólo si $[d(P_1, P)]^2 = r^2$, o

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2. \tag{1}$$

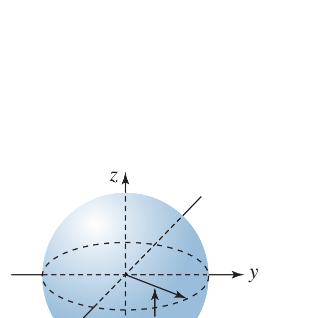


FIGURA 11.7.9 Esfera del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Esfera

Grafique $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Solución Identificamos $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ y $r^2 = 25 = 5^2$ en (1), y por ello la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ es una esfera de radio 5 cuyo centro está en el origen. La gráfica de la ecuación se ilustra en la FIGURA 11.7.9. ■

EJEMPLO 3 Esfera

Grafique $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 9$.

Solución En este caso identificamos $a = 5$, $b = 7$, $c = 6$ y $r^2 = 9$. De (1) advertimos que la gráfica $(x - 5)^2 + (y - 7)^2 + (z - 6)^2 = 3^2$ es una esfera con centro $(5, 7, 6)$ y radio 3. Su gráfica yace por completo en el primer octante y se muestra en la FIGURA 11.7.10. ■

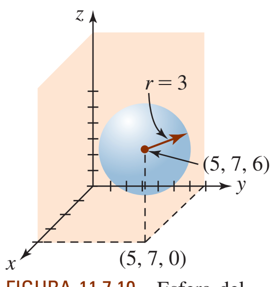


FIGURA 11.7.10 Esfera del ejemplo 3

FIGURA 11.7.11 Esfera tangente al plano $y = 0$ en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Ecuación de una esfera

Encuentre una ecuación de la esfera cuyo centro es $(4, -3, 0)$ que es tangente al plano xz.

Solución La distancia perpendicular desde el punto dado hasta el plano xz $(y = 0)$, y en consecuencia el radio de la esfera, es el valor absoluto de la coordenada y, $|-3| = 3$. Así, una ecuación de la esfera es

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 3^2.$$

Vea la FIGURA 11.7.11. ■

EJEMPLO 5 Centro y radio

Encuentre el centro y radio de una esfera cuya ecuación es

$$16x^2 + 16y^2 + 16z^2 - 16x + 8y - 32z + 16 = 0.$$

Solución Al dividir entre 16 y completar cuadrados en x, y y z obtenemos

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + (z - 1)^2 = \frac{5}{16}.$$

El centro y radio de la esfera son $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1\right)$ y $\frac{1}{4}\sqrt{5}$, respectivamente. ■

Traza de una superficie En la sección 11.6 vimos que la traza de un plano en un plano de coordenadas es la recta de intersección del plano con el plano de coordenadas. En general, la **traza de una superficie** en *cualquier* plano es la curva formada por la intersección de la superficie en el plano. Por ejemplo, en la figura 11.7.9 la traza de la esfera en el plano xy $(z = 0)$ es la circunferencia punteada $x^2 + y^2 = 25$. En los planos xz y yz, las trazas de las esferas son los círculos $x^2 + z^2 = 25$ y $y^2 + z^2 = 25$, respectivamente.

Ejercicios 11.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-37.

Fundamentos

En los problemas 1-16, dibuje la gráfica del cilindro indicado.

1. $y = x$
2. $z = -y$
3. $y = x^2$
4. $x^2 + z^2 = 25$
5. $y^2 + z^2 = 9$
6. $z = y^2$
7. $z = e^{-x}$
8. $z = 1 - e^y$
9. $y^2 - x^2 = 4$
10. $z = \cosh y$
11. $4x^2 + y^2 = 36$
12. $x = 1 - y^2$
13. $z = \operatorname{sen} x$
14. $y = \dfrac{1}{x^2}$
15. $yz = 1$
16. $z = x^3 - 3x$

En los problemas 17-20, dibuje la gráfica de la ecuación indicada.

17. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
18. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 16$
19. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$
20. $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 + (z - 5)^2 = 4$

En los problemas 21-24, encuentre el centro y el radio de la esfera con la ecuación dada.

21. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 6y - 4z - 7 = 0$
22. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4x - 12z + 9 = 0$
23. $x^2 + y^2 + z^2 - 16z = 0$
24. $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 0$

En los problemas 25-32, encuentre una ecuación de una esfera que satisface las condiciones dadas.

25. Centro $(-1, 4, 6)$; radio $\sqrt{3}$
26. Centro $(0, -3, 0)$; diámetro $\frac{5}{2}$
27. Centro $(1, 1, 4)$; tangente al plano xy
28. Centro $(5, 2, -2)$; tangente al plano yz
29. Centro sobre el eje y positivo; radio 2; tangente a $x^2 + y^2 + z^2 = 36$
30. Centro sobre la recta $x = 2t$, $y = 3t$, $z = 6t$, $t > 0$, a una distancia de 21 unidades del origen; radio 5
31. El diámetro tiene puntos frontera $(0, -4, 7)$ y $(2, 12, -3)$
32. Centro $(-3, 1, 2)$; pasando por el origen

En los problemas 33-38, describa geométricamente todos los puntos $P(x, y, z)$ cuyas coordenadas satisfacen la(s) condición(es) indicada(s).

33. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$, $1 \le z \le 3$
34. $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$, $z = 2$
35. $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$
36. $0 < (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 < 1$
37. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$
38. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9$, $z \le 0$

11.8 Superficies cuádricas

Introducción La ecuación de la esfera dada en (1) de la sección 11.7 es sólo un caso particular de la ecuación general de segundo grado en tres variables

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0, \tag{1}$$

donde $A, B, C, \ldots, J$ son constantes. La gráfica de una ecuación de segundo grado de la forma (1) que describe un conjunto real de puntos se dice que es una **superficie cuádrica**. Por ejemplo, tanto el cilindro elíptico $x^2/4 + y^2/9 = 1$ como el cilindro parabólico $z = y^2$ son superficies cuádricas. Concluimos este capítulo considerando las seis superficies cuádricas adicionales: el **elipsoide**, el **cono elíptico**, el **paraboloide elíptico**, el **paraboloide hiperbólico**, el **hiperboloide de una hoja** y el **hiperboloide de dos hojas**.

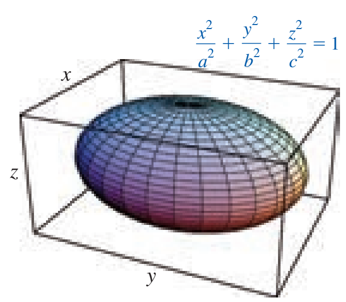
Elipsoide La gráfica de cualquier ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \tag{2}$$

se llama **elipsoide**. Cuando $a = b = c$, (2) es la ecuación de una esfera centrada en el origen. Para $|y_0| < b$, la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y_0^2}{b^2}$$

representa una familia de elipses (o circunferencias si $a = c$) paralelos al plano xz que se forman rebanando la superficie en planos $y = y_0$. Al elegir, a su vez, $x = x_0$ y $z = z_0$, encontramos que las rebanadas de la superficie son elipses (o círculos) paralelos, respectivamente, a los planos yz y xy. La FIGURA 11.8.1 resume una gráfica típica de un elipsoide junto con las trazas de la superficie en tres planos de coordenadas.



a) Gráfica generada con *Mathematica*

Plano de coordenadas	Traza
xy $(z = 0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$
xz $(y = 0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$
yz $(x = 0)$	elipse: $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$

traza xz
$y = y_0$
traza xy
traza yz

b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.1 Elipsoide

Cono elíptico La gráfica de una ecuación de la forma

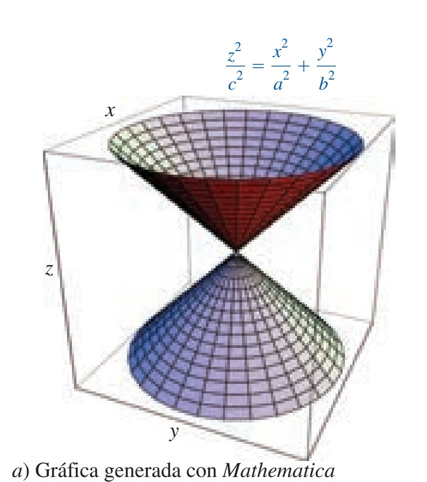
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad a > 0, b > 0, c > 0, \tag{3}$$

recibe el nombre de **cono elíptico** (o circular si el cono $a = b$). Para z_0 arbitraria, planos paralelos al plano xy rebanan la superficie en elipses cuyas ecuaciones son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0^2}{c^2}.$$

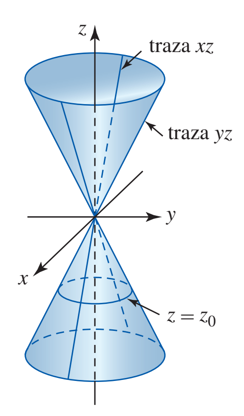
La FIGURA 11.8.2 resume una gráfica típica de un cono elíptico junto con las trazas en los planos de coordenadas.

Como veremos en seguida, hay dos tipos de paraboloides: elíptica e hiperbólica.



a) Gráfica generada con *Mathematica*

Plano de coordenadas	Traza
xy $(z=0)$	punto: (0, 0)
xz $(y=0)$	rectas: $z = \pm \frac{c}{a} x$
yz $(x=0)$	rectas: $z = \pm \frac{c}{b} y$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.2 Cono elíptico

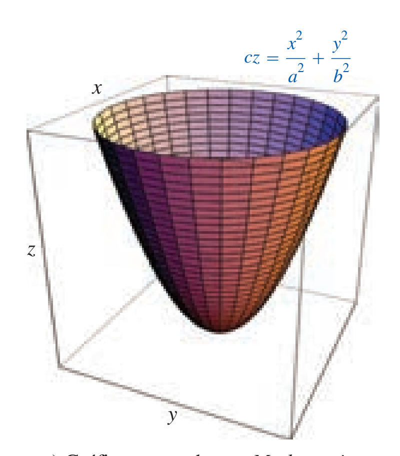
Paraboloide elíptico

La gráfica de una ecuación de la forma

$$cz = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad a > 0, b > 0, \tag{4}$$

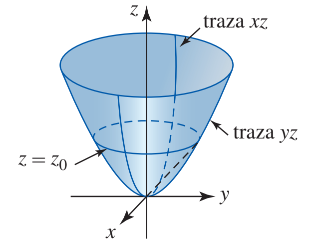
se denomina **paraboloide elíptico**. En la FIGURA 11.8.3*b*) advertimos que para $c > 0$, los planos $z = z_0 > 0$, paralelos al plano xy, cortan la superficie en elipses cuyas ecuaciones son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz_0.$$



a) Gráfica generada con *Mathematica*

Plano de coordenadas	Traza
xy $(z=0)$	punto: (0, 0)
xz $(y=0)$	parábola: $cz = \frac{x^2}{a^2}$
yz $(x=0)$	parábola: $cz = \frac{y^2}{b^2}$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.3 Paraboloide elíptico

Paraboloide hiperbólico

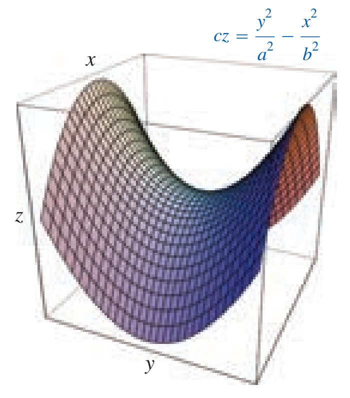
La gráfica de una ecuación de la forma

$$cz = \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}, \quad a > 0, b > 0, \tag{5}$$

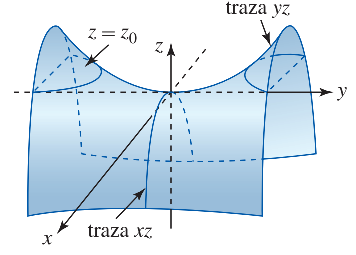
se conoce como **paraboloide hiperbólico**. Advierta que para $c > 0$, los planos $z = z_0$, paralelos al plano xy, cortan la superficie en hipérbolas cuyas ecuaciones son

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = cz_0.$$

La forma de silla característica de un paraboloide hiperbólico se muestra en la FIGURA 11.8.4.



Plano de coordenadas	Traza
xy $(z=0)$	rectas: $y = \pm \frac{a}{b} x$
xz $(y=0)$	parábola: $cz = -\frac{x^2}{b^2}$
yz $(x=0)$	parábola: $cz = \frac{y^2}{a^2}$



a) Gráfica generada con *Mathematica*

b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.4 Paraboloide hiperbólico

Hay dos tipos de hiperboloides: de una hoja y de dos hojas.

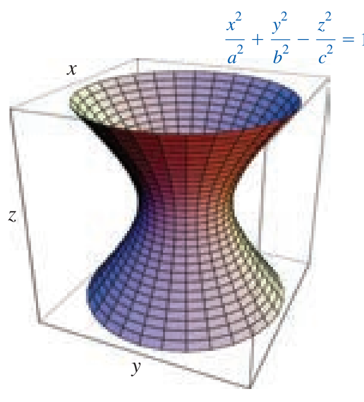
Hiperboloide de una hoja La gráfica de una ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0, c > 0, \tag{6}$$

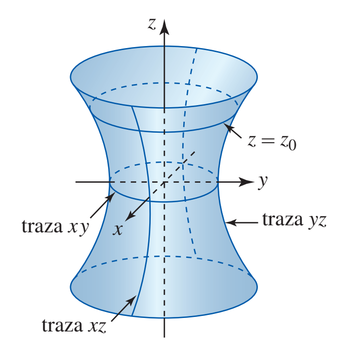
se llama **hiperboloide de una hoja**. En este caso, un plano $z = z_0$, paralelo al plano xy, corta la superficie en secciones transversales elípticas (o circulares si $a = b$). Las ecuaciones de estas elipses son

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z_0^2}{c^2}.$$

La elipse más pequeña, $z_0 = 0$, corresponde a la traza en el plano xy. Un resumen de las trazas y de la gráfica típica de (6) se proporciona en la FIGURA 11.8.5.



Plano de coordenadas	Traza
xy $(z=0)$	elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
xz $(y=0)$	hipérbola: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
yz $(x=0)$	hipérbola: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



a) Gráfica generada con *Mathematica*

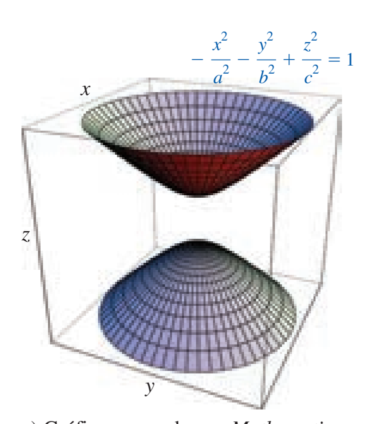
b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.5 Hiperboloide de una hoja

Hiperboloide de dos hojas Como se observa en la FIGURA 11.8.6, una gráfica de

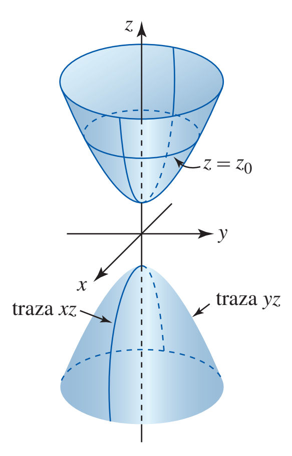
$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > 0, b > 0, c > 0, \tag{7}$$

se llama apropiadamente **hiperboloide de dos hojas**. Para $|z_0| > c$, la ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z_0^2/c^2 - 1$ describe la curva de intersección elíptica de la superficie con el plano $z = z_0$.



a) Gráfica generada con *Mathematica*

Plano de coordenadas	Traza
xy $(z=0)$	sin lugar
xz $(y=0)$	hipérbola: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
yz $(x=0)$	hipérbola: $-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



b) Trazas de superficie en los planos de coordenadas

FIGURA 11.8.6 Hiperboloide de dos hojas

Variación de las ecuaciones Al intercambiar la posición de las variables en las ecuaciones (2)-(7) no se cambia la naturaleza básica de una superficie, *aunque* cambia la orientación de la superficie en el espacio. Por ejemplo, gráficas de las ecuaciones

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{y} \quad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{8}$$

siguen siendo hiperboloides de una hoja. De manera similar, los dos signos menos en (7) que caracterizan a los hiperboloides de dos hojas pueden ocurrir en cualquier parte en la ecuación. Similarmente,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cy \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=cx \tag{9}$$

son paraboloides. Las gráficas de ecuaciones de la forma

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=cy \quad \text{y} \quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=cx \tag{10}$$

son paraboloides hiperbólicos.

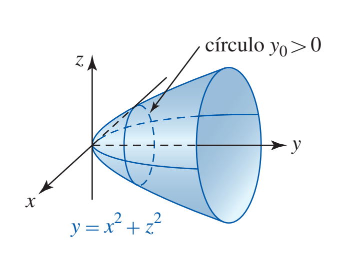
EJEMPLO 1 Superficies cuádricas

Identifique

a) $y=x^2+z^2$ y ***b***) $y=x^2-z^2$.

Compare las gráficas.

Solución De las primeras ecuaciones en (9) y (10) con $a=1$, $b=1$ y $c=1$, identificamos la gráfica de *a*) como un paraboloide y la gráfica de *b*) como un paraboloide hiperbólico. En el caso de la ecuación *a*), un plano $y=y_0$, $y_0>0$, corta la superficie en círculos cuyas ecuaciones son $y_0=x^2+z^2$. Por otro lado, un plano $y=y_0$ corta la gráfica de la ecuación *b*) en hipérbolas $y_0=x^2-z^2$. Las gráficas se comparan en la FIGURA 11.8.7. ■



a)

hipérbola $y_0<0$
$y=x^2-z^2$
hipérbola $y_0>0$

b)

FIGURA 11.8.7 Superficie del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Superficies cuádricas

Identifique

a) $2x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$ y ***b***) $-2x^2 + 4y^2 + z^2 = -36.$

Solución

a) De $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}z^2 = y^2$, se identifica la gráfica de un cono elíptico.

b) De $\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{9}y^2 - \frac{1}{36}z^2 = 1$, se identifica la gráfica como un hiperboloide de dos hojas. ■

Origen en (h, k, l) Cuando el origen (0, 0, 0) se traslada a (h, k, l), las ecuaciones de las superficies cuádricas se convierten en

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} + \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \quad \leftarrow \text{elipsoide}$$

$$c(z-l) = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} \quad \leftarrow \text{paraboloide}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(z-l)^2}{c^2} = 1 \quad \leftarrow \text{hiperboloide de una hoja}$$

etcétera. Es posible que usted tenga que completar el cuadrado para poner una ecuación de segundo grado en una de estas formas.

EJEMPLO 3 Paraboloide

Grafique $z = 4 - x^2 - y^2$.

Solución Al escribir la ecuación como

$$-(z-4) = x^2 + y^2$$

reconocemos la ecuación de un paraboloide. El signo menos enfrente del término en el lado izquierdo de la igualdad indica que la gráfica del paraboloide abre hacia abajo a partir de (0, 0, 4). Vea la FIGURA 11.8.8. ■

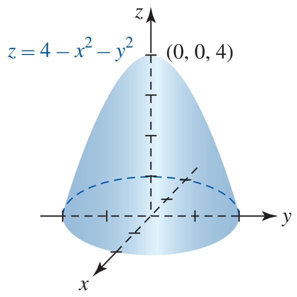


FIGURA 11.8.8 Paraboloide del ejemplo 3

Superficies de revolución En las secciones 6.3 y 6.4 vimos que una superficie S podría generarse rotando una curva plana C alrededor de un eje. En la discusión que sigue se encontrarán ecuaciones de **superficies de revolución** cuando C es una curva en un plano de coordenadas y el eje de revolución es un eje de coordenadas.

En aras de la discusión, se va a suponer que $f(y, z) = 0$ es una ecuación de una curva C en el plano yz y que C se rota en torno al eje z de modo que se genera una superficie S. También se supondrá por el momento que las coordenadas y y z de los puntos sobre C son no negativas. Si (x, y, z) denota un punto general sobre S que resulta de rotar el punto $(0, y_0, z)$ en C, entonces se advierte de la FIGURA 11.8.9 que la distancia de (x, y, z) a $(0, 0, z)$ es la misma que la distancia de $(0, y_0, z)$ a $(0, 0, z)$; esto es, $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$. Del hecho de que $f(y_0, z) = 0$ llegamos a una ecuación para S:

$$f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0. \tag{11}$$

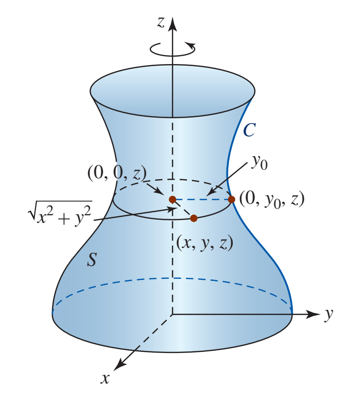


FIGURA 11.8.9 Superficie S de revolución

Es posible, desde luego, que una curva en un plano de coordenadas se rote en torno a cada eje de coordenadas. Si la curva C en el plano yz definida por $f(y, z) = 0$ se rota ahora alrededor del eje y, puede demostrarse que una ecuación de la superficie de revolución resultante es

$$f\left(y, \sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0. \tag{12}$$

Por último, notamos que si hay puntos $(0, y, z)$ sobre C para los cuales las coordenadas y o z son negativas, entonces se sustituye $\sqrt{x^2 + y^2}$ en (11) por $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ y $\sqrt{x^2 + z^2}$ en (12) por $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$.

Las ecuaciones de superficies de revolución generadas cuando una curva en el plano xy o xz se rota en torno a un eje de coordenadas son análogas a (11) y (12). Como muestra la siguiente

tabla, una ecuación de una superficie generada al rotar una curva en un plano de coordenadas alrededor de

$$\left.\begin{aligned} x &= \text{eje} \\ y &= \text{eje} \\ z &= \text{eje} \end{aligned}\right\} \quad \text{implica el término} \quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{y^2 + z^2} \\ &\sqrt{x^2 + z^2} \\ &\sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}\right.$$

Ecuación de la curva C	Eje de revolución	Ecuación de la superficie S
$f(x, y) = 0$	eje x	$f\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
	eje y	$f\left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y\right) = 0$
$f(x, z) = 0$	eje x	$f\left(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}\right) = 0$
	eje z	$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$
$f(y, z) = 0$	eje y	$f\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$
	eje z	$f\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$

EJEMPLO 4 Paraboloide de revolución

a) En el ejemplo 1, la ecuación $y = x^2 + z^2$ puede escribirse como

$$y = \left(\pm\sqrt{x^2 + z^2}\right)^2.$$

En consecuencia, de acuerdo con la tabla anterior se advierte que la superficie se genera al rotar ya sea la parábola $y = x^2$ o la parábola $y = z^2$ en torno al eje y. La superficie que se muestra en la figura 11.8.7*a*) se denomina **paraboloide de revolución**.

b) En el ejemplo 3, la ecuación $-(z - 4) = x^2 + y^2$ puede escribirse como

$$-(z - 4) = \left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2.$$

La superficie es también un paraboloide de revolución. En este caso la superficie se genera al rotar ya sea la parábola $-(z - 4) = x^2$ o la parábola $-(z - 4) = y^2$ alrededor del eje z. ■

EJEMPLO 5 Elipsoide de revolución

La gráfica de $4x^2 + y^2 = 16$ se rota en torno al eje x. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

Solución La ecuación dada tiene la forma $f(x, y) = 0$. Puesto que el eje de revolución es el eje x, vemos de la tabla que una ecuación de la superficie de revolución puede encontrarse al sustituir y por $\pm\sqrt{y^2 + z^2}$. Se concluye que

$$4x^2 + \left(\pm\sqrt{y^2 + z^2}\right)^2 = 16 \qquad \text{o} \qquad 4x^2 + y^2 + z^2 = 16.$$

La superficie se denomina **elipsoide de revolución**. ■

EJEMPLO 6 Cono

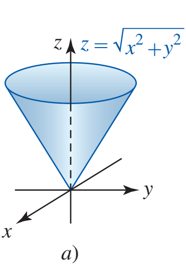
La gráfica de $z = y$, $y \geq 0$, se rota en torno al eje z. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

Solución Puesto que no hay punto sobre la gráfica de $z = y$, $y \geq 0$, con coordenada y negativa, obtenemos una ecuación de la superficie de revolución al sustituir $\sqrt{x^2 + y^2}$ por y:

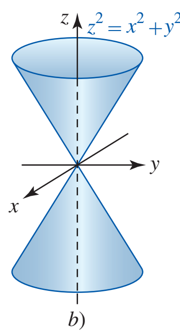
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (13)$$ ■

Observe que (13) no es lo mismo que $z^2 = x^2 + y^2$. Técnicamente la gráfica de (3) es un cono **con dos mantos** o un cono completo; las porciones del cono sobre y debajo del vértice se denominan **mantos**. Si se resuelve (3) para z en términos de x y y, obtenemos ecuaciones de conos de **un manto**. Por ejemplo, al resolver $z^2 = x^2 + y^2$ encontramos que $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y

$z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ que son, a su vez, ecuaciones del manto superior y del manto inferior del cono. Así, la gráfica de (13) es el cono de un manto de la FIGURA 11.8.10*a*).



a)



b)

FIGURA 11.8.10 Cono de un solo manto *a*); cono de doble manto en *b*)

$\overrightarrow{OP}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) La gráfica de $z = xy$ también es un paraboloide hiperbólico. En realidad, es posible demostrar que la superficie $z = xy$ es congruente con el paraboloide hiperbólico $z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2$ por medio de una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj de los ejes x y y a través de un ángulo de $\pi/4$ radianes en torno al eje z.

ii) El hiperboloide y el paraboloide hiperbólico se encuentran a menudo en la ingeniería arquitectónica. La forma de la torre del puerto de Kobe, Japón, es un hiperboloide de una hoja. Durante años la superficie que se presenta en la FIGURA 11.8.11 se usó en diseños de techos de casas e incluso de gasolineras. El más famoso fue la casa Catalano construida en Raleigh, Carolina del Norte, en 1954. Visite www.trianglemodernisthouses.com/catalano.htm para encontrar fotos detalladas. Por último, si observa con cuidado las papas fritas, especialmente las papas fritas Pringles de tamaño uniforme, advertirá la forma de un paraboloide hiperbólico.

iii) La superficie del espejo de un telescopio reflector se pule para darle forma de un paraboloide de revolución.


Torre del puerto de Kobe, Japón


Casa Catalano, 1954

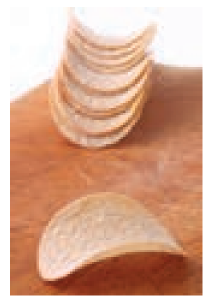

Papas fritas Pringles


FIGURA 11.8.11 Superficie $z = xy$

Ejercicios 11.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-37.

Fundamentos

En los problemas 1-14, identifique y grafique la superficie cuádrica.

1. $x^2 + y^2 = z$
2. $-x^2 + y^2 = z^2$
3. $9x^2 + 36y^2 + 4z^2 = 36$
4. $x^2 + y^2 - z^2 = -4$
5. $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$
6. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$
7. $y^2 + 5z^2 = x^2$
8. $-9x^2 + 16y^2 = 144z$
9. $y = 4x^2 - z^2$
10. $9z + x^2 + y^2 = 0$
11. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$
12. $-x^2 + 9y^2 + z^2 = 9$
13. $y^2 + 4z^2 = x$
14. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

En los problema 15-18, grafique la superficie cuádrica.

15. $z = 3 + x^2 + y^2$
16. $y + x^2 + 4z^2 = 4$
17. $(x - 4)^2 + (y - 6)^2 - z^2 = 1$
18. $5x^2 + (y - 5)^2 + 5z^2 = 25$

En los problemas 19-22, la ecuación indicada es una ecuación de una superficie de revolución obtenida al rotar una curva C en un plano de coordenadas alrededor de un eje de coordenadas. Encuentre una ecuación para C e identifique el eje de revolución.

19. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
20. $-9x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$
21. $y = e^{x^2+z^2}$
22. $x^2 - y^2 = \operatorname{sen}^2 z$

En los problemas 23-30, la gráfica de la ecuación dada se rota en torno al eje que se indica. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución.

23. $y = 2x$; eje y
24. $y = \sqrt{z}$; eje y
25. $z = 9 - x^2, x \geq 0$; eje x
26. $z = 1 + y^2, y \geq 0$; eje z
27. $x^2 - z^2 = 4$; eje x
28. $3x^2 + 4z^2 = 12$; eje z
29. $z = \ln y$; eje z
30. $xy = 1$; eje x

31. ¿Cuál de las superficies en los problemas 1-14 son superficies de revolución? Identifique los ejes de revolución de cada superficie.

32. Dibuje una gráfica de la ecuación en el problema 22 para $0 \leq z \leq 2\pi$.

En los problemas 33 y 34, compare las gráficas de las ecuaciones dadas.

33. $z + 2 = -\sqrt{x^2 + y^2}$, $(z + 2)^2 = x^2 + y^2$

34. $y - 1 = \sqrt{x^2 + z^2}$, $(y - 1)^2 = x^2 + z^2$

35. Considere el paraboloide

$$z - c = -\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right), \quad c > 0.$$

a) El área de una elipse $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$ es πAB. Emplee este hecho para expresar el área de una sección transversal perpendicular al eje z como una función de z, $z \leq c$.

b) Utilice el método de rebanadas (vea la sección 6.3) para encontrar el volumen del sólido acotado por el paraboloide y el plano xy.

36. ***a***) Utilice el método del rebanadas como en el inciso *b*) del problema 35 para encontrar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

b) ¿Cuál sería su respuesta en el inciso *a*) si $a = b = c$?

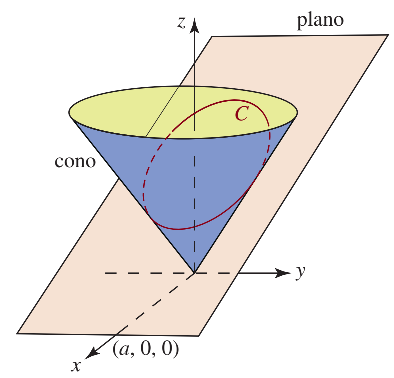
37. Determine los puntos donde la recta

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-6}{3/2}$$

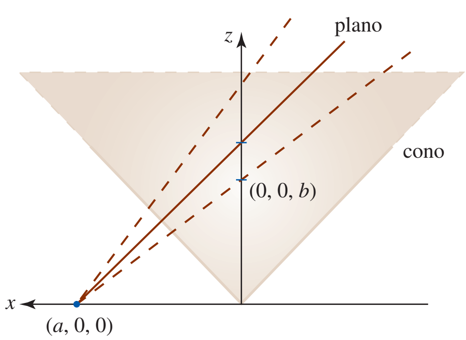
interseca al elipsoide $x^2/9 + y^2/36 + z^2/81 = 1$.

☰ Proyectos

38. Repaso de secciones cónicas En la introducción a la sección 10.1 se definió informalmente una sección cónica (círculo, elipse, parábola e hipérbola) como la curva de intersección de un plano y un cono de doble manto. Con el conocimiento recién adquirido de ecuaciones de planos y conos usted puede demostrar realmente el enunciado anterior. Por simplicidad se considerará un cono de un solo manto con la ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Es bastante sencillo ver que un plano $z = a$, $a > 0$ paralelo al plano xy corta al cono en un círculo. Al sustituir $z = a$ en la ecuación del cono obtenemos, después de simplificar, $x^2 + y^2 = a^2$. Esta última ecuación es un círculo de radio a y es la ecuación de la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección del plano con el cono. Suponga ahora un plano definido por $z = b - (b/a)x$ que pasa por el cono como se indica en la FIGURA 11.8.12*a*). Investigue cómo demostrar que la curva C de intersección es ya sea una parábola, una elipse o una hipérbola. Considere casos como los que sugieren las distintas posiciones del plano que se muestra en la figura 11.8.12*b*). Es probable que usted tenga que profundizar un poco respecto a sus ideas iniciales.



a) C yace en el plano de intersección con el cono



b) Vista de la sección transversal

FIGURA 11.8.12 Intersección de planos con un cono de un manto

39. Esferoides

a) Escriba un breve artículo en el que se analice en qué condiciones la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

describe un **esferoide achatado** y un **esferoide prolato**.

b) Relacione estas dos superficies con el concepto de una superficie de revolución.

c) El planeta Tierra es un ejemplo de un esferoide achatado. Compare el radio polar de la Tierra con su radio ecuatorial.

d) Proporcione un ejemplo de un esferoide prolato.

Revisión del capítulo 11

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-38.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-20, indique si el enunciado que se indica es verdadero (V) o falso (F).

1. Los vectores $\langle -4, -6, 10\rangle$ y $\langle -10, -15, 25\rangle$ son paralelos. _____

2. En el espacio tridimensional cualesquiera tres puntos distintos determinan un plano. _____

3. La recta $x = 1 + 5t$, $y = 1 - 2t$, $z = 4 + t$ y el plano $2x + 3y - 4z = 1$ son perpendiculares. _____
4. Los vectores distintos de cero **a** y **b** son paralelos si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. _____
5. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$, el ángulo entre **a** y **b** es obtuso. _____
6. Si **a** es un vector unitario, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$. _____
7. Una recta en el espacio tridimensional puede tener muchas ecuaciones vectoriales diferentes. _____
8. El punto terminal del vector $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ está en el punto terminal de **a**. _____
9. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ _____
10. Si **a**, **b**, **c** y **d** son vectores coplanares distintos de cero, entonces $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{0}$. _____
11. Los planos $x + 2y - z = 5$ y $-2x - 4y + 2z = 1$ son paralelos. _____
12. Dos rectas perpendiculares L_1 y L_2 se intersecan. _____
13. La superficie $z = x^2$ es un cilindro. _____
14. La traza de un elipsoide $x^2/9 + y^2/2 + z^2/2 = 1$ en el plano yz es un círculo. _____
15. Los cuatro puntos (0, 1, 2), (1, −1, 1), (3, 2, 6), (2, 1, 2) yacen en el mismo plano. _____
16. En general, para vectores distintos de cero **a** y **b** en el espacio tridimensional, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \times \mathbf{a}$. _____
17. La traza de la superficie $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$ en el plano yz es un círculo. _____
18. $x^2 + 9y^2 + z^2 = 1$ es una superficie de revolución. _____
19. Si **a** y **b** son vectores ortogonales distintos de cero, entonces $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. _____
20. Si **a** es un vector distinto de cero y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$, entonces $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-24, llene los espacios en blanco.

1. La suma de $3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ y $6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ es ________.
2. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, los vectores distintos de cero **a** y **b** son ________.
3. $(-\mathbf{k}) \times (5\mathbf{j}) =$ ________
4. $\mathbf{i} \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) =$ ________
5. $|-12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}| =$ ________
6. $\mathbf{k} \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) =$ ________
7. $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} =$ ________
8. $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$ ________
9. Un vector que es normal al plano $-6x + y - 7z + 10 = 0$ es ________.
10. La esfera más grande con centro (4, 3, 7) cuyo interior yace enteramente en el primer octante tiene radio **r** = ________.
11. El punto de intersección de la recta $x - 1 = (y + 2)/3 = (z + 1)/2$ y el plano $x + 2y - z = 13$ es ________.
12. Un vector unitario que tiene la dirección opuesta de $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ es ________.
13. Si $\overrightarrow{P_1P_2} = \langle 3, 5, -4\rangle$ y P_1 tienen coordenadas (2, 1, 7), entonces las coordenadas de P_2 son ________.
14. El punto medio del segmento de recta entre $P_1(4, 3, 10)$ y $P_2(6, -2, -5)$ tiene coordenadas ________.
15. Si $|\mathbf{a}| = 7.2$, $|\mathbf{b}| = 10$ y el ángulo entre **a** y **b** es de 135°, entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$ ________.
16. Si $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 0\rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 2, 1\rangle$ y $\mathbf{c} = \langle 0, -2, 2\rangle$, entonces $\mathbf{a} \cdot (2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}) =$ ________.
17. Las intersecciones con los ejes x, y y z del plano $2x - 3y + 4z = 24$ son, respectivamente, ________.
18. El ángulo θ entre los vectores $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$ es ________.
19. El área de un triángulo con dos lados dados por $\mathbf{a} = \langle 1, 3, -1\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 2, -1, 2\rangle$ es ________.
20. Una ecuación de una esfera con centro (−5, 7, −9) y radio $\sqrt{6}$ es ________.
21. La distancia del plano $y = -5$ al punto (4, −3, 1) es ________.
22. Los vectores $\langle 1, 3, c\rangle$ y $\langle -2, -6, 5\rangle$ son paralelos para $c =$ ________ y ortogonales para $c =$ ________.

23. La superficie $x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4y - 12z = 0$ es un(a) ________.

24. La traza de la superficie $y = x^2 - z^2$ en el plano $z = 1$ es un(a) ________.

C. Ejercicios

1. Encuentre un vector unitario que sea perpendicular a $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

2. Encuentre los cosenos directores y los ángulos directores del vector $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} - \frac{1}{4}\mathbf{k}$.

En los problemas 3-6 considere $\mathbf{a} = \langle 1, 2, -2\rangle$ y $\mathbf{b} = \langle 4, 3, 0\rangle$. Determine el número o vector indicado.

3. $\text{comp}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}$ **4.** $\text{proy}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ **5.** $\text{proy}_{\mathbf{b}}2\mathbf{a}$ **6.** proyección de $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ortogonal a $\mathbf{b}$

En los problemas 7-12, identifique la superficie cuya ecuación se indica.

7. $x^2 + 4y^2 = 16$ **8.** $y + 2x^2 + 4z^2 = 0$ **9.** $x^2 + 4y^2 - z^2 = -9$

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 10z$ **11.** $9z - x^2 + y^2 = 0$ **12.** $2x - 3y = 6$

13. Encuentre una ecuación de la superficie de revolución que se obtiene al rotar la gráfica de $x^2 - y^2 = 1$ alrededor del eje y. Alrededor del eje x. Identifique la superficie en cada caso.

14. Una superficie de revolución tiene una ecuación $y = 1 + \sqrt{x^2 + z^2}$. Encuentre una ecuación de una curva C en un plano de coordenadas que, cuando se rote alrededor de un eje de coordenadas, genere la superficie.

15. Sea $\mathbf{r}$ el vector posición de un punto variable $P(x, y, z)$ en el espacio y sea $\mathbf{a}$ un vector constante. Determine la superficie descrita por las siguientes ecuaciones vectoriales:
a) $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = 0$ ***b)*** $(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = 0$.

16. Use el producto punto para determinar si los puntos $(4, 2, -2)$, $(2, 4, -3)$ y $(6, 7, -5)$ son vértices de un triángulo rectángulo.

17. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta que pasa por el punto $(7, 3, -5)$ que es paralela a $(x - 3)/4 = (y + 4)/(-2) = (z - 9)/6$.

18. Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por los puntos $(5, -9, 3)$ que es perpendicular al plano $8x + 3y - 4z = 13$.

19. Demuestre que las rectas $x = 1 - 2t, y = 3t, z = 1 + t$ y $x = 1 + 2s, y = -4 + s, z = -1 + s$ se intersecan y son perpendiculares.

20. Encuentre una ecuación del plano que contiene a los puntos $(0, 0, 0)$, $(2, 3, 1)$, $(1, 0, 2)$.

21. Encuentre una ecuación del plano que contiene a las rectas $x = t, y = 4t, z = -2t$ y $x = 1 + t, y = 1 + 4t, z = 3 - 2t$.

22. Determine una ecuación del plano que contiene a $(1, 7, -1)$ y que es perpendicular a la recta de intersección de $-x + y - 8z = 4$ y $3x - y + 2z = 0$.

23. Encuentre una ecuación del plano que contiene a $(1, -1, 2)$ y que es paralela a los vectores $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ y $2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$.

24. Encuentre una ecuación de una esfera para la cual el segmento de recta $x = 4 + 2t, y = 7 + 3t, z = 8 + 6t, -1 \leq t \leq 0$, es un diámetro.

25. Demuestre que los tres vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + \mathbf{k}$ son coplanares.

26. Considere el triángulo recto cuyos lados son los vectores $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, y $\mathbf{c}$ mostrados en la FIGURA 11.R.1. Demuestre que el punto medio M de la hipotenusa es equidistante de los tres vértices del triángulo.

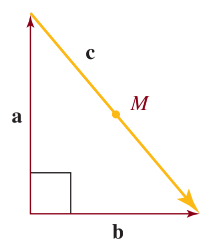


FIGURA 11.R.1 Triángulo del problema 26

27. ***a***) La fuerza **F** que actúa sobre una partícula de carga q que se mueve con velocidad **v** por un campo magnético **B** está dada por $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Encuentre **F** si **v** actúa a lo largo del eje y positivo y **B** actúa a lo largo del eje x positivo. Suponga que $|\mathbf{v}| = v$ y $|\mathbf{B}| = B$.

b) El momento angular **L** de una partícula de masa m que se mueve con velocidad lineal **v** en un círculo de radio **r** está dado por $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$, donde **r** es perpendicular a **v**. Emplee métodos vectoriales para resolver respecto a **v** en términos de **L**, **r** y m.

28. Una fuerza constante de 10 N en la dirección de $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ mueve un bloque sobre una superficie sin fricción desde $P_1(4, 1, 0)$ hasta $P_2(7, 4, 0)$. Suponga que la distancia se mide en metros. Determine el trabajo realizado.

29. En el problema 28 calcule el trabajo realizado al mover el bloque entre los mismos puntos si otra fuerza constante de 50 N en la dirección de $\mathbf{b} = \mathbf{i}$ actúa simultáneamente con la fuerza original.

30. Una bola uniforme de 50 lb de peso se soporta por medio de dos planos sin fricción como se indica en la FIGURA 11.R.2. Considere que la fuerza ejercida por el plano de soporte S_1 sobre la bola es $\mathbf{F}_1$ y que la fuerza ejercida por el plano S_2 es $\mathbf{F}_2$. Puesto que la bola se mantiene en equilibrio, se debe tener que $\mathbf{w} + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{w} = -50\mathbf{j}$. Determine las magnitudes de las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. [*Sugerencia*: Suponga que las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$ son normales a los planos S_1 y S_2, respectivamente, y que actúan a lo largo de las líneas que pasan por el centro C de la bola. Sitúe el origen de un sistema de coordenadas bidimensional en C.]

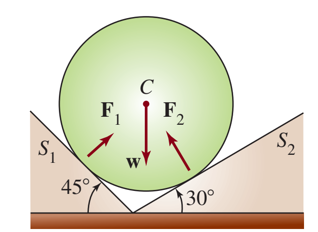
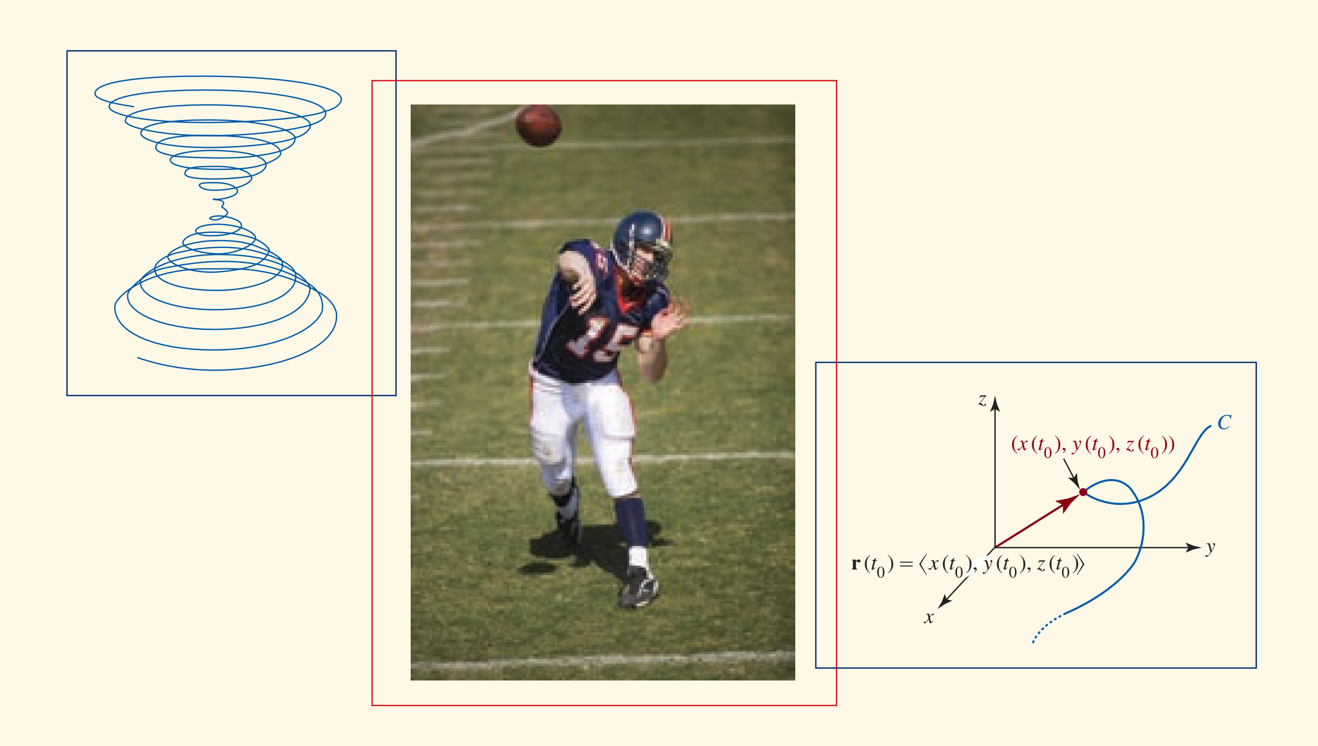


FIGURA 11.R.2 Bola del problema 30

Capítulo 12

Funciones de valores vectoriales



En este capítulo Una curva en el plano así como una curva *C* en el espacio tridimensional pueden definirse mediante ecuaciones paramétricas. Al emplear las funciones como componentes en un conjunto de ecuaciones paramétricas, podemos construir una función de valores vectoriales cuyos valores son los vectores de posición de los puntos sobre la curva *C*. En este capítulo consideraremos el cálculo y las aplicaciones de estas funciones vectoriales.

12.1 Funciones vectoriales

Introducción Vimos en la sección 10.2 que una curva C en el plano xy puede parametrizarse mediante dos ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad a \le t \le b. \tag{1}$$

En ciencias e ingeniería muchas veces es conveniente introducir un vector **r** con las funciones f y g como componentes:

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{j} = \langle 0, 1 \rangle$. En esta sección se estudian los análogos de (1) y (2) en tres dimensiones.

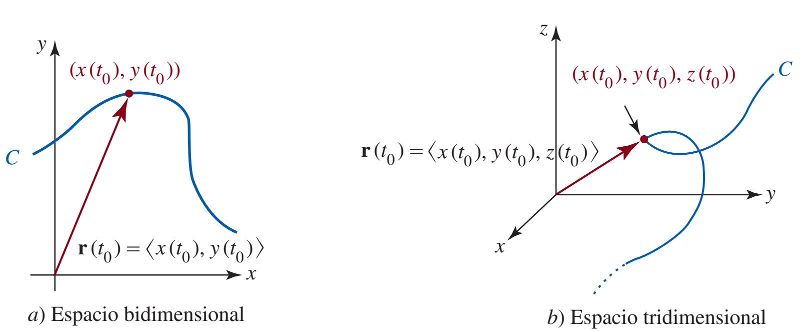
Funciones de valores vectoriales Una curva C en el espacio tridimensional, o una **curva espacial**, se parametriza mediante tres ecuaciones

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \le t \le b. \tag{3}$$

Como en la sección 10.2, la **orientación** de C corresponde a *valores crecientes* del parámetro t. Al emplear las funciones en (3) como componentes, el equivalente en el espacio tridimensional de (2) es

$$\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}, \tag{4}$$

donde $\mathbf{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\mathbf{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$ y $\mathbf{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$. Afirmamos que **r** en (2) y (4) es una **función de valores vectoriales**, o simplemente una **función vectorial**. Como se ilustra en la FIGURA 12.1.1, para un número dado t_0, el vector $\mathbf{r}(t_0)$ es el *vector de posición* de un punto P sobre la curva C. En otras palabras, cuando varía t, podemos visualizar la curva C como si fuera trazada por la punta de flecha móvil de $\mathbf{r}(t)$.



a) Espacio bidimensional *b*) Espacio tridimensional

FIGURA 12.1.1 Funciones vectoriales en los espacios bidimensional y tridimensional

Rectas Ya se dio un ejemplo de ecuaciones paramétricas visto como una función vectorial de una curva espacial en la sección 11.5 donde analizamos la recta en el espacio tridimensional. Recuerde, las ecuaciones paramétricas de una recta L que pasa por un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en el espacio y es paralela a un vector $\mathbf{v} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} \ne \mathbf{0}$, son

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \quad -\infty < t < \infty.$$

Estas ecuaciones resultan del hecho de que los vectores $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ y **v** son paralelos de modo que $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ es un múltiplo escalar de **v**, esto es, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{v}$. En consecuencia, una función vectorial de la recta L está dada por $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Esta última ecuación se expresa en las formas alternas

$$\mathbf{r}(t) = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct \rangle$$

y

$$\mathbf{r}(t) = (x_0 + at)\mathbf{i} + (y_0 + bt)\mathbf{j} + (z_0 + ct)\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$ son los vectores de posición de dos puntos distintos P_0 y P_1, entonces podemos considerar $\mathbf{v} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = \langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0 \rangle$. Una función vectorial de la recta que pasa por los dos puntos es $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ o

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1. \tag{5}$$

Si el intervalo del parámetro es cerrado $[a, b]$, entonces la función vectorial (5) traza el **segmento de recta** entre los puntos definidos por $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(b)$. En particular, si $0 \le t \le 1$ y $\mathbf{r} = (1 - t)\mathbf{r}_0 + t\mathbf{r}_1$, entonces la orientación es tal que $\mathbf{r}(t)$ traza el segmento de recta del punto P_0 al punto P_1.

EJEMPLO 1 Gráfica de una función vectorial

Encuentre una función vectorial para el segmento de recta del punto $P_0(3, 2, -1)$ al punto P_1 $(1, 4, 5)$.

Solución Los vectores de posición correspondientes a los puntos dados son $\mathbf{r}_0 = \langle 3, 2, -1\rangle$ y $\mathbf{r}_1 = \langle 1, 4, 5\rangle$. Entonces, de (5) una función vectorial para el segmento de recta es

$$\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 3, 2, -1\rangle + t\langle 1, 4, 5\rangle$$

o

$$\mathbf{r}(t) = \langle 3 - 2t, 2 + 2t, -1 + 6t\rangle,$$

donde $0 \le t \le 1$. La gráfica de la ecuación vectorial está dada en la FIGURA 12.1.2. ■

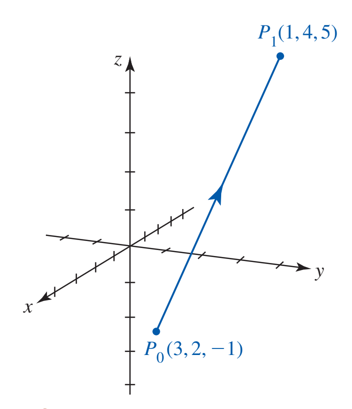


FIGURA 12.1.2 Segmento de recta del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Gráfica de una función vectorial

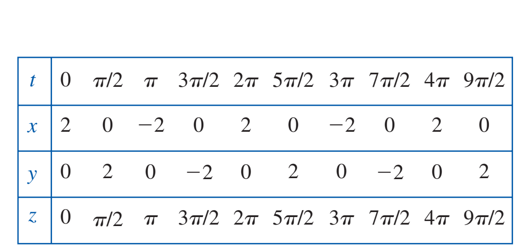
Grafique la curva C trazada por la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \ge 0.$$

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva C son $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = t$. Al eliminar el parámetro t de las primeras dos ecuaciones,

$$x^2 + y^2 = (2\cos t)^2 + (2\,\text{sen}\,t)^2 = 2^2,$$

notamos que un punto sobre la curva está en el cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$. Como se puede ver en la FIGURA 12.1.3 y la tabla adjunta a la misma, cuando aumenta el valor de t, la curva se enrolla hacia arriba en una espiral cilíndrica o una hélice circular.



t	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$
x	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0
y	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2
z	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	$9\pi/2$

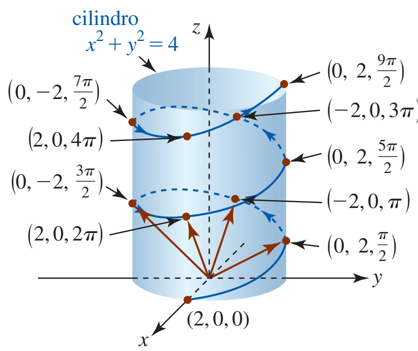


FIGURA 12.1.3 Gráfica de la función vectorial del ejemplo 2 ■

Curvas helicoidales

La curva en el ejemplo 2 es una de tipos de curvas espaciales conocidas como **curvas helicoidales**. En general, una función vectorial de la forma

$$\mathbf{r}(t) = a\cos kt\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k} \tag{6}$$

describe una **hélice circular**. El número $2\pi c/k$ recibe el nombre de **horquilla** de una hélice. Una hélice circular es sólo un caso especial de la función vectorial

La hélice definida por (6) se enrolla hacia arriba a lo largo del eje z. La horquilla es la separación vertical de los lazos de la hélice.

$$\mathbf{r}(t) = a\cos kt\,\mathbf{i} + b\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, \tag{7}$$

que describe una **hélice elíptica** cuando $a \ne b$. La curva definida por

$$\mathbf{r}(t) = at\cos kt\,\mathbf{i} + bt\,\text{sen}\,kt\,\mathbf{j} + ct\mathbf{k} \tag{8}$$

se denomina **hélice cónica**. Por último, una curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = a\,\text{sen}\,kt\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + a\cos kt\,\mathbf{k} \tag{9}$$

se llama **hélice esférica**. En (6)-(9) se supone que a, b, c y k son constantes positivas.

EJEMPLO 3 Curvas helicoidales

a) Si intercambiamos, por ejemplo, las componentes y y z de la función vectorial (7), obtenemos una hélice elíptica que se enrolla lateralmente a lo largo del eje y. Por ejemplo, con la ayuda de un SAC, la gráfica de la hélice elíptica

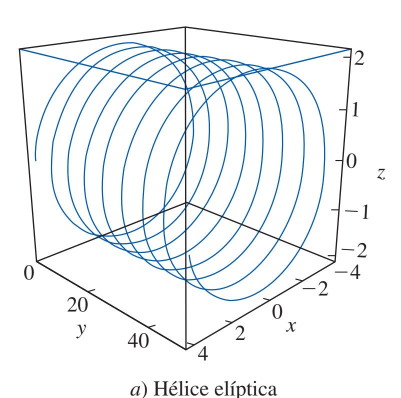
$$\mathbf{r}(t) = 4\cos t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{k}$$

se muestra en la FIGURA 12.1.4*a*).

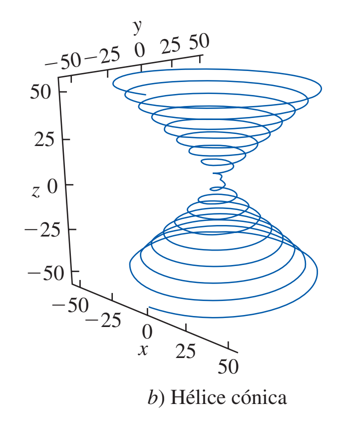
b) La figura 12.1.4*b*) muestra la gráfica de

$$\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

e ilustra por qué una función vectorial de la forma dada en (8) define a una hélice cónica. Para mayor claridad, se ha decidido suprimir la caja que por omisión rodea a la salida 3D de *Mathematica*.



a) Hélice elíptica



b) Hélice cónica

FIGURA 12.1.4 Curvas helicoidales del ejemplo 3 ■

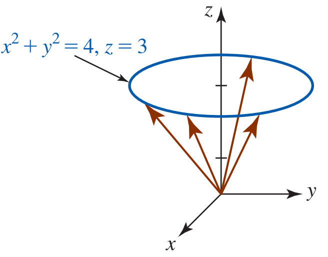


FIGURA 12.1.5 Círculo en un plano en el ejemplo 4

EJEMPLO 4 Gráfica de una función vectorial

Grafique la curva trazada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Las ecuaciones paramétricas de la curva son las componentes de la función vectorial $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = 3$. Como en el ejemplo 1, observamos que un punto sobre la curva debe estar sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 4$. Sin embargo, puesto que la coordenada z de cualquier punto tiene el valor constante $z = 3$, la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ traza una circunferencia en el plano 3 unidades arriba y paralelo al plano xy. Vea la FIGURA 12.1.5. ■

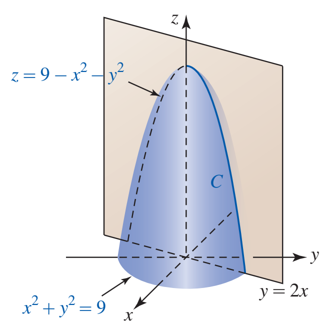


FIGURA 12.1.6 Curva C de intersección del ejemplo 5

EJEMPLO 5 Curva de intersección de dos superficies

Determine la función vectorial que describe la curva C de intersección del plano $y = 2x$ y el paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$.

Solución Primero parametrizamos la curva C de intersección haciendo $x = t$. Se deduce que $y = 2t$ y $z = 9 - t^2 - (2t)^2 = 9 - 5t^2$. De acuerdo con las ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 2t, \quad z = 9 - 5t^2, \quad -\infty < t < \infty,$$

vemos que una función vectorial que describe el trazo del paraboloide en el plano $y = 2x$ está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + (9 - 5t^2)\mathbf{k}.$$

Vea la FIGURA 12.1.6. ■

EJEMPLO 6 Curva de intersección de dos cilindros

Encuentre la función vectorial que describe la curva C de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$.

Solución En el espacio bidimensional, la gráfica de $y = x^2$ es una parábola en el plano xy y por tanto en el espacio tridimensional es un cilindro parabólico cuya generatriz es perpendicular al

plano xy, esto es, paralela al eje z. Vea la FIGURA 12.1.7*a*). Por otro lado, $z = x^3$ puede interpretarse como un cilindro cúbico cuya generatriz es perpendicular al plano xz, esto es, paralelo al eje y. Vea la figura 12.1.7*b*). Como en el ejemplo 5, si se deja $x = t$, entonces $y = t^2$ y $z = t^3$. Una función vectorial que describe a la curva C de intersección de los dos cilindros es entonces

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \tag{10}$$

donde $-\infty < t < \infty$.

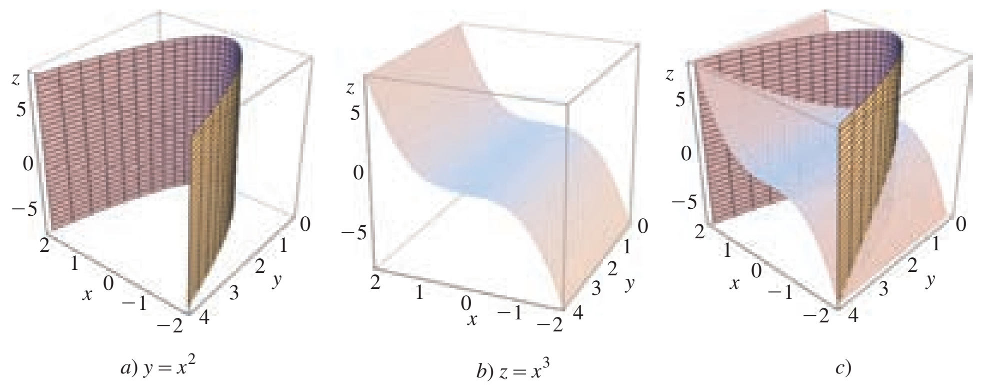


FIGURA 12.1.7 *a*) y *b*) dos cilindros; *c*) curva C de intersección en el ejemplo 6

La curva C definida por la función vectorial (10) recibe el nombre de **cúbica trenzada**. Con la ayuda de un SAC se ha graficado $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ en la FIGURA 12.1.8. Las partes *a*) y *b*) de la figura muestran dos perspectivas, o puntos de vista, distintas de la curva C de intersección de los cilindros $y = x^2$ y $z = x^3$. En la figura 12.1.8*c*) observamos la naturaleza cúbica de C utilizando una vista en dirección al plano xz. La cúbica trenzada tiene varias propiedades de interés para los matemáticos y por ello se estudia frecuentemente en cursos avanzados de geometría algebraica.

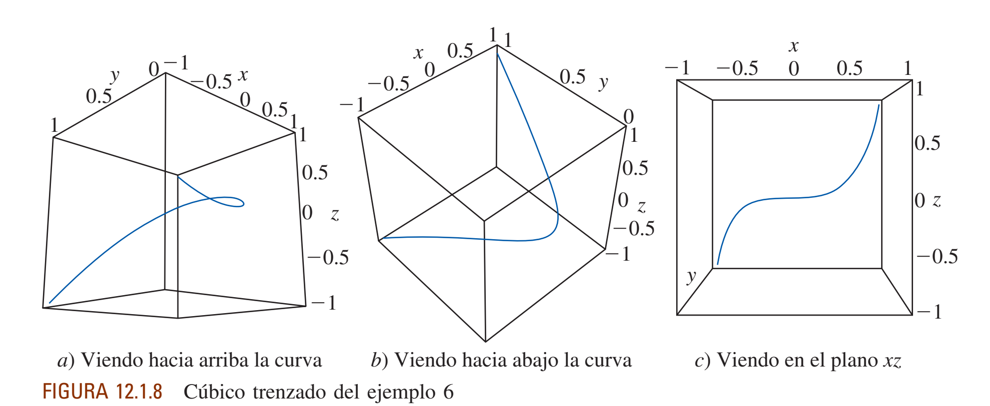


FIGURA 12.1.8 Cúbico trenzado del ejemplo 6

Ejercicios 12.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-38.

Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre el dominio de la función vectorial dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t^2 - 9}\mathbf{i} + 3t\mathbf{j}$
2. $\mathbf{r}(t) = (t + 1)\mathbf{i} + \ln(1 - t^2)\mathbf{j}$
3. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} - \operatorname{sen}^{-1} t\mathbf{k}$
4. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \operatorname{sen} 2t\mathbf{k}$

En los problemas 5-8, escriba las ecuaciones paramétricas dadas como una función vectorial $\mathbf{r}(t)$.

5. $x = \operatorname{sen} \pi t,\ y = \cos \pi t,\ z = -\cos^2 \pi t$
6. $x = \cos^2 t,\ y = 2\operatorname{sen}^2 t,\ z = t^2$
7. $x = e^{-t},\ y = e^{2t},\ z = e^{3t}$
8. $x = -16t^2,\ y = 50t,\ z = 10$

En los problemas 9-12, escriba la función vectorial dada $\mathbf{r}(t)$ como ecuaciones paramétricas.

9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(t) = t\,\text{sen}\, t(\mathbf{i} + \mathbf{k})$

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = 5\,\text{sen}\, t\, \text{sen}\, 3t\mathbf{i} + 5\cos 3t\mathbf{j} + 5\cos t\, \text{sen}\, 3t\mathbf{k}$

En los problemas 13-22, grafique la curva trazada por la función vectorial que se indica.

13. $\mathbf{r}(t) = 2\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + 4\cos t\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

14. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \text{sen}\, t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

15. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}, \quad t \geq 0$

16. $\mathbf{r}(t) = 4\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\,\text{sen}\, t\mathbf{k}$

17. $\mathbf{r}(t) = \langle e^t, e^{2t}\rangle$

18. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + 3\,\text{senh}\, t\mathbf{j}$

19. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \sqrt{2}\,\text{sen}\, t, \sqrt{2}\,\text{sen}\, t, 2\cos t\right\rangle, \quad 0 \leq t \leq \pi/2$

20. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

21. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\mathbf{i} + e^t\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}$

22. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t, t\,\text{sen}\, t, t^2\rangle$

En los problemas 23 y 24, grafique la recta cuya función vectorial se indica.

23. $\mathbf{r}(t) = (4 - 4t)\mathbf{i} + (2 - 2t)\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$

24. $\mathbf{r}(t) = (2 + 3t)\mathbf{i} + (3 + 2t)\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}$

25. Encuentre una función vectorial para el segmento de recta en el espacio bidimensional con orientación tal que $\mathbf{r}(t)$ traza la recta desde el punto (4, 0) hasta el (0, 3). Dibuje el segmento de recta.

26. Determine una función vectorial para el segmento de recta en el espacio tridimensional con orientación tal que $\mathbf{r}(t)$ traza la recta desde el punto (1, 1, 1) hasta (0, 0, 0). Dibuje el segmento de recta.

En los problemas 27-32, encuentre la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que describe la curva C de intersección entre las superficies dadas. Dibuje la curva C. Emplee el parámetro indicado.

27. $z = x^2 + y^2, y = x; \quad x = t$

28. $x^2 + y^2 - z^2 = 1, y = 2x; \quad x = t$

29. $x^2 + y^2 = 9, z = 9 - x^2; \quad x = 3\cos t$

30. $z = x^2 + y^2, z = 1; \quad x = \text{sen}\, t$

31. $x + y + z = 1, y = x; \quad x = t$

32. $3x - 2y + z = 6, x = 1; \quad y = t$

En los problemas 33-36, asocie la gráfica indicada con una de las funciones vectoriales en *a*)-*d*).

a) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos 3t\mathbf{j} + \text{sen}\, 3t\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\, 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

c) $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen}\, t\mathbf{j} + (1 - \text{sen}\, t)\mathbf{k}$

d) $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\mathbf{i} + \text{sen}^3 t\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

33.

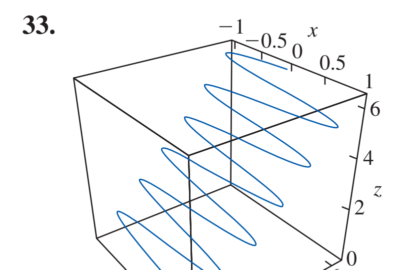


FIGURA 12.1.9 Gráfica del problema 33

34.

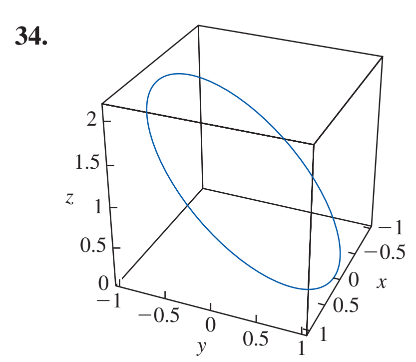


FIGURA 12.1.10 Gráfica del problema 34

35.

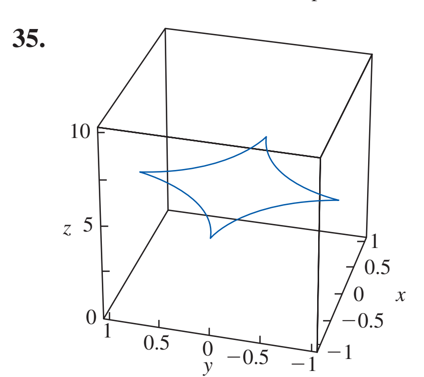


FIGURA 12.1.11 Gráfica del problema 35

36.

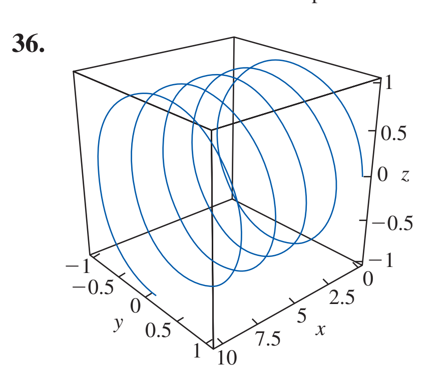


FIGURA 12.1.12 Gráfica del problema 36

37. Demuestre que los puntos sobre una hélice cónica

$$\mathbf{r}(t) = at\cos t\mathbf{i} + bt\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + ct\mathbf{k},$$

$a > 0, b > 0, c > 0$, yacen sobre un cono elíptico cuya ecuación es

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

38. Una variación de la hélice cónica del problema 37 está dada por

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\cos t\mathbf{j} + t\,\text{sen}\,t\mathbf{k}.$$

a) antes de graficar $\mathbf{r}(t)$ analice la orientación de la curva.
b) Utilice un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$. Experimente con el intervalo del parámetro y el punto de vista de la curva.

39. La función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = ae^{kt}\cos t\mathbf{i} + be^{kt}\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + ce^{kt}\mathbf{k},$$

$a > 0, b > 0, c > 0, k > 0$ describe también a una hélice cónica. Demuestre que los puntos sobre esta hélice cónica yacen sobre un cono elíptico cuya ecuación está dada en el problema 37.

40. Un caso especial de la curva en el problema 39 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}e^{0.05t}\cos t\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{0.05t}\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + e^{0.05t}\mathbf{k}.$$

a) Emplee un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$ en relación con $-30 \leq t \leq 30$.
b) Reexamine la figura 12.1.4*b*). Luego discuta la diferencia geométrica básica entre la hélice cónica en el problema 37 y la que se da en el problema 39.

41. Demuestre que los puntos sobre una hélice esférica

$$\mathbf{r}(t) = a\,\text{sen}\,kt\cos t\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + a\cos kt\mathbf{k}$$

yacen sobre una esfera de radio $a > 0$.

42. Un caso especial de la curva en el problema 41 está dado por

$$\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,kt\cos t\mathbf{i} + \text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{j} + \cos kt\mathbf{k}.$$

Utilice un SAC para graficar $\mathbf{r}(t)$ respecto a $k = 1, 2, 3, 4, 10, 20$ y $0 \leq t \leq 2\pi$. Experimente con diferentes perspectivas de las gráficas.

43. *a*) Use un SAC para superponer las gráficas de los cilindros $z = 4 - x^2$ y $z = 4 - y^2$ sobre los mismos ejes de coordenadas.
b) Encuentre funciones vectoriales que describan las dos curvas de intersección de los cilindros.
c) Emplee un SAC para dibujar ambas curvas en el inciso *b*). Superponga las curvas sobre los mismos ejes de coordenadas. Experimente con la perspectiva hasta que la visualización de las gráficas tenga sentido.

44. Suponga que $\mathbf{r}(t)$ es una función vectorial no constante que define a una curva C con la propiedad $|\mathbf{r}(t)| = a$, donde $a > 0$ es una constante. Describa geométricamente a la curva C.

≡ Problemas con calculadora/SAC

45. Use un SAC para graficar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (10 + \text{sen}\,20t)\cos t\mathbf{i} + (10 + \text{sen}\,20t)\text{sen}\,t\mathbf{j} + \cos 2t\mathbf{k}$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica. Discuta por qué la curva se denomina una **espiral toroidal**.

46. Utilice un SAC para graficar la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \cos(\arctan kt)\cos t\mathbf{i} + \cos(\arctan kt)\text{sen}\,t\mathbf{j} - \text{sen}(\arctan kt)\mathbf{k}$$

para $-10\pi \leq t \leq 10\pi$ y $k = 0.1, 0.2, 03$. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica. La curva se conoce como **espiral esférica**.

En los problemas 47 y 48, emplee un SAC para graficar la función vectorial dada relativa a los valores indicados de k. Experimente con diferentes perspectivas de la gráfica.

47. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,kt\,\text{sen}\,t\mathbf{i} + \text{sen}\,kt\cos t\mathbf{j} + \text{sen}\,t\mathbf{k}; \quad k = 2, 4$

48. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\,t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \ln(kt)\text{sen}\,t\mathbf{k}; \quad k = \frac{1}{10}, 1$

12.2 Cálculo de funciones vectoriales

Introducción En esta sección consideraremos el cálculo de funciones de valores vectoriales, en otras palabras, límites, derivadas e integrales de función vectorial. Como los conceptos son similares a los que se discutieron en la sección 10.3, se recomienda un repaso de esa sección.

Límites y continuidad La noción fundamental de **límite** de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ se define en términos de los límites de las funciones componentes.

Definición 12.2.1 Límite de una función vectorial

Si $\lim_{t\to a} f(t)$, $\lim_{t\to a} g(t)$ y $\lim_{t\to a} h(t)$ existe, entonces

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t) = \left\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\right\rangle. \tag{1}$$

El símbolo $t \to a$ en la definición 12.2.1 puede, desde luego, sustituirse por $t \to a^+$, $t \to a^-$, $t \to \infty$, o $t \to -\infty$.

Como una consecuencia inmediata de la definición 12.2.1, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 12.2.1 Propiedades de los límites

Suponga que a es un número real y $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_1(t)$ y $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_2(t)$ existe. Si $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_1(t) = \mathbf{L}_1$ y $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_2$, entonces

i) $\lim_{t \to a} c\mathbf{r}_1(t) = c\mathbf{L}_1$, $\quad c$ un escalar

ii) $\lim_{t \to a} [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$

iii) $\lim_{t \to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2$.

Definición 12.2.2 Continuidad

Una función vectorial $\mathbf{r}$ es **continua** en el número a si

i) $\mathbf{r}(a)$ es definido, *ii*) $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t)$ existe y *iii*) $\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a)$.

Equivalentemente la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ es continua en un número a si y sólo si las funciones componentes f, g y h son continuas en a. Por brevedad, a menudo afirmamos que una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es continua en un número a si

$$\lim_{t \to a} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(a). \tag{2}$$

Escribiendo (2) se supone que las condiciones *i*) y *ii*) de la definición 12.2.2 se cumplen en un número a.

Derivada de una función vectorial La definición de derivada $\mathbf{r}'(t)$ de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ es el equivalente vectorial de la definición 3.1.1. En la siguiente definición se asume que h representa a un número real distinto de cero.

Definición 12.2.3 Derivada de una función vectorial

La **derivada** de una función vectorial $\mathbf{r}$ es

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + h) - \mathbf{r}(t)}{h} \tag{3}$$

para toda t para la cual existe el límite.

La derivada de $\mathbf{r}$ también se escribe $d\mathbf{r}/dt$. El siguiente teorema muestra que en un nivel práctico, se obtiene la derivada de una función vectorial diferenciando simplemente sus funciones componentes.

Teorema 12.2.2 Diferenciación

Si las funciones componentes f, g y h son diferenciables, entonces la derivada de la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ está dada por

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle. \tag{4}$$

DEMOSTRACIÓN De (3) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\langle f(t+h), g(t+h), h(t+h)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\left\langle \frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \frac{g(t+h)-g(t)}{h}, \frac{h(t+h)-h(t)}{h}\right\rangle\\ &= \left\langle \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{h(t+h)-h(t)}{h}\right\rangle\\ &= \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle.\end{aligned}$$

Curvas suaves Cuando las funciones componentes de una función vectorial **r** tienen primeras derivadas continuas y $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para toda t en un intervalo abierto (a, b), entonces **r** se dice que es una **función suave** y la curva C trazada por **r** se denomina **curva suave**.

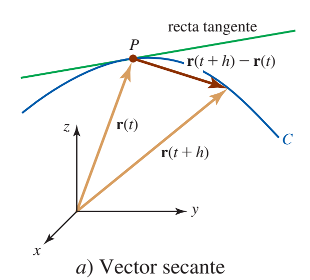
Interpretación geométrica de r′(t) Si el vector $\mathbf{r}'(t)$ existe y no es **0** en el punto P sobre la curva C definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, entonces la derivada $\mathbf{r}'(t)$ se define como el **vector tangente** a la curva en P. La justificación de lo anterior es similar a la discusión que llevó a la definición 2.7.1 en la sección 2.7. Como puede verse en las FIGURAS 12.2.1*a*) y *b*), para $h > 0$ el vector $\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)$ y el múltiplo escalar

$$\frac{1}{h}\left[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)\right] = \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

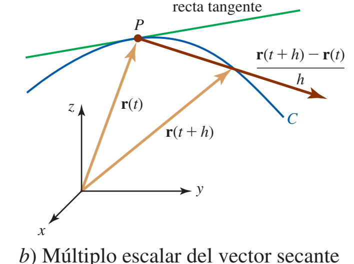
son paralelos. Suponiendo que el límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

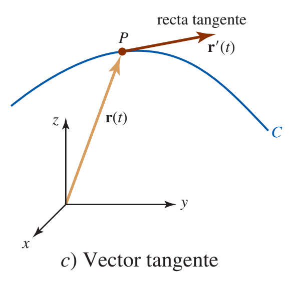
existe, entonces los vectores $\mathbf{r}(t)$ y $\mathbf{r}(t+h)$ se vuelven cada vez más cercanos cuando $h \to 0$. Como sugieren las figuras 12.2.1*b*) y *c*), la posición límite del vector $[\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)]/h$ es un vector sobre la recta tangente en P. También definimos la **recta tangente** como la recta que pasa por P que es paralela al vector $\mathbf{r}'(t)$.



a) Vector secante



b) Múltiplo escalar del vector secante



c) Vector tangente

FIGURA 12.2.1 Vector tangente en P sobre una curva C

EJEMPLO 1 El vector r′(t)

Considere la curva C en el espacio bidimensional que es trazada por un punto P cuya posición está dada por $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}, -\pi/2 \le t \le \pi/2$. Encuentre la derivada $\mathbf{r}'(t)$ y grafique los vectores $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$.

Solución La curva C es suave debido a que las funciones componentes de $\mathbf{r}(t) = \cos 2t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$ tienen derivadas continuas y $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{0}$ sobre el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$. De (4),

$$\mathbf{r}'(t) = -2\operatorname{sen} 2t\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}.$$

En consecuencia, $\quad \mathbf{r}'(0) = \mathbf{j} \quad$ y $\quad \mathbf{r}'(\pi/6) = -\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}.$

Para graficar C primero eliminamos el parámetro de las ecuaciones paramétricas $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} t$:

$$x = \cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = 1 - 2\operatorname{sen}^2 t = 1 - 2y^2.$$

Puesto que $-\pi/2 \le t \le \pi/2$, advertimos que la curva C es la porción de la parábola $x = 1 - 2y^2$ sobre el intervalo definido por $-1 \le x \le 1$. Los vectores $\mathbf{r}'(0)$ y $\mathbf{r}'(\pi/6)$ se dibujan tangentes a la curva C en $(1, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, respectivamente. Vea la FIGURA 12.2.2.

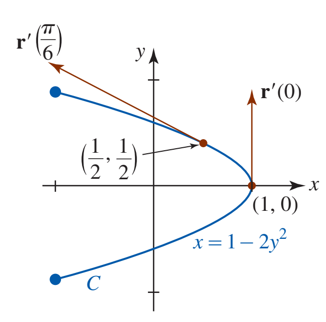


FIGURA 12.2.2 Curva C y vectores del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Ecuaciones paramétricas

Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva C cuyas ecuaciones paramétricas son $x = t^2$, $y = t^2 - t$, $z = -7t$ en el punto correspondiente a $t = 3$.

Solución La función vectorial que produce la posición de un punto P sobre la curva está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - t)\mathbf{j} - 7t\mathbf{k}$. Ahora,

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} - 7\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}'(3) = 6\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

El vector $\mathbf{r}'(3)$ es tangente a C en el punto P cuyo vector de posición es

$$\mathbf{r}(3) = 9\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 21\mathbf{k},$$

esto es, en el punto $P(9, 6, -21)$. Al emplear las componentes de $\mathbf{r}'(3)$, advertimos que las ecuaciones paramétricas de la recta tangente son

$$x = 9 + 6t,\ y = 6 + 5t,\ z = -21 - 7t.$$ ■

Derivadas de orden superior Las derivadas de orden superior de una función vectorial se obtienen también diferenciando sus componentes. En el caso de la **segunda derivada**, tenemos

$$\mathbf{r}''(t) = \langle f''(t), g''(t), h''(t)\rangle = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k}. \qquad (5)$$

EJEMPLO 3 Vectores $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$

Si $\mathbf{r}(t) = (t^3 - 2t^2)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, entonces

$$\mathbf{r}'(t) = (3t^2 - 4t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$$

y

$$\mathbf{r}''(t) = (6t - 4)\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{k}.$$ ■

En el siguiente teorema se enlistan algunas reglas de diferenciación para funciones vectoriales.

Teorema 12.2.3 Reglas de diferenciación

Considere que $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son funciones vectoriales diferenciables y $f(t)$ es una función escalar diferenciable.

i) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$

ii) $\dfrac{d}{dt}[f(t)\mathbf{r}(t)] = f(t)\mathbf{r}'(t) + f'(t)\mathbf{r}(t)$

iii) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(f(t))] = \mathbf{r}'(f(t))f'(t)$ (regla de la cadena)

iv) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$

v) $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2(t)] = \mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\times\mathbf{r}_2(t)$

DEMOSTRACIÓN DE *iv)* Si $\mathbf{r}_1(t) = \langle f_1(t), g_1(t), h_1(t)\rangle$ y $\mathbf{r}_2(t) = \langle f_2(t), g_2(t), h_2(t)\rangle$, entonces por (2) de la sección 11.3 el producto punto es la función escalar

$$\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t) = f_1(t)f_2(t) + g_1(t)g_2(t) + h_1(t)h_2(t).$$

Después de usar la regla del producto agrupamos los términos en rojo y los términos que se muestran en azul:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t) &= \frac{d}{dt}f_1(t)f_2(t) + \frac{d}{dt}g_1(t)g_2(t) + \frac{d}{dt}h_1(t)h_2(t)\\ &= f_1(t)f_2'(t) + f_1'(t)f_2(t) + g_1(t)g_2'(t) + g_1'(t)g_2(t) + h_1(t)h_2'(t) + h_1'(t)h_2(t)\\ &= \langle f_1(t), g_1(t), h_1(t)\rangle\cdot\langle f_2'(t), g_2'(t), h_2'(t)\rangle + \langle f_1'(t), g_1'(t), h_1'(t)\rangle\cdot\langle f_2(t), g_2(t), h_2(t)\rangle\\ &= \mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2'(t) + \mathbf{r}_1'(t)\cdot\mathbf{r}_2(t).\end{aligned}$$ ■

Nota: Puesto que el producto cruz de dos vectores no es conmutativo, el orden en el cual $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$ aparecen en la parte *v)* del teorema 12.2.3 debe observarse estrictamente. Desde luego, en *iv)* y *v)* podemos efectuar el producto punto y el producto cruz primero y después diferenciar el escalar o la función vectorial resultantes.

Integrales de funciones vectoriales Si $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ es una función vectorial continua sobre el intervalo $[a, b]$, entonces la integral indefinida de $\mathbf{r}$ está definida por

$$\int \mathbf{r}(t)dt = \left[\int f(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int g(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int h(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

La integral indefinida de $\mathbf{r}$ es otro vector $\mathbf{R} + \mathbf{C}$, donde $\mathbf{C}$ es un *vector constante*, tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$. Debido a la continuidad de las funciones componentes f, g y h, la integral definida de $\mathbf{r}(t)$ sobre $[a, b]$ puede definirse como

$$\begin{aligned}\int_a^b \mathbf{r}(t)dt &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{r}(t_k^*)\Delta t \\ &= \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{i} + \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{j} + \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} h(t_k^*)\Delta t\right]\mathbf{k}.\end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left[\int_a^b f(t)dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_a^b g(t)dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_a^b h(t)dt\right]\mathbf{k}.$$

El teorema fundamental del cálculo, extendido a funciones vectoriales, es

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \mathbf{R}(t)\Big]_a^b = \mathbf{R}(b) - \mathbf{R}(a),$$

donde $\mathbf{R}$ es una función vectorial tal que $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{r}(t)$.

EJEMPLO 4 Integrales

***a*)** Si $\mathbf{r}(t) = 6t^2\mathbf{i} + 4e^{-2t}\mathbf{j} + 8\cos 4t\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\int \mathbf{r}(t)dt &= \left[\int 6t^2dt\right]\mathbf{i} + \left[\int 4e^{-2t}dt\right]\mathbf{j} + \left[\int 8\cos 4t\,dt\right]\mathbf{k} \\ &= [2t^3 + c_1]\mathbf{i} + [-2e^{-2t} + c_2]\mathbf{j} + [2\,\text{sen}\,4t + c_3]\mathbf{k} \\ &= 2t^3\mathbf{i} - 2e^{-2t}\mathbf{j} + 2\,\text{sen}\,4t\,\mathbf{k} + \mathbf{C},\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Las componentes c_1, c_2 y c_3 del último vector son constantes reales arbitrarias.

***b*)** Si $\mathbf{r}(t) = (4t - 3)\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{j} + \dfrac{2}{1 + t^2}\mathbf{k}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \mathbf{r}(t)dt &= (2t^2 - 3t)\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + 2\tan^{-1} t\mathbf{k}\Big]_{-1}^{1} \\ &= \left(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\cdot\frac{\pi}{4}\mathbf{k}\right) - \left(5\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 2\cdot\frac{\pi}{4}\mathbf{k}\right) \\ &= -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \pi\mathbf{k}.\end{aligned}$$

■

Longitud de una curva espacial En la sección 10.3 vimos que la fórmula de la longitud de arco para una curva suave C en el espacio bidimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \le t \le b$, es

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

De manera similar, si C es una curva suave en el espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad a \le t \le b,$$

entonces como hicimos en la sección 10.3 podemos construir una integral definida utilizando una trayectoria poligonal, como se ilustra en la FIGURA 12.2.3, para llegar a la integral definida

$$L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (6)$$

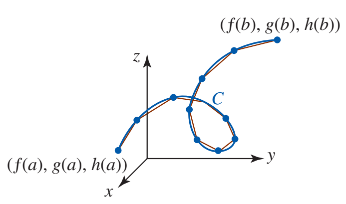


FIGURA 12.2.3 Aproximación de la longitud de C (azul) por medio de la longitud de una trayectoria poligonal (rojo)

que define la **longitud** L de la curva entre los puntos $(f(a), g(a), h(a))$ y $(f(b), g(b), h(b))$. Si la curva C se traza por medio de una función suave de valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$, entonces su longitud entre el punto inicial en $t = a$ y el punto terminal en $t = b$ puede expresarse en términos de la magnitud de $\mathbf{r}'(t)$:

$$L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|dt. \tag{7}$$

En (7), $|\mathbf{r}'(t)|$ es

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} \qquad \text{o} \qquad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}$$

dependiendo de si C está en el espacio bidimensional o tridimensional, respectivamente.

Función de la longitud de arco La integral definida

Revise (5) en la sección 6.5.

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)|du \tag{8}$$

se llama la **función de longitud de arco** para la curva C. En (8) el símbolo u es una variable de integración sustituta. La función $s(t)$ representa la longitud de C entre los puntos sobre la curva definida por los vectores de posición $\mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{r}(t)$. Muchas veces es útil parametrizar una curva suave C en el plano o en el espacio en términos de la longitud de arco s. Al evaluar (8) se expresa s como una función del parámetro t. Si podemos resolver esa ecuación para t en términos de s, entonces es factible expresar $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$ o $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ como

$$\mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s)\rangle \qquad \text{o} \qquad \mathbf{r}(s) = \langle x(s), y(s), z(s)\rangle.$$

El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento para determinar una **parametrización de longitud de arco** $\mathbf{r}(s)$ para una curva C.

EJEMPLO 5 Una parametrización de longitud de arco

Encuentre una parametrización de longitud de arco de la hélice circular del ejemplo 2 de la sección 12.1:

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}.$$

Solución De $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$ se encuentra $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{5}$. Se deduce de (8) que la longitud de la curva empezando en $\mathbf{r}(0)$ hasta un punto arbitrario definido por $\mathbf{r}(t)$ es

$$s = \int_0^t \sqrt{5}\,du = \sqrt{5}u\Big]_0^t = \sqrt{5}t.$$

Al resolver $s = \sqrt{5}t$ para t se encuentra que $t = s/\sqrt{5}$. Al sustituir respecto a t en $\mathbf{r}(t)$ obtenemos una función vectorial de la hélice como una función de la longitud de arco:

$$\mathbf{r}(s) = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{k}. \tag{9}$$

Las ecuaciones paramétricas de la hélice son entonces

$$x = 2\cos\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad y = 2\,\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}, \quad z = \frac{s}{\sqrt{5}}.$$ ■

Advierta que la derivada de la función vectorial (9) respecto a la longitud de arco s es

Es particularmente fácil encontrar una parametrización de longitud de arco de una recta $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$. Vea el problema 49 en los ejercicios 12.2.

$$\mathbf{r}'(s) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\text{sen}\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos\frac{s}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

y su magnitud es

$$|\mathbf{r}'(s)| = \sqrt{\frac{4}{5}\text{sen}^2\frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5}\cos^2\frac{s}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{5}{5}} = 1.$$

El hecho de que $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ indica que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario. Esto no es coincidencia. Como hemos visto, la derivada de una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ con respecto al parámetro t es un vector

tangente a la curva C trazada por $\mathbf{r}$. Sin embargo, si la curva C se parametriza en términos de la longitud de arco s, entonces:

- La derivada $\mathbf{r}'(s)$ es un vector tangente unitario. (10)

Para ver por qué esto es así, recuerde que la forma de la derivada del teorema fundamental del cálculo, teorema 5.5.2, muestra que la derivada de (8) con respecto a t es

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|. \tag{11}$$

Sin embargo, si la curva C es descrita por una parametrización de longitud de arco $\mathbf{r}(s)$, entonces (8) muestra que la longitud s de la curva de $\mathbf{r}(0)$ a $\mathbf{r}(s)$ es

$$s = \int_0^s |\mathbf{r}'(u)|\,du. \tag{12}$$

Como $\dfrac{d}{ds}s = 1$, la derivada de (12) con respecto a s es

$$\frac{d}{ds}s = |\mathbf{r}'(s)| \qquad \text{o} \qquad |\mathbf{r}'(s)| = 1.$$

En la siguiente sección veremos por qué (10) es importante.

Ejercicios 12.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-39.

Fundamentos

En los problemas 1-4, evalúe el límite dado o enuncie que éste no existe.

1. $\lim\limits_{t\to 2}[t^3\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^5\mathbf{k}]$
2. $\lim\limits_{t\to 0^+}\left[\dfrac{\operatorname{sen} 2t}{t}\mathbf{i} + (t-2)^5\mathbf{j} + t\ln t\,\mathbf{k}\right]$
3. $\lim\limits_{t\to 1}\left\langle \dfrac{t^2-1}{t-1}, \dfrac{5t-1}{t+1}, \dfrac{2e^{t-1}-2}{t-1}\right\rangle$
4. $\lim\limits_{t\to\infty}\left\langle \dfrac{e^{2t}}{2e^{2t}+t}, \dfrac{e^{-t}}{2e^{-t}+5}, \tan^{-1} t\right\rangle$

En los problemas 5 y 6, suponga que

$$\lim_{t\to a}\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \lim_{t\to a}\mathbf{r}_2(t) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}.$$

Encuentre el límite dado.

5. $\lim\limits_{t\to a}[-4\mathbf{r}_1(t) + 3\mathbf{r}_2(t)]$
6. $\lim\limits_{t\to a}\mathbf{r}_1(t)\cdot\mathbf{r}_2(t)$

En los problemas 7 y 8, determine si la función vectorial indicada es continua en $t = 1$.

7. $\mathbf{r}(t) = (t^2 - 2t)\mathbf{i} + \dfrac{1}{t+1}\mathbf{j} + \ln(t-1)\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}\pi t\,\mathbf{i} + \tan\pi t\,\mathbf{j} + \cos\pi t\,\mathbf{k}$

En los problemas 9 y 10, encuentre los dos vectores indicados para la función vectorial dada.

9. $\mathbf{r}(t) = (3t-1)\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + (5t^2 - t)\mathbf{k}$; $\mathbf{r}'(1)$, $\dfrac{\mathbf{r}(1.1)-\mathbf{r}(1)}{0.1}$
10. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{1}{1+5t}\mathbf{i} + (3t^2+t)\mathbf{j} + (1-t)^3\mathbf{k}$; $\mathbf{r}'(0)$, $\dfrac{\mathbf{r}(0.05)-\mathbf{r}(0)}{0.05}$

En los problemas 11-14, determine $\mathbf{r}'(t)$ y $\mathbf{r}''(t)$ para la función vectorial dada.

11. $\mathbf{r}(t) = \ln t\,\mathbf{i} + \dfrac{1}{t}\mathbf{j}$, $t > 0$
12. $\mathbf{r}(t) = \langle t\cos t - \operatorname{sen} t, t + \cos t\rangle$
13. $\mathbf{r}(t) = \langle te^{2t}, t^3, 4t^2 - t\rangle$
14. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \tan^{-1} t\,\mathbf{k}$

En los problemas 15-18, grafique la curva C que es descrita por $\mathbf{r}(t)$ y grafique $\mathbf{r}'(t)$ en el punto correspondiente al valor indicado de t.

15. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 6\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$; $t = \pi/6$
16. $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$; $t = -1$
17. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \dfrac{4}{1+t^2}\mathbf{k}$; $t = 1$
18. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$; $t = \pi/4$

En los problemas 19 y 20, encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t.

19. $x = t$, $y = \dfrac{1}{2}t^2$, $z = \dfrac{1}{3}t^3$; $t = 2$
20. $x = t^3 - t$, $y = \dfrac{6t}{t+1}$, $z = (2t+1)^2$; $t = 1$

En los problemas 21 y 22, determine un vector tangente unitario para la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t. Encuentre ecuaciones paramétricas de la recta tangente en este punto.

21. $\mathbf{r}(t) = te^t\mathbf{i} + (t^2 + 2t)\mathbf{j} + (t^3 - t)\mathbf{k}$; $t = 0$
22. $\mathbf{r}(t) = (1 + \operatorname{sen} 3t)\mathbf{i} + \tan 2t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$; $t = \pi$

En los problemas 23 y 24, encuentre una función vectorial de la recta tangente a la curva dada en el punto correspondiente al valor que se indica de t.

23. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \rangle; \quad t = \pi/3$

24. $\mathbf{r}(t) = \langle 6e^{-t/2}, e^{2t}, e^{3t} \rangle; \quad t = 0$

En los problemas 25-30, determine la derivada indicada. Suponga que todas las funciones vectoriales son diferenciables.

25. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}'(t)]$

26. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot (t\mathbf{r}(t))]$

27. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))]$

28. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$

29. $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(2t) + \mathbf{r}_2(1/t)]$

30. $\dfrac{d}{dt}[t^3\mathbf{r}(t^2)]$

En los problemas 31-34, evalúe la integral dada.

31. $\displaystyle\int_{-1}^{2} (t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k})\,dt$

32. $\displaystyle\int_{0}^{4} \left(\sqrt{2t+1}\,\mathbf{i} - \sqrt{t}\,\mathbf{j} + \operatorname{sen} \pi t\,\mathbf{k}\right)dt$

33. $\displaystyle\int (te^t\mathbf{i} - e^{-2t}\mathbf{j} + te^{t^2}\mathbf{k})\,dt$

34. $\displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}(\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k})\,dt$

En los problemas 35-38, encuentre una función vectorial $\mathbf{r}(t)$ que satisfaga las condiciones indicadas.

35. $\mathbf{r}'(t) = 6\mathbf{i} + 6t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

36. $\mathbf{r}'(t) = t \operatorname{sen} t^2\mathbf{i} - \cos 2t\mathbf{j}; \quad \mathbf{r}(0) = \frac{3}{2}\mathbf{i}$

37. $\mathbf{r}''(t) = 12t\mathbf{i} - 3t^{-1/2}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}'(1) = \mathbf{j}, \mathbf{r}(1) = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}$

38. $\mathbf{r}''(t) = \sec^2 t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} - \operatorname{sen} t\mathbf{k};$
$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{r}(0) = -\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

En los problemas 39-42, encuentre la longitud de la curva trazada por la función vectorial dada en el intervalo que se indica.

39. $\mathbf{r}(t) = a \cos t\mathbf{i} + a \operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 2\pi$

40. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t \cos t\mathbf{j} + t \operatorname{sen} t\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le \pi$

41. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos 2t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} 2t\mathbf{j} + e^t\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 3\pi$

42. $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + \sqrt{3}t^2\mathbf{j} + \frac{2}{3}t^3\mathbf{k}; \quad 0 \le t \le 1$

En los problemas 43-46, emplee (8) y la integración de $u = 0$ a $u = t$ para determinar una parametrización de longitud de arco $\mathbf{r}(s)$ para la curva dada. Verifique que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario.

43. $\mathbf{r}(t) = 9 \operatorname{sen} t\mathbf{i} + 9 \cos t\mathbf{j}$

44. $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 12t\mathbf{j} + 5 \operatorname{sen} t\mathbf{k}$

45. $\mathbf{r}(t) = (1 + 2t)\mathbf{i} + (5 - 3t)\mathbf{j} + (2 + 4t)\mathbf{k}$

46. $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t\mathbf{i} + e^t \operatorname{sen} t\mathbf{j} + \mathbf{k}$

☰ Piense en ello

47. Suponga que $\mathbf{r}$ es una función vectorial diferenciable para la cual $|\mathbf{r}(t)| = c$ para toda t. Demuestre que el vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ es perpendicular al vector de posición $\mathbf{r}(t)$ para toda t.

48. Si $\mathbf{v}$ es un vector constante y $\mathbf{r}(t)$ es integrable sobre $[a, b]$, demuestre que $\int_a^b \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}(t)\,dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \mathbf{r}(t)\,dt$.

49. Suponga que $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ es una ecuación vectorial de una recta, donde $\mathbf{r}_0$ y $\mathbf{v}$ son vectores constantes. Utilice la función de longitud de arco $s = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du$ para demostrar que una parametrización de longitud de arco de la recta está dada por $\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}_0 + s\dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. Demuestre que $\mathbf{r}'(s)$ es un vector unitario. En otras palabras, para obtener una parametrización de longitud de arco de una recta sólo se necesita normalizar al vector $\mathbf{v}$.

50. Emplee los resultados del problema 49 para encontrar una parametrización de longitud de arco de cada una de las siguientes rectas.

a) $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + 3t, 2 - 4t \rangle = \langle 1, 2 \rangle + t\langle 3, -4 \rangle$

b) $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 1 + 2t, 10 - t \rangle$

12.3 Movimiento sobre una curva

Introducción Suponga que una partícula o cuerpo se mueve a lo largo de la curva C de manera que su posición en el tiempo t está dada por la función de valores vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}.$$

Podemos describir la velocidad y la aceleración de la partícula en términos de derivadas de $\mathbf{r}(t)$.

Velocidad y aceleración Si f, g y h tienen segundas derivadas, entonces los vectores

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = f''(t)\mathbf{i} + g''(t)\mathbf{j} + h''(t)\mathbf{k} \tag{2}$$

se denominan la **velocidad** y la **aceleración** de la partícula, respectivamente. La función escalar

$$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} \tag{3}$$

es la **rapidez** de la partícula. La rapidez se relaciona con la longitud de arco. De (7) de la sección 12.2 observamos que si una curva C es trazada por una función de valores vectoriales suave

$\mathbf{r}(t)$, entonces su longitud entre el punto inicial en $t = a$ y el punto terminal en $t = b$ está dada por $L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt$. En vista de (1) y (3), esto es lo mismo que

$$L = \int_a^b |\mathbf{v}(t)|\,dt. \tag{4}$$

Si $P(x_1, y_1, z_1)$ es la posición de la partícula sobre la curva C en el tiempo t_1, entonces en vista de la discusión en la sección 12.2 acerca de la interpretación geométrica de $\mathbf{r}'(t)$ concluimos que

- $\mathbf{v}(t_1)$ es tangente a la curva C en P.

Se hacen comentarios similares para curvas trazadas por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$.

EJEMPLO 1 Gráfica de la velocidad y la aceleración

La posición de una partícula en movimiento está dada por $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{5}{2}t\mathbf{k}$. Grafique la curva C definida por $\mathbf{r}(t)$ y los vectores $\mathbf{v}(2)$ y $\mathbf{a}(2)$.

Solución Puesto que $x = t^2$, $y = t$, la trayectoria de la partícula está por arriba de la parábola $x = y^2$ que yace en el plano xy. Cuando $t = 2$, el vector de posición $\mathbf{r}(2) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ indica que la partícula está en el punto $P(4, 2, 5)$ sobre C. Ahora,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = 2\mathbf{i}$$

de modo que
$$\mathbf{v}(2) = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{5}{2}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{a}(2) = 2\mathbf{i}.$$

Estos vectores se ilustran en la FIGURA 12.3.1. ■

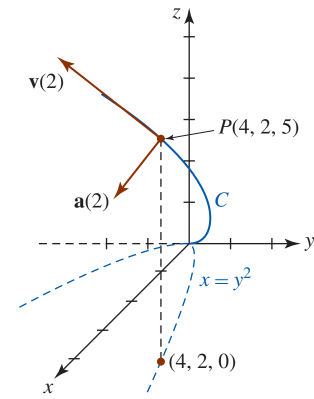


FIGURA 12.3.1 Vectores de velocidad y aceleración del ejemplo 1

Si una partícula se mueve con una rapidez constante c, entonces su vector de aceleración es perpendicular al vector de velocidad $\mathbf{v}$. Para ver lo anterior, advierta que

$$|\mathbf{v}|^2 = c^2 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = c^2.$$

Diferenciamos ambos lados con respecto a t, y con la ayuda del teorema 12.2.3*iv*) obtenemos

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 2\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0.$$

Entonces,
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\mathbf{v} = 0 \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a}(t)\cdot\mathbf{v}(t) = 0 \quad \text{para toda } t. \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Gráfica de la velocidad y la aceleración

Suponga que la función vectorial del ejemplo 4 de la sección 12.1 representa la posición de una partícula que se mueve en una órbita circular. Grafique los vectores de velocidad y aceleración en $t = \pi/4$.

Solución La función de valores vectoriales

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

es el vector de posición de una partícula que se mueve en una órbita circular de radio 2 en el plano $z = 3$. Cuando $t = \pi/4$, la partícula está en el punto $P(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$. En este caso,

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + 2\cos t\,\mathbf{j}$$

y
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -2\cos t\,\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}.$$

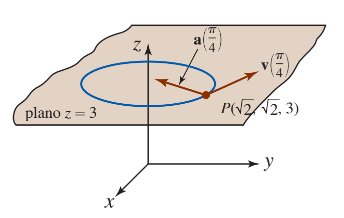


FIGURA 12.3.2 Vectores de velocidad y aceleración del ejemplo 2

Puesto que la rapidez $|\mathbf{v}(t)| = 2$ es constante para todo tiempo t, se sigue de (5) que $\mathbf{a}(t)$ es perpendicular a $\mathbf{v}(t)$. (Verifique lo anterior.) Como se muestra en la FIGURA 12.3.2, los vectores

$$\mathbf{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{i} + 2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} + \sqrt{2}\mathbf{j}$$

y
$$\mathbf{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\frac{\pi}{4}\mathbf{i} - 2\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\mathbf{j} = -\sqrt{2}\mathbf{i} - \sqrt{2}\mathbf{j}$$

se dibujan en el punto P. El vector $\mathbf{v}(\pi/4)$ es tangente a la trayectoria circular en tanto que $\mathbf{a}(\pi/4)$ apunta a lo largo de un radio hacia el centro del círculo. ■

Aceleración centrípeta Para el movimiento circular en el plano, descrito mediante $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\mathbf{i} + r_0 \operatorname{sen} \omega t\mathbf{j}$, r_0 y ω constantes, es evidente que $\mathbf{r}'' = -\omega^2\mathbf{r}$. Esto significa que el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ apunta en la dirección opuesta a la del vector de posición $\mathbf{r}(t)$. Afirmamos entonces que $\mathbf{a}(t)$ es la **aceleración centrípeta**. Vea la FIGURA 12.3.3. Si $v = |\mathbf{v}(t)|$ y $a = |\mathbf{a}(t)|$, se deja como ejercicio demostrar que $a = v^2/r_0$. Vea el problema 17 en los ejercicios 12.3.

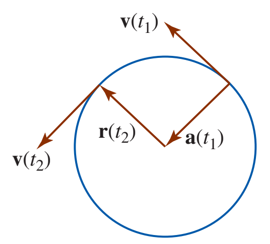


FIGURA 12.3.3 Vector de aceleración centrípeta **a**

FIGURA 12.3.4 Proyectil balístico

Movimiento curvilíneo en el plano Muchas aplicaciones importantes de las funciones vectoriales ocurren en la descripción del movimiento curvilíneo en un plano. Por ejemplo, los movimientos planetarios y de proyectiles se efectúan en un plano. Al analizar el movimiento de proyectiles balísticos de corto alcance, se empieza con la aceleración de la gravedad escrita en forma vectorial

El proyectil se dispara o lanza en vez de autoimpulsarse. En el análisis del movimiento de balística de largo alcance, debe tomarse en cuenta la curvatura de la Tierra.

$$\mathbf{a}(t) = -g\mathbf{j}.$$

Si, como se ilustra en la FIGURA 12.3.4, se lanza un proyectil con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0 = v_0 \cos \theta\mathbf{i} + v_0 \operatorname{sen} \theta\mathbf{j}$, desde una altura inicial $\mathbf{s}_0 = s_0\mathbf{j}$, entonces

$$\mathbf{v}(t) = \int(-g\mathbf{j})dt = -gt\mathbf{j} + \mathbf{C}_1,$$

donde $\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ implica que $\mathbf{C}_1 = \mathbf{v}_0$. Por tanto,

$$\mathbf{v}(t) = (v_0 \cos \theta)\mathbf{i} + (-gt + v_0 \operatorname{sen} \theta)\mathbf{j}.$$

Al integrar de nuevo y utilizar $\mathbf{r}(0) = \mathbf{s}_0$ se obtiene

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 \cos \theta)t\mathbf{i} + \left[-\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + s_0\right]\mathbf{j}.$$

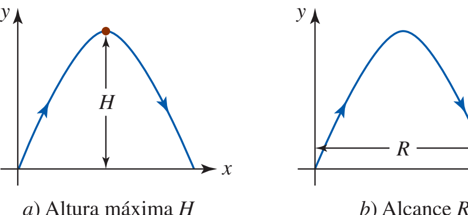
Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas para la trayectoria del proyectil son

$$x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \operatorname{sen} \theta)t + s_0. \tag{6}$$

Vea (3) de la sección 10.2.

Existe un interés natural en determinar la altura máxima H y la distancia horizontal R máxima, o alcance, a la que llega el proyectil. Como se muestra en la FIGURA 12.3.5, estas cantidades son los valores máximos de $y(t)$ y $x(t)$, respectivamente. Para calcular estos valores se determinan los tiempos t_1 y $t_2 > 0$ para los cuales $y'(t_1) = 0$ y $y(t_2) = 0$, respectivamente. Luego

$$H = y_{máx} = y(t_1) \qquad \text{y} \qquad R = x_{máx} = x(t_2). \tag{7}$$



a) Altura máxima *H* *b*) Alcance *R*

FIGURA 12.3.5 Altura y alcance máximos de un proyectil

EJEMPLO 3 Movimiento de proyectiles

Un obús es lanzado desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 768 pies/s a un ángulo de elevación de 30°. Encuentre

a) la función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús,
b) la altura máxima alcanzada,
c) el alcance del obús y
d) la rapidez en el impacto.

Solución

a) En términos de vectores, la posición inicial del proyectil es $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ y su velocidad inicial corresponde a

$$\mathbf{v}_0 = (768 \cos 30°)\mathbf{i} + (768 \operatorname{sen} 30°)\mathbf{j} = 384\sqrt{3}\mathbf{i} + 384\mathbf{j}. \tag{8}$$

Al integrar $\mathbf{a}(t) = -32\mathbf{j}$ y utilizar (8), se obtiene

$$\mathbf{v}(t) = (384\sqrt{3})\mathbf{i} + (-32t + 384)\mathbf{j}. \tag{9}$$

Al integrar (9) y emplear $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$ se encuentra la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = (384\sqrt{3}t)\mathbf{i} + (-16t^2 + 384t)\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús son

$$x(t) = 384\sqrt{3}t, \quad y(t) = -16t^2 + 384t. \tag{10}$$

***b*)** De (10) advertimos que $dy/dt = 0$ cuando

$$-32t + 384 = 0 \qquad \text{o} \qquad t = 12.$$

Entonces, de acuerdo con la primera parte de (7), la altura máxima H alcanzada por el obús es

$$H = y(12) = -16(12)^2 + 384(12) = 2\,304 \text{ pies.}$$

***c*)** De (6) vemos que $y(t) = 0$ cuando

$$-16t(t - 24) = 0 \qquad \text{o} \qquad t = 0, t = 24.$$

De la segunda parte de (7), el alcance R del obús es

$$R = x(24) = 384\sqrt{3}(24) \approx 15\,963 \text{ pies.}$$

***d*)** De (9) obtenemos la rapidez de impacto del obús:

$$|\mathbf{v}(24)| = \sqrt{(384\sqrt{3})^2 + (-384)^2} = 768 \text{ pies/s.}$$ ■

$\mathbf{r}(t)$ NOTAS DESDE EL AULA

En la página 667 vimos que la tasa de cambio de la longitud de arco dL/dt es la misma que la rapidez $|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|$. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, *no* se deduce que la *aceleración escalar* d^2L/dt^2 es la misma que $|\mathbf{a}(t)| = |\mathbf{r}''(t)|$. Vea el problema 18 en los ejercicios 12.3.

Ejercicios 12.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-39.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-8, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento. Grafique la curva y los vectores de velocidad y aceleración en el tiempo indicado. Encuentre la rapidez en ese tiempo.

1. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{4}t^4\mathbf{j}; \quad t = 1$

2. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + \dfrac{1}{t^2}\mathbf{j}; \quad t = 1$

3. $\mathbf{r}(t) = -\cosh 2t\mathbf{i} + \operatorname{senh} 2t\mathbf{j}; \quad t = 0$

4. $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + (1 + \operatorname{sen} t)\mathbf{j}; \quad t = \pi/3$

5. $\mathbf{r}(t) = 2\mathbf{i} + (t - 1)^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = 2$

6. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad t = 2$

7. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}; \quad t = 1$

8. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + t\mathbf{k}; \quad t = 1$

9. Suponga que $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^3 - 2t)\mathbf{j} + (t^2 - 5t)\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento.

***a*)** ¿En qué puntos la partícula pasa por el plano xy?

***b*)** ¿Cuáles son su velocidad y aceleración en los puntos del inciso *a*)?

10. Suponga que una partícula se mueve en el espacio de manera que $\mathbf{a}(t) = \mathbf{0}$ para todo tiempo t. Describa su trayectoria.

11. Un obús se lanza desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 480 pies/s a un ángulo de elevación de 30°. Encuentre:

***a*)** una función vectorial y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria del obús,

***b*)** la altura máxima alcanzada,

***c*)** el alcance del obús y

***d*)** la rapidez en el impacto.

12. Vuelva a trabajar el problema 11 si el obús se lanza con la misma rapidez inicial y el mismo ángulo de elevación pero desde un acantilado a 1 600 pies de altura.

13. Un automóvil se empuja con una rapidez de 4 pies/s desde un escarpado acantilado frente al mar que tiene una altura de 81 pies. Encuentre la rapidez a la cual el automóvil golpea el agua.

14. Un pequeño proyectil se lanza desde el nivel del suelo con una rapidez inicial de 98 m/s. Encuentre los ángulos posibles de elevación de manera que su alcance sea de 490 m.

15. Un mariscal de campo de futbol americano lanza una "bomba" de 100 yardas a un ángulo de 45° con respecto a la horizontal. ¿Cuál es la rapidez inicial del balón en el punto de lanzamiento?

16. Un mariscal de campo lanza un balón de futbol con la misma rapidez inicial a un ángulo de 60° desde la horizontal y después a un ángulo de 30° desde la horizontal. Muestre que el alcance del balón es el mismo en cada caso. Generalice este resultado para cualquier ángulo de lanzamiento $0 < \theta < \pi/2$.

17. Suponga que $\mathbf{r}(t) = r_0 \cos \omega t\,\mathbf{i} + r_0 \text{ sen } \omega t\,\mathbf{j}$ es el vector de posición de un objeto que se está moviendo en un círculo de radio r_0 en el plano xy. Si $|\mathbf{v}(t)| = v$, muestre que la magnitud de la aceleración centrípeta es $a = |\mathbf{a}(t)| = v^2/r_0$.

18. El movimiento de una partícula en el espacio tridimensional se describe mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = b\cos t\,\mathbf{i} + b \text{ sen } t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}, \quad t \geq 0.$$

a) Calcule $|\mathbf{v}(t)|$.

b) Calcule la función de longitud de arco $s(t) = \int_0^t |\mathbf{v}(u)|\, du$ y verifique que ds/dt es la misma que el resultado del inciso *a*).

c) Verifique que $d^2s/dt^2 \neq |\mathbf{a}(t)|$.

☰ Aplicaciones

19. Se lanza un proyectil desde un cañón directamente a un blanco que se deja caer desde el reposo en forma simultánea cuando se dispara el cañón. Demuestre que el proyectil golpeará al blanco en el aire. Vea la FIGURA 12.3.6. [*Sugerencia*: Suponga que el origen está en la boca del cañón y que el ángulo de elevación es θ. Si $\mathbf{r}_p$ y $\mathbf{r}_t$ son los vectores de posición del proyectil y el blanco, respectivamente, ¿hay algún tiempo en el cual $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$?]

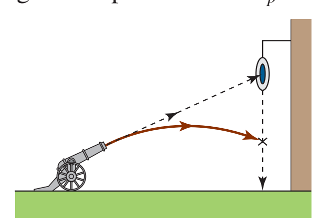


FIGURA 12.3.6 Cañón y blanco del problema 19

20. Para dar abasto a las víctimas de un desastre natural, se dejan caer simplemente equipo sólido y resistente así como paquetes de suministros de alimentos/medicinas desde aviones que vuelan horizontalmente a baja rapidez y altura. Un avión de suministros viaja horizontalmente sobre un blanco a una altura de 1 024 pies y una rapidez constante de 180 mi/h. Emplee (2) para determinar la distancia horizontal que recorre un paquete de suministros con relación al punto desde el cual se dejó caer. ¿A qué ángulo de la línea visual α debe soltarse el paquete de suministro para que dé en el blanco indicado en la FIGURA 12.3.7?

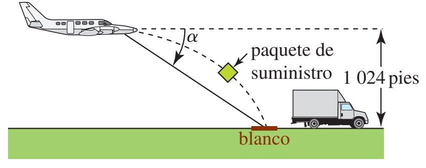


FIGURA 12.3.7 Avión de suministro del problema 20

21. El **peso efectivo** w_e de un cuerpo de masa m en el ecuador de la Tierra se define mediante $w_e = mg - ma$, donde a es la magnitud de la aceleración centrípeta dada en el problema 17. Determine el peso efectivo de una persona de 192 lb si el radio de la Tierra es de 4 000 mi, $g = 32$ pies/s^2 y $v = 1\,530$ pies/s.

22. Considere un ciclista que viaja sobre una pista circular plana de radio r_0. Si m es la masa combinada del ciclista y la bicicleta, llene los blancos de la FIGURA 12.3.8. [*Sugerencia*: Refiérase al problema 17 y a *fuerza* = *masa* × *aceleración*. Suponga que las direcciones positivas son hacia arriba y a la izquierda.] El vector **resultante U** da la dirección a la cual el ciclista debe inclinarse para evitar caer. Encuentre el ángulo ϕ respecto de la vertical al cual el ciclista debe inclinarse si su rapidez es de 44 pies/s y el radio de la pista es de 60 pies.

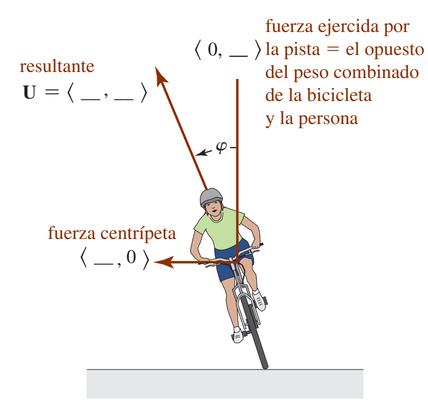


FIGURA 12.3.8 Ciclista del problema 22

23. Emplee el resultado que se obtuvo en (6) para demostrar que la trayectoria de un proyectil balístico es parabólica.

24. Se lanza un proyectil con una rapidez inicial v_0 desde el suelo a un ángulo de elevación θ. Emplee (6) para demostrar que la altura y el alcance máximos del proyectil son

$$H = \frac{v_0^2 \text{ sen}^2 \theta}{2g} \quad \text{y} \quad R = \frac{v_0^2 \text{ sen } 2\theta}{g},$$

respectivamente.

25. La velocidad de una partícula que se mueve en un fluido se describe por medio de un **campo de velocidades** $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$, donde las componentes v_1, v_2 y v_3 son funciones de x, y, z y el tiempo t. Si la velocidad de la partícula es $\mathbf{v}(t) = 6t^2x\mathbf{i} - 4ty^2\mathbf{j} + 2t(z+1)\mathbf{k}$, determine $\mathbf{r}(t)$. [*Sugerencia*: Emplee separación de variables. Vea la sección 8.1 o la sección 16.1.]

26. Suponga que m es la masa de una partícula en movimiento. La segunda ley del movimiento de Newton puede escribirse en forma vectorial como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

donde $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ se denomina el **momento lineal**. El **momento angular** de la partícula respecto al origen se define como $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, donde $\boldsymbol{r}$ es el vector de posición. Si el movimiento de torsión de la partícula alrededor del origen es $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times d\mathbf{p}/dt$, demuestre que τ es la tasa de cambio en el tiempo del momento angular.

27. Suponga que el Sol se localiza en el origen. La fuerza gravitacional $\mathbf{F}$ ejercida sobre un planeta de masa m por el Sol de masa M es

$$\mathbf{F} = -k\frac{Mm}{r^2}\mathbf{u}.$$

F es una **fuerza central**, esto es, una fuerza dirigida a lo largo del vector de posición **r** del planeta. Aquí k es la constante gravitacional (vea la página 369), $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de **r**, y el signo menos indica que **F** es una fuerza atractiva, esto es, una fuerza dirigida hacia el Sol. Vea la FIGURA 12.3.9.

a) Emplee el problema 26 para demostrar que el momento de torsión que actúa sobre el planeta debido a esta fuerza central es **0**.

b) Explique por qué el momento angular **L** del planeta es constante.

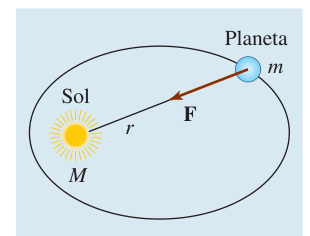


FIGURA 12.3.9 Vector de fuerza central **F** del problema 27

Piense en ello

28. Un cañón lanza una bala horizontalmente como se indica en la FIGURA 12.3.10.

a) Cuanto mayor es la cantidad de pólvora que se utiliza, tanto mayor resulta la velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de la bala de cañón y mayor la distancia a la que llega. Con argumentos matemáticos sólidos explique la razón.

b) Si se ignora la resistencia del aire, explique por qué la bala de cañón siempre alcanza el suelo en el mismo tiempo, independientemente del valor de la velocidad inicial $\mathbf{v}_0 > 0$.

c) Si la bala de cañón se suelta simplemente desde la altura s_0 que se indica en la figura 12.3.10, muestre que el tiempo en el que golpea el suelo es el mismo que el tiempo en el inciso *b*).

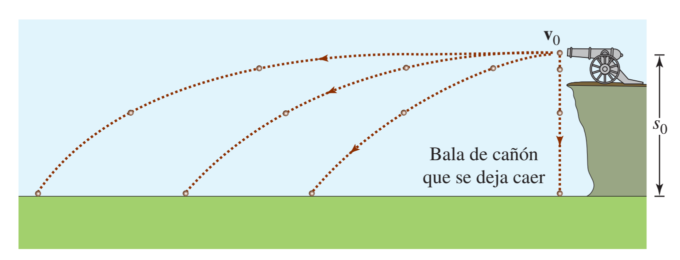


FIGURA 12.3.10 Cañón del problema 28

Proyectos

29. En este proyecto usted empleará las propiedades de las secciones 11.4 y 12.1 para demostrar la **primera ley de Kepler del movimiento planetario**.

- La órbita de un planeta es una elipse con el Sol en un foco.

Se supone que el Sol es de masa M y está ubicado en el origen, **r** es el vector de posición de un cuerpo de masa m que se mueve bajo la atracción gravitacional del Sol y $\mathbf{u} = (1/r)\mathbf{r}$ es un vector unitario en la dirección de **r**.

a) Emplee el problema 27 y la segunda ley del movimiento de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para demostrar que

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{kM}{r^2}\mathbf{u}.$$

b) Utilice el inciso *a*) para demostrar que $\mathbf{r} \times \mathbf{r}'' = \mathbf{0}$.

c) Utilice el inciso *b*) para demostrar que $\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

d) Se deduce del inciso *c*) que $\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{c}$, donde **c** es un vector constante. Demuestre que $\mathbf{c} = r^2(\mathbf{u} \times \mathbf{u}')$.

e) Demuestre que $\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$ y consecuentemente $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$.

f) Utilice los incisos *a*), *d*) y *e*) para demostrar que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{c}) = kM\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

g) Después de integrar el resultado en el inciso *f*) respecto a t, se deduce que $\mathbf{v} \times \mathbf{c} = kM\mathbf{u} + \mathbf{d}$, donde **d** es otro vector constante. Efectúe el producto punto en ambos lados de esta última expresión con el vector $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ y utilice el problema 61 de los ejercicios 11.4 para demostrar que

$$r = \frac{c^2/kM}{1 + (d/kM)\cos\theta},$$

donde $c = |\mathbf{c}|$, $d = |\mathbf{d}|$ y θ es el ángulo entre **d** y **r**.

h) Explique por qué el resultado del inciso *c*) prueba la primera ley de Kepler.

i) En el perihelio (vea la página 595), los vectores **r** y **v** son perpendiculares y tienen magnitudes r_0 y v_0, respectivamente. Emplee esta información y los incisos *d*) y *g*) para demostrar que $c = r_0v_0$ y $d = r_0v_0^2 - kM$.

12.4 Curvatura y aceleración

Introducción Sea C una curva suave en el espacio bidimensional o tridimensional que es trazada por la función de valores vectoriales $\mathbf{r}(t)$. En esta sección consideraremos con mayor detalle el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$, introducido en la sección anterior. Sin embargo, antes de hacer esto, es necesario examinar una cantidad escalar llamada **curvatura** de una curva.

Curvatura Si $\mathbf{r}(t)$ define a una curva C, entonces se sabe que $\mathbf{r}'(t)$ es un vector tangente en un punto P sobre C. En consecuencia,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \tag{1}$$

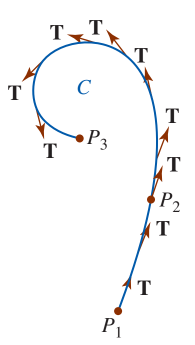


FIGURA 12.4.1 El vector tangente cambia con respecto a la longitud de arco

es una **tangente unitaria**. Sin embargo, es necesario recordar del final de la sección 12.2 que si C es parametrizada por una longitud de arco s, entonces la tangente unitaria a la curva también está dada por $d\mathbf{r}/ds$. Como vimos en (11) de la sección 12.3, la cantidad $|\mathbf{r}'(t)|$ en (1) se relaciona con la función de longitud de arco s por medio de $ds/dt = |\mathbf{r}'(t)|$. Puesto que la curva C es suave, se sabe de la página 667 que $ds/dt > 0$. Por consiguiente, mediante la regla de la cadena,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

y por ello
$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \mathbf{T}(t). \tag{2}$$

Suponga ahora que C es como se ilustra en la FIGURA 12.4.1. Conforme s aumenta, $\mathbf{T}$ se mueve a lo largo de C cambiando dirección pero no longitud (siempre es de longitud unitaria). A lo largo de la parte de la curva entre P_1 y P_2 el vector $\mathbf{T}$ varía poco en dirección; a lo largo de la curva entre P_2 y P_3, donde C se dobla obviamente en forma más pronunciada, el cambio en la dirección de la tangente $\mathbf{T}$ es más pronunciado. Utilizaremos la *tasa* a la cual el vector unitario $\mathbf{T}$ cambia de dirección respecto a la longitud de arco como un indicador de la *curvatura* de una curva suave C.

Definición 12.4.1 Curvatura

Sea $\mathbf{r}(t)$ una función vectorial que define a una curva suave C. Si s es el parámetro de longitud de arco y $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es el vector tangente unitario, entonces la **curvatura** de C en un punto P se define como

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|. \tag{3}$$

El símbolo κ en (3) es la letra griega kappa. Ahora, puesto que las curvas a menudo no se parametrizan por medio de la longitud de arco, es conveniente expresar (3) en términos de un parámetro general t. Al emplear de nuevo la regla de la cadena, es posible escribir

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \text{y consecuentemente} \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}.$$

En otras palabras, la curvatura definida en (3) produce

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Curvatura de un círculo

Encuentre la curvatura de un círculo de radio a.

Solución Un círculo puede describirse por medio de una función vectorial $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{j}$. En este caso, de $\mathbf{r}'(t) = -a\,\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j}$ y $|\mathbf{r}'(t)| = a$ obtenemos

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \quad \text{y} \quad \mathbf{T}'(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\,t\,\mathbf{j}.$$

Por consiguiente, de acuerdo con (4) la curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\sqrt{\cos^2 t + \text{sen}^2\,t}}{a} = \frac{1}{a}. \tag{5}$$


Gran curvatura κ

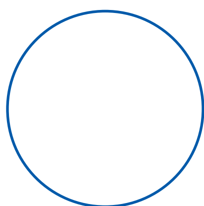

Pequeña curvatura κ

FIGURA 12.4.2 Curvatura de un círculo en el ejemplo 1

El resultado en (5) muestra que la curvatura en un punto sobre un círculo es el recíproco del radio del círculo e indica un hecho que concuerda con nuestra intuición: un círculo con un radio pequeño se curva más que uno con un radio más grande. Vea la FIGURA 12.4.2. ■

Componentes tangencial y normal de la aceleración Suponga que una partícula se mueve en el espacio bidimensional o tridimensional sobre una curva suave C descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$. Entonces la velocidad de la partícula sobre C es $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, en tanto que su rapidez corresponde a $ds/dt = v = |\mathbf{v}(t)|$. Entonces, (1) implica $\mathbf{v}(t) = v\mathbf{T}(t)$. Diferenciando esta última expresión con respecto a t obtenemos la aceleración:

$$\mathbf{a}(t) = v\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{6}$$

Además, con ayuda del teorema 12.2.1*iii*) se deduce de la diferenciación de $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = 1$ que $\mathbf{T}\cdot d\mathbf{T}/dt = 0$. Por consiguiente, en un punto P sobre C los vectores $\mathbf{T}$ y $d\mathbf{T}/dt$ son ortogonales. Si $|d\mathbf{T}/dt| \neq 0$, entonces el vector

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \tag{7}$$

es una normal unitaria a la curva C en P con dirección dada por $d\mathbf{T}/dt$. El vector $\mathbf{N}$ se denomina **vector normal principal**, o simplemente **normal unitaria**. Sin embargo, puesto que la curvatura es $\kappa(t) = |\mathbf{T}'(t)|/v$, se sigue de (7) que $d\mathbf{T}/dt = \kappa v\mathbf{N}$. Entonces, (6) se convierte en

$$\mathbf{a}(t) = \kappa v^2\mathbf{N} + \frac{dv}{dt}\mathbf{T}. \tag{8}$$

Escribiendo (8) como

$$\mathbf{a}(t) = a_N\mathbf{N} + a_T\mathbf{T} \tag{9}$$

advertimos que el vector aceleración $\mathbf{a}$ de la partícula en movimiento es la suma de dos vectores ortogonales $a_N\mathbf{N}$ y $a_T\mathbf{T}$. Vea la FIGURA 12.4.3. Las funciones escalares

$$a_T = dv/dt \qquad \text{y} \qquad a_N = \kappa v^2$$

se llaman **componentes tangencial** y **normal de la aceleración**, respectivamente. Note que la componente tangencial de la aceleración resulta de un cambio en la *magnitud* de la velocidad $\mathbf{v}$, mientras que la componente normal de la aceleración proviene de un cambio en la *dirección* de $\mathbf{v}$.

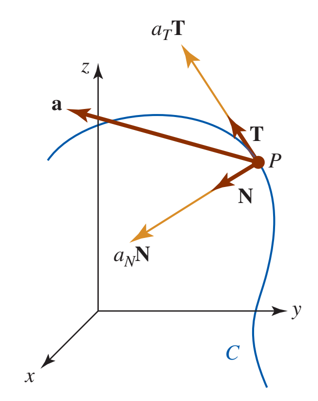


FIGURA 12.4.3 Componentes del vector aceleración

La binormal Un tercer vector definido por el producto cruz

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \tag{10}$$

recibe el nombre de **vector binormal**. Los tres vectores unitarios $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ forman un conjunto de mano derecha de vectores mutuamente ortogonales denominado **triedro móvil**. El plano de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{N}$ se denomina **plano osculante**, el plano $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ se dice que es el **plano normal**, y el plano de $\mathbf{T}$ y $\mathbf{B}$ es el **plano de rectificación**. Vea la FIGURA 12.4.4.

Literalmente, las palabras "plano osculante" significan "plano del besador".

Los tres vectores unitarios mutuamente ortogonales $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ pueden considerarse como un sistema de coordenadas de mano derecha móvil, ya que

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t), \quad \mathbf{N}(t) = \mathbf{B}(t) \times \mathbf{T}(t), \quad \mathbf{T}(t) = \mathbf{N}(t) \times \mathbf{B}(t).$$

Este sistema de coordenadas móvil se conoce como **marco TNB**.

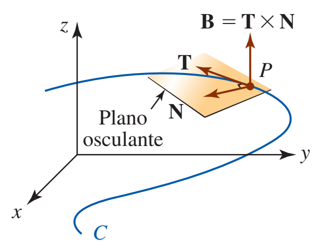


FIGURA 12.4.4 Triedro móvil y plano osculante

EJEMPLO 2 Determinación de T, N y B

En el espacio tridimensional la posición de una partícula en movimiento está dada por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\, t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$. Encuentre los vectores $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ y $\mathbf{B}(t)$. Determine la curvatura $\kappa(t)$.

Solución Puesto que $\mathbf{r}'(t) = -2\,\text{sen}\, t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, y por ello de (1) advertimos que una tangente unitaria es

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\text{sen}\, t\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Después de esto, se tiene

$$\mathbf{T}'(t) = -\frac{2}{\sqrt{13}}\cos t\mathbf{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\text{sen}\, t\mathbf{j} \quad \text{y} \quad |\mathbf{T}'(t)| = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Por consiguiente, (7) produce la normal principal

$$\mathbf{N}(t) = -\cos t\,\mathbf{i} - \text{sen}\, t\,\mathbf{j}.$$

De tal manera, de (10) la binormal es

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\text{sen}\, t & \frac{2}{\sqrt{13}}\cos t & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\cos t & -\text{sen}\, t & 0 \end{vmatrix} \tag{11}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{13}}\text{sen}\, t\,\mathbf{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\cos t\,\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Por último, al emplear $|\mathbf{T}'(t)| = 2/\sqrt{13}$ y $|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{13}$, encontramos de (4) que la curvatura en cualquier punto es la constante

$$\kappa(t) = \frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{2}{13}.$$ ■

El hecho de que la curvatura $\kappa(t)$ en el ejemplo 2 es constante no es una sorpresa, ya que la curva definida por $\mathbf{r}(t)$ es una hélice circular.

EJEMPLO 3 Planos osculante, normal y de rectificación

En el punto correspondiente a $t = \pi/2$ sobre la hélice circular del ejemplo 2, encuentre una ecuación de

a) el plano osculante,
b) el plano normal y
c) el plano de rectificación.

Solución De $\mathbf{r}(\pi/2) = \langle 0, 2, 3\pi/2\rangle$ el punto en cuestión es $(0, 2, 3\pi/2)$.

a) De (11) un vector normal al plano osculante en P es

$$\mathbf{B}(\pi/2) = \mathbf{T}(\pi/2) \times \mathbf{N}(\pi/2) = \frac{3}{\sqrt{13}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\mathbf{k}.$$

Para encontrar una ecuación de un plano no se requiere una normal *unitaria*, por lo que en lugar de $\mathbf{B}(\pi/2)$ es un poco más simple usar $\langle 3, 0, 2\rangle$. De (2) de la sección 11.6, una ecuación del plano osculante es

$$3(x - 0) + 0(y - 2) + 2\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad 3x + 2z = 3\pi.$$

b) En el punto P, el vector $\mathbf{T}(\pi/2) = \frac{1}{\sqrt{13}}\langle -2, 0, 3\rangle$ o $\langle -2, 0, 3\rangle$ es normal al plano que contiene $\mathbf{N}(\pi/2)$ y $\mathbf{B}(\pi/2)$. Consecuentemente, una ecuación del plano normal es

$$-2(x - 0) + 0(y - 2) + 3\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad -4x + 6z = 9\pi.$$

c) Por último, en el punto P, el vector $\mathbf{N}(\pi/2) = \langle 0, -1, 0\rangle$ es normal al plano que contiene $\mathbf{T}(\pi/2)$ y $\mathbf{B}(\pi/2)$. Una ecuación del plano de rectificación es

$$0(x - 0) + (-1)(y - 2) + 0\left(z - \frac{3\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{o} \qquad y = 2.$$ ■

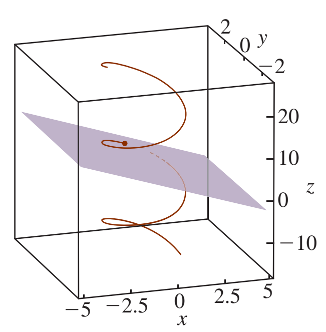


FIGURA 12.4.5 Hélice y plano osculante del ejemplo 3

En la FIGURA 12.4.5 se presentan porciones de la hélice y del plano osculante del ejemplo 3. El punto $(0, 2, 3\pi/2)$ se indica en la figura mediante el punto rojo.

Fórmulas para a_T, a_N y la curvatura Efectuando primero al producto punto y después el producto cruz, para el vector $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ con el vector de aceleración (9), es posible obtener fórmulas explícitas que impliquen a $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}''$ para las componentes tangencial y normal de la aceleración y la curvatura. Observe que

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = a_N(v\underbrace{\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}}_{0}) + a_T(v\underbrace{\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}}_{1}) = a_T v$$

produce la componente tangencial de la aceleración:

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{|\mathbf{v}|} = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{12}$$

Por otro lado,

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = a_N(v\underbrace{\mathbf{T}\times\mathbf{N}}_{\mathbf{B}}) + a_T(v\underbrace{\mathbf{T}\times\mathbf{T}}_{\mathbf{0}}) = a_N v\mathbf{B}.$$

Puesto que $|\mathbf{B}| = 1$, se concluye que la componente normal de la aceleración es

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}. \tag{13}$$

Resolviendo (13) para la curvatura κ, obtenemos

$$\kappa(t) = \frac{|\mathbf{v}\times\mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3} = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \tag{14}$$

EJEMPLO 4 Determinación de a_T, a_N y κ

La curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ es una variación de la curva cúbica trenzada que se discutió en la sección 12.1. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula que se mueve sobre una curva C, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en cualquier punto sobre C. Encuentre la curvatura.

Solución De

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

encontramos $\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = t + 2t^3$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{1 + t^2 + t^4}$. Por consiguiente, de (12) obtenemos

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{t + 2t^3}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

En este caso,

$$\mathbf{v}\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

y $|\mathbf{v}\times\mathbf{a}| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}$. Por tanto, (13) produce

$$a_N = \kappa v^2 = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{\sqrt{1 + t^2 + t^4}}.$$

Por último, de (14) encontramos que la curvatura de la cúbica trenzada está dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}.$$ ■

Radio de curvatura El recíproco de la curvatura, $\rho = 1/\kappa$, se denomina **radio de curvatura**. El radio de curvatura en un punto P sobre una curva C es el radio de un círculo que "encaja" en la curva mejor que cualquier otro círculo. El círculo en P se denomina **círculo de curvatura** y su centro es el **centro de curvatura**. El círculo de curvatura tiene la misma recta tangente en P que la curva C, y su centro yace sobre el lado cóncavo de C. Por ejemplo, un automóvil que se mueve sobre una pista curva, como se ilustra en la FIGURA 12.4.6, puede considerarse en cualquier instante como si se moviera sobre un círculo de radio ρ. En consecuencia, la componente normal de su aceleración $a_N = kv^2$ debe ser la misma que la magnitud de su aceleración centrípeta $a = v^2/\rho$. Por tanto, $\kappa = 1/\rho$ y $\rho = 1/\kappa$. Conociendo el radio de curvatura, es posible determinar la rapidez v a la cual el automóvil puede superar la curva peraltada sin patinarse. (Ésta es esencialmente la idea en el problema 22 en los ejercicios 12.3.)

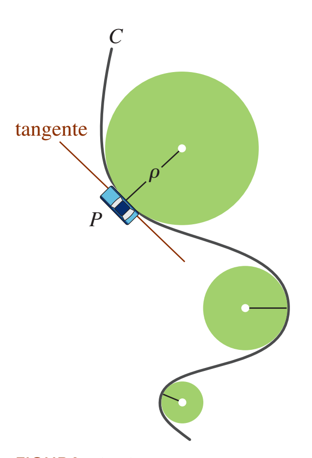


FIGURA 12.4.6 Círculo y radio de curvatura

$\mathbf{r}(t)$ NOTAS DESDE EL AULA

Al escribir (6) como

$$\mathbf{a}(t) = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T}$$

observamos que la llamada aceleración escalar d^2s/dt^2, referida en las *Notas desde el aula* de la sección 12.3, es vista ahora como la componente tangencial a_T de la aceleración $\mathbf{a}(t)$.

Ejercicios 12.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-40.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, para la función de posición dada, encuentre la tangente unitaria $\mathbf{T}(t)$.

1. $\mathbf{r}(t) = (t\cos t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + (t\operatorname{sen} t + \cos t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$, $t > 0$
2. $\mathbf{r}(t) = e^t\cos t\,\mathbf{i} + e^t\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}e^t\mathbf{k}$
3. Use el procedimiento descrito en el ejemplo 2 para determinar $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ y $\kappa(t)$ en relación con el movimiento sobre una hélice circular general que se describe mediante $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$.
4. Emplee el procedimiento descrito en el ejemplo 2 para mostrar en el cúbico trenzado del ejemplo 4 que en $t = 1$:

$$\mathbf{T}(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}), \qquad \mathbf{N}(1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}),$$

$$\mathbf{B}(1) = -\frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}), \quad \kappa(1) = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

En los problemas 5 y 6, encuentre una ecuación de

a) el plano osculante,
b) el plano normal y
c) el plano de rectificación para la curva espacial dada en el punto que corresponde al valor indicado de t.

5. La hélice circular en el ejemplo 2; $t = \pi/4$
6. El cúbico trenzado del ejemplo 4; $t = 1$

En los problemas 7-16, $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de la partícula en movimiento. Encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t.

7. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$
8. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$
9. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$
10. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$
11. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$
12. $\mathbf{r}(t) = \tan^{-1}t\,\mathbf{i} + \frac{1}{2}\ln(1 + t^2)\mathbf{j}$
13. $\mathbf{r}(t) = 5\cos t\,\mathbf{i} + 5\operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$
14. $\mathbf{r}(t) = \cosh t\,\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\,\mathbf{j}$
15. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$
16. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2t - 1)\mathbf{j} + (4t + 2)\mathbf{k}$
17. Encuentre la curvatura de una hélice elíptica que se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\mathbf{j} + ct\,\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
18. ***a***) Encuentre la curvatura de una órbita elíptica que se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + b\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
    b) Demuestre que cuando $a = b$, la curvatura de una órbita circular es la constante $\kappa = 1/a$.
19. Demuestre que la curvatura de una línea recta es la constante $\kappa = 0$. [*Sugerencia*: Utilice (1) de la sección 11.5.]
20. Encuentre la curvatura de la cicloide que se describe mediante

$$\mathbf{r}(t) = a(t - \operatorname{sen} t)\mathbf{i} + a(1 - \cos t)\mathbf{j},\ a > 0 \text{ en } t = \pi.$$

21. Considere que C es una curva plana trazada por $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}$, donde f y g tienen segundas derivadas. Demuestre que la curvatura en un punto está dada por

$$\kappa = \frac{|f'(t)g''(t) - g'(t)f''(t)|}{\left([f'(t)]^2 + [g'(t)]^2\right)^{3/2}}.$$

22. Demuestre que si $y = f(x)$, la fórmula para la curvatura κ en el problema 21 se reduce a

$$\kappa = \frac{|F''(x)|}{[1 + (F'(x))^2]^{3/2}}.$$

En los problemas 23 y 24, utilice el resultado del problema 22 para encontrar la curvatura y el radio de curvatura de la curva en los puntos indicados. Decida en cuáles puntos la curva es "más angulosa".

23. $y = x^2$; $(0, 0), (1, 1)$
24. $y = x^3$; $(-1, -1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}\right)$
25. Dibuje la gráfica de la curvatura $y = \kappa(x)$ para la parábola del problema 23. Determine el comportamiento de $y = \kappa(x)$ cuando $x \to \pm\infty$. En otras palabras, describa este comportamiento en términos geométricos.

☰ Problemas con calculadora/SAC

26. En el ejemplo 4 se demostró que la curvatura para $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{j} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{k}$ está dada por

$$\kappa(t) = \frac{(t^4 + 4t^2 + 1)^{1/2}}{(1 + t^2 + t^4)^{3/2}}.$$

***a*)** Utilice un SAC para obtener la gráfica de $y = \kappa(t)$ con $-3 \le t \le 3$.

***b*)** Utilice un SAC para obtener $\kappa'(t)$ y los números críticos de la función $y = \kappa(t)$.

***c*)** Encuentre el valor máximo de $y = \kappa(t)$ y aproxime los puntos correspondientes sobre la curva trazada por $\mathbf{r}(t)$.

☰ Piense en ello

27. Suponga que $(c, F(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de $y = F(x)$ y que F'' existe para toda x en algún intervalo que contenga a C. Analice la curvatura cerca de $(c, F(c))$.

28. Demuestre que $|\mathbf{a}(t)|^2 = a_N^2 + a_T^2$.

Revisión del capítulo 12

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-40.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-10, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. Una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\,\text{sen}\,t\,\mathbf{k}$ se mueve con rapidez constante. _____

2. Un círculo tiene curvatura constante. _____

3. El vector binormal es perpendicular al plano osculante. _____

4. Si $\mathbf{r}(t)$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, entonces el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ y el vector aceleración $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ son ortogonales. _____

5. Si s es la longitud de arco de una curva C, entonces la magnitud de velocidad de una partícula en movimiento sobre C es ds/dt. _____

6. Si s es la longitud de arco de una curva C, entonces la magnitud de la aceleración de una partícula sobre C es d^2s/dt^2. _____

7. Si la binormal está definida por $\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$, entonces la normal principal es $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$. _____

8. Si $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ y $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_2(t) = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, entonces $\lim_{t\to a} \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = 0$. _____

9. Si $\mathbf{r}_1(t)$ y $\mathbf{r}_2(t)$ son integrables, entonces $\int_a^b [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]\,dt = \left[\int_a^b \mathbf{r}_1(t)\,dt\right] \cdot \left[\int_a^b \mathbf{r}_2(t)\,dt\right]$. _____

10. Si $\mathbf{r}(t)$ es diferenciable, entonces $\dfrac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)|^2 = 2\mathbf{r}(t) \cdot \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. La trayectoria de una partícula en movimiento cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + t^4\mathbf{k}$ yace en el plano __________.

2. La curvatura de una línea recta es $\kappa =$ __________.

Para la función vectorial $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, \frac{1}{3}t^3 \rangle$,

3. $\mathbf{r}'(1) =$ __________,

4. $\mathbf{r}''(1) =$ __________,

5. $\kappa(1) =$ __________,

6. $\mathbf{T}(1) =$ __________,

7. $\mathbf{N}(1) =$ __________,

8. $\mathbf{B}(1) =$ __________,

y en el punto correspondiente a $t = 1$ una ecuación del

9. plano normal es __________, y una ecuación del

10. plano osculante es __________.

C. Ejercicios

1. Encuentre la longitud de la curva que traza la función vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k},\ 0 \le t \le \pi.$$

2. El vector de posición de una partícula en movimiento está dado por $\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} + (1 + t)\mathbf{j} + 7t\mathbf{k}$. Ya que la partícula empieza en un punto correspondiente a $t = 0$, encuentre la distancia que la partícula recorre hasta el punto correspondiente a $t = 3$. ¿En qué punto la partícula habrá recorrido $80\sqrt{3}$ unidades a lo largo de la curva?

3. Encuentre las ecuaciones paramétricas para la recta tangente a la curva trazada por

$$\mathbf{r}(t) = -3t^2\mathbf{i} + 4\sqrt{t + 1}\,\mathbf{j} + (t - 2)\mathbf{k}$$

en el punto correspondiente a $t = 3$.

4. Dibuje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = t\cos t\mathbf{i} + t\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

5. Dibuje la curva trazada por $\mathbf{r}(t) = \cosh t\mathbf{i} + \operatorname{senh} t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$.

6. Dado que

$$\mathbf{r}_1(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = -t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + (t^2 + 1)\mathbf{k},$$

calcule la derivada $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

7. Dado que

$$\mathbf{r}_1(t) = \cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j} + 4t^3\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_2(t) = t^2\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j} + e^{2t}\mathbf{k},$$

calcule $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]$ de dos maneras diferentes.

8. Dado que $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ son diferenciables, encuentre $\dfrac{d}{dt}[\mathbf{r}_1(t) \cdot (\mathbf{r}_2(t) \times \mathbf{r}_3(t))]$.

9. Sobre una partícula de masa m actúa una fuerza continua de magnitud 2, que tiene dirección paralela al eje y positivo. Si la partícula empieza con una velocidad inicial $\mathbf{v}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ desde (1, 1, 0), encuentre el vector de posición de la partícula y las ecuaciones paramétricas de su trayectoria. [*Sugerencia*: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.]

10. El vector de posición de una partícula en movimiento es $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - t^3)\mathbf{j}$.

a) Dibuje la trayectoria de la partícula.
b) Dibuje los vectores de velocidad y aceleración en $t = 1$.
c) Encuentre la rapidez en $t = 1$.

11. Encuentre la velocidad y la aceleración de una partícula cuyo vector de posición es $\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ cuando ésta pasa por el plano $-x + y + z = -4$.

12. La velocidad de una partícula en movimiento es $\mathbf{v}(t) = -10t\mathbf{i} + (3t^2 - 4t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si la partícula empieza en $t = 0$ en (1, 2, 3), ¿cuál es su posición en $t = 2$?

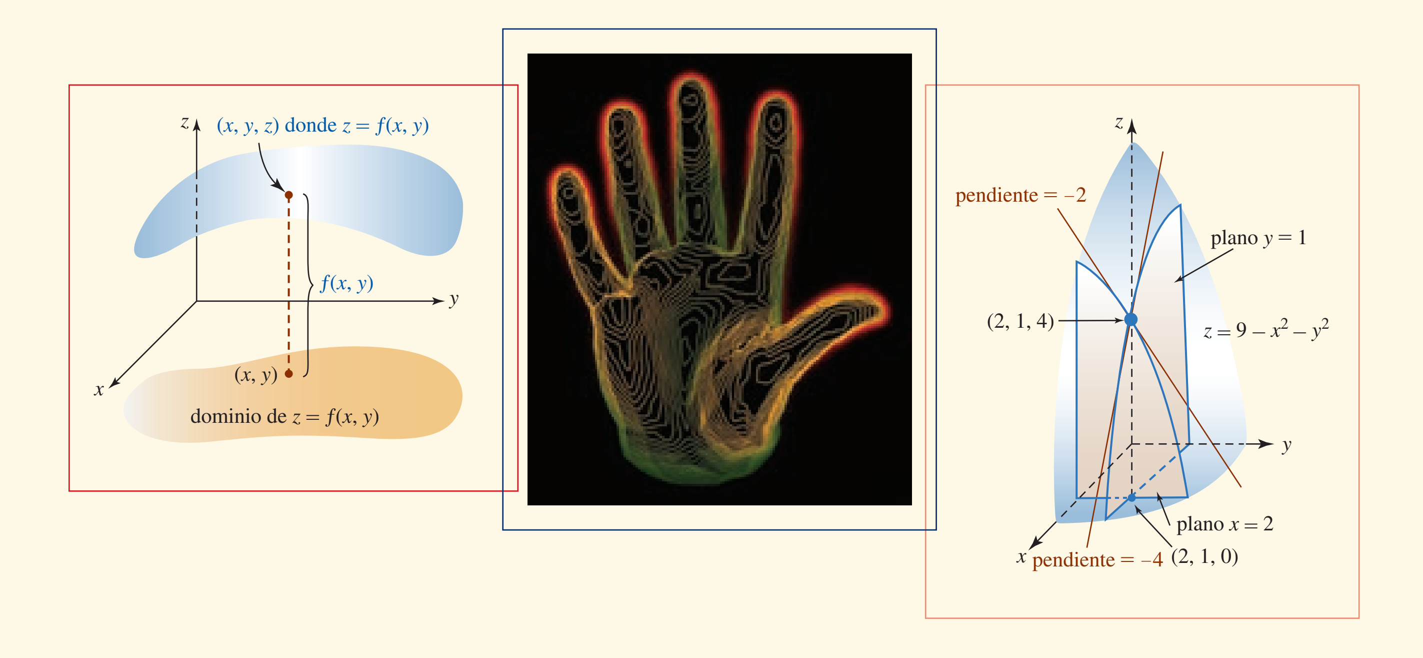
13. La aceleración de una partícula en movimiento es $\mathbf{a}(t) = \sqrt{2}\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \sqrt{2}\cos t\mathbf{j}$. Dado que la velocidad y la posición de la partícula en $t = \pi/4$ son $\mathbf{v}(\pi/4) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y $\mathbf{r}(\pi/4) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + (\pi/4)\mathbf{k}$, respectivamente, ¿cuál es la posición de la partícula en $t = 3\pi/4$?

14. Dado que $\mathbf{r}(t) = \frac{1}{2}t^2\mathbf{i} + \frac{1}{3}t^3\mathbf{j} - \frac{1}{2}t^2\mathbf{k}$ es el vector de posición de una partícula en movimiento, encuentre las componentes tangencial y normal de la aceleración en el tiempo t. Determine la curvatura.

15. Suponga que la función vectorial del problema 5 es el vector de posición de una partícula en movimiento. Encuentre los vectores $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ y $\mathbf{B}$ en $t = 1$. Determine la curvatura en este punto.

Capítulo 13

Derivadas parciales



En este capítulo Hasta este punto de nuestro estudio del cálculo, sólo hemos considerado funciones de una sola variable. Previamente se consideraron conceptos de funciones de una sola variable, como límites, tangentes, máximo y mínimo, integrales, etc., extendidos también a funciones de dos o más variables. Este capítulo se dedica fundamentalmente al cálculo diferencial de funciones de múltiples variables.

13.1 Funciones de varias variables

Introducción Recuerde que una función de una variable $y = f(x)$ es una regla de correspondencia que asigna a cada elemento x en el subconjunto X de los números reales, denominado el *dominio* de f, uno y sólo un número real y en otro conjunto de números reales Y. El conjunto $\{y|y = f(x), x \text{ en } X\}$ se llama *rango* de f. En este capítulo consideraremos el cálculo de funciones que son, en la mayoría de las veces, funciones de dos variables. Es probable que el lector ya tenga conocimiento de la existencia de funciones de dos o más variables.

EJEMPLO 1 Algunas funciones de dos variables

a) $A = xy$, área de un rectángulo
b) $V = \pi r^2 h$, volumen de un cilindro circular
c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, volumen de un cono circular
d) $P = 2x + 2y$, perímetro de un rectángulo ■

Funciones de dos variables La definición formal de una función de dos variables se presenta a continuación.

Definición 13.1.1 Función de dos variables

Una **función de dos variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada par ordenado de números reales (x, y) en el subconjunto del plano xy uno y sólo un número z en el conjunto R de números reales.

El conjunto de pares ordenados (x, y) se llama **dominio** de la función y el conjunto de valores correspondientes de z recibe el nombre de **rango**. Una función de dos variables suele escribirse $z = f(x, y)$ y se lee "f de x, y." Las variables x y y se denominan **variables independientes** de la función y z es la **variable dependiente**.

Funciones polinomiales y racionales Una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$, donde m y n son enteros no negativos. El cociente de dos funciones polinomiales se denomina **función racional**. Por ejemplo,

Funciones polinomiales:

$$f(x, y) = xy - 5x^2 + 9 \quad \text{y} \quad f(x, y) = 3xy^2 - 5x^2y + x^3$$

Funciones racionales:

$$f(x, y) = \frac{1}{xy - 3y} \quad \text{y} \quad f(x, y) = \frac{x^4y^2}{x^2y + y^5 + 2x}.$$

El dominio de una función polinomial es el plano xy completo. El dominio de una función racional es el plano xy, excepto aquellos pares ordenados (x, y) para los cuales el denominador es cero. Por ejemplo, el dominio de la función racional $f(x, y) = 4/(6 - x^2 - y^2)$ consiste en el plano xy, excepto aquellos puntos (x, y) que yacen en la circunferencia $6 - x^2 - y^2 = 0$ o $x^2 + y^2 = 6$.

EJEMPLO 2 Dominio de una función de dos variables

a) Dado que $f(x, y) = 4 + \sqrt{x^2 - y^2}$, encuentre $f(1, 0)$, $f(5, 3)$ y $f(4, -2)$.
b) Dibuje el dominio de la función.

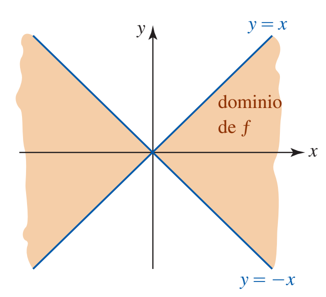


FIGURA 13.1.1 Dominio de f del ejemplo 2

Solución

a)
$$f(1, 0) = 4 + \sqrt{1 - 0} = 5$$
$$f(5, 3) = 4 + \sqrt{25 - 9} = 4 + \sqrt{16} = 8$$
$$f(4, -2) = 4 + \sqrt{16 - (-2)^2} = 4 + \sqrt{12} = 4 + 2\sqrt{3}$$

b) El dominio de f consiste en todos los pares ordenados (x, y) para los cuales $x^2 - y^2 \geq 0$ o $(x - y)(x + y) \geq 0$. Como se ilustra en la FIGURA 13.1.1, el dominio consiste en todos los puntos sobre las rectas $y = x$ y $y = -x$, y es la región sombreada entre ellas. ■

EJEMPLO 3 Funciones de dos variables

a) Una ecuación de un plano $ax + by + cz = d$, $c \neq 0$, describe una función cuando se escribe como

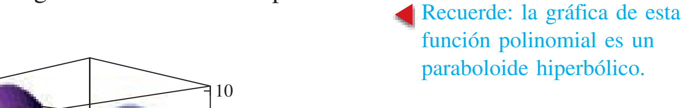
$$z = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \qquad \text{o} \qquad f(x, y) = \frac{d}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y.$$

Puesto que z es un polinomio en x y y, el dominio de la función consiste en el plano xy completo.

b) Un modelo matemático para el área S de la superficie de un cuerpo humano es una función de su peso w y altura h:

$$S(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}. \qquad ■$$

Gráficas La **gráfica** de una función $z = f(x, y)$ es una *superficie* en el espacio tridimensional. Vea la FIGURA 13.1.2. En la FIGURA 13.1.3 la superficie es la gráfica de la función polinomial $z = 2x^2 - 2y^2 + 2$.



Recuerde: la gráfica de esta función polinomial es un paraboloide hiperbólico.

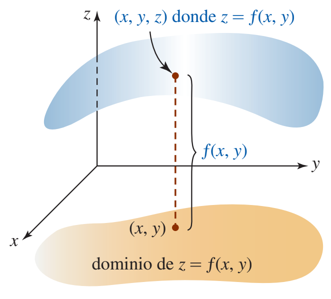


FIGURA 13.1.2 La gráfica de una función de x y y es una superficie

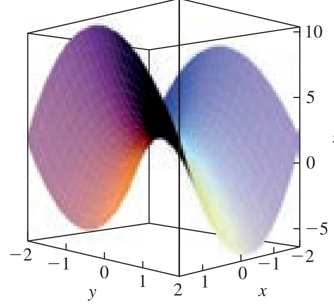


FIGURA 13.1.3 Gráfica de una función polinomial

EJEMPLO 4 Dominio de una función de dos variables

A partir de la discusión de superficies cuádricas de la sección 11.8 usted puede reconocer que la gráfica de una función polinomial $f(x, y) = x^2 + 9y^2$ es un paraboloide elíptico. Puesto que f se define para todo par ordenado de números reales, su dominio es el plano xy completo. Del hecho de que $x^2 \geq 0$ y $y^2 \geq 0$, podemos afirmar que el rango de f está definido por la desigualdad $z \geq 0$. ■

EJEMPLO 5 Dominio de una función de dos variables

En la sección 11.7 vimos que $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ es una esfera de radio 3 centrada en el origen. Al resolver para z, y tomar la raíz cuadrada no negativa, obtenemos la función

$$z = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \qquad \text{o} \qquad f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

La gráfica de f es el hemisferio superior que se ilustra en la FIGURA 13.1.4. El dominio de la función es un conjunto de pares ordenados (x, y) donde las coordenadas satisfacen

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Esto es, el dominio de f consiste en la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y su interior. La inspección de la figura 13.1.4 muestra que el rango de la función es el intervalo [0, 3] sobre el eje z. ■

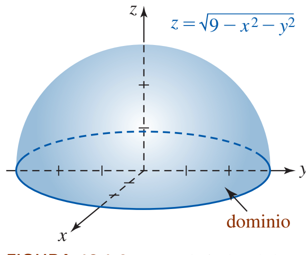


FIGURA 13.1.4 Hemisferio del ejemplo 5

En ciencia a menudo se encuentran las palabras **isotérmico**, **equipotencial** e **isobárico**. El prefijo *iso* proviene de la palabra griega *isos*, la cual significa *igual* o *lo mismo*. Entonces, dichos términos se aplican a líneas o curvas sobre las cuales es *constante* la temperatura, el potencial o la presión barométrica.

EJEMPLO 6 Función potencial

El potencial electrostático en un punto $P(x, y)$ en el plano debido a una carga puntual unitaria en el origen está dado por $U = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Si el potencial es una constante, digamos $U = c$, donde c es una constante positiva, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = c \qquad \text{o} \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{c^2}.$$

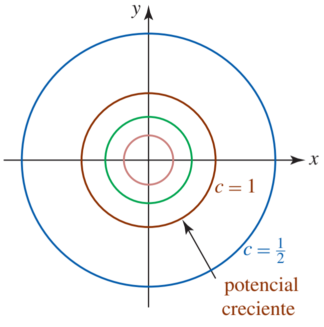


FIGURA 13.1.5 Curvas equipotenciales del ejemplo 6

Así, como se ilustra en la FIGURA 13.1.5, las curvas de equipotencial son círculos concéntricos que rodean a la carga. Note que en la figura 13.1.5 es posible tener una percepción del comportamiento de la función U, específicamente donde ésta crece (o decrece), al observar la dirección creciente de c. ■

Curvas de nivel En general, si una función de dos variables está dada por $z = f(x, y)$, entonces las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para una c apropiada, reciben el nombre de **curvas de nivel** de f. La palabra *nivel* proviene del hecho de que podemos interpretar $f(x, y) = c$ como la proyección sobre el plano xy de la curva de intersección o **traza** de $z = f(x, y)$ y el plano (horizontal o de nivel) $z = c$. Vea la FIGURA 13.1.6.

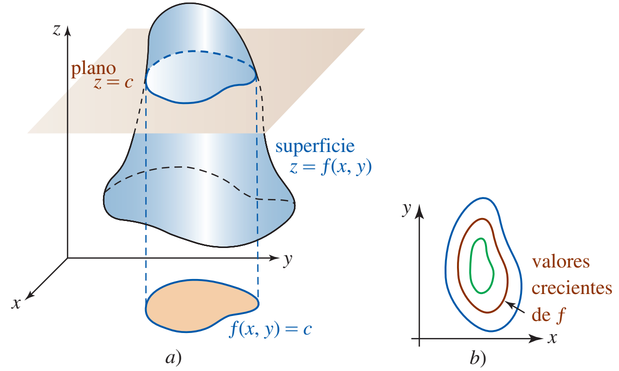


FIGURA 13.1.6 Superficie en *a*) y curvas de nivel en *b*)

EJEMPLO 7 Curvas de nivel

Las curvas de nivel de una función polinomial $f(x, y) = y^2 - x^2$ son la familia de curvas definidas por $y^2 - x^2 = c$. Como se muestra en la FIGURA 13.1.7, cuando $c > 0$ o $c < 0$, un miembro de esta familia de curvas es una hipérbola. Para $c = 0$, obtenemos las rectas $y = x$ y $y = -x$.

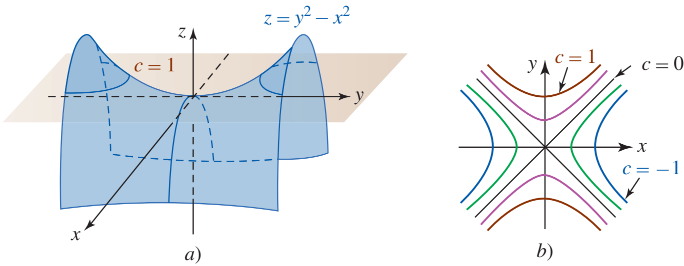


FIGURA 13.1.7 Superficie y curvas de nivel del ejemplo 7 ■

En la mayoría de los casos la tarea de graficación de curvas de nivel de una función de dos variables $z = f(x, y)$ es considerable. Usamos un SAC para generar las superficies y curvas de nivel correspondientes de la FIGURA 13.1.8 y FIGURA 13.1.9.

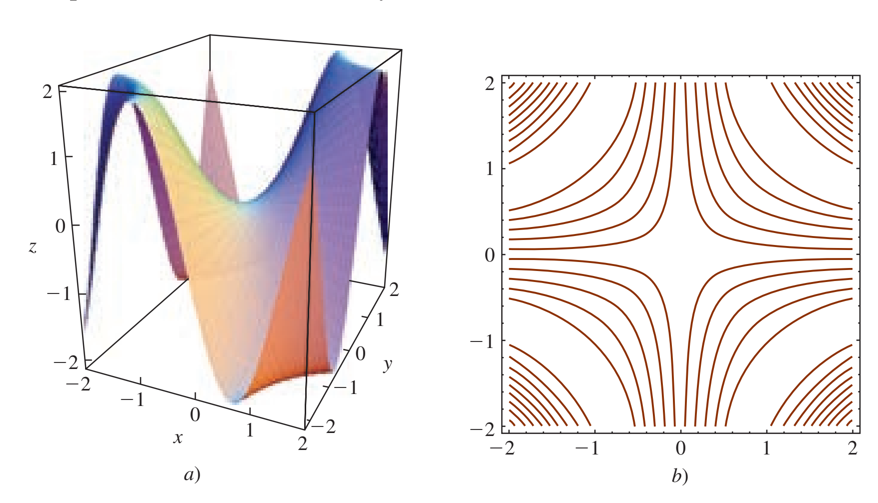


FIGURA 13.1.8 Gráfica de $f(x, y) = 2 \text{ sen } xy$ en *a*); curvas de nivel en *b*)

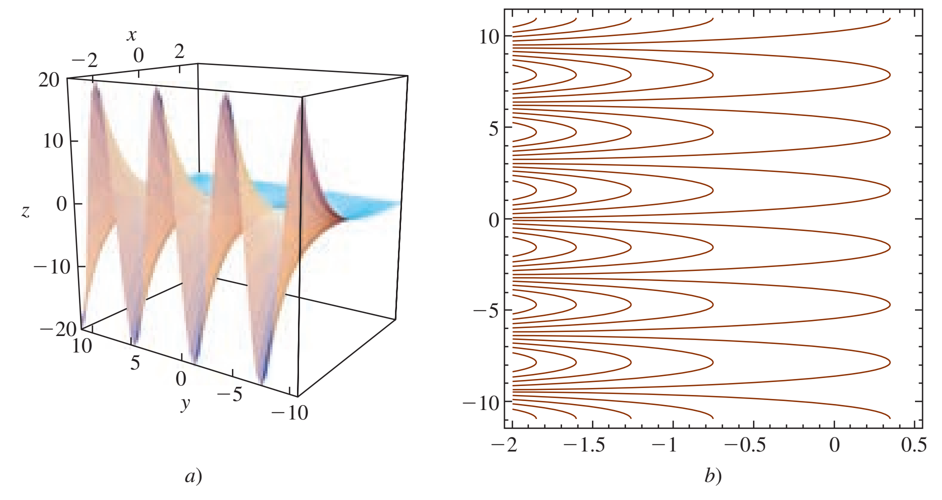


FIGURA 13.1.9 Gráfica de $f(x, y) = e^{-x}$ sen y en a); curvas de nivel en b)

Las curvas de nivel de una función f también reciben el nombre de **líneas de contorno**. A nivel práctico, los **mapas de contorno** son usados más a menudo para desplegar curvas de igual elevación. En la FIGURA 13.1.10 podemos observar que un mapa de contornos ilustra los diversos segmentos de una columna que tienen una altura dada. Ésta es la idea de los contornos de la FIGURA 13.1.11,* los cuales muestran el espesor de la ceniza volcánica alrededor del volcán El Chichón, en el estado de Chiapas, México. El Chichón hizo erupción el 28 de marzo y el 4 de abril de 1982.

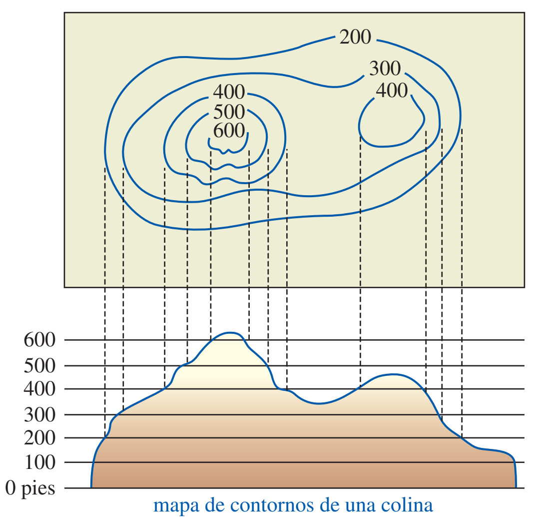


FIGURA 13.1.10 Mapa de contornos

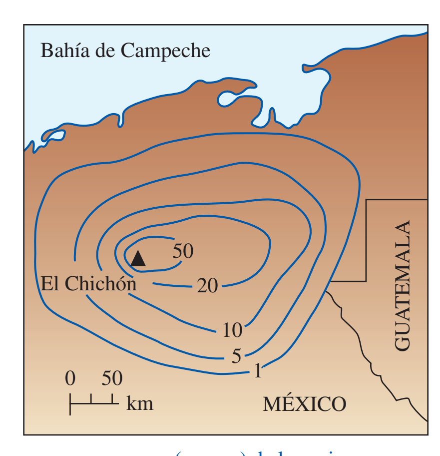


FIGURA 13.1.11 Mapa de contornos que muestra la profundidad de la ceniza alrededor del volcán

Funciones de tres o más variables Las definiciones de funciones de tres o más variables son simplemente generalizaciones de la definición 13.1.1. Por ejemplo, una **función de tres variables** es una regla de correspondencia que asigna a cada triada ordenada de números reales (x, y, z) en un subconjunto del espacio tridimensional, uno y sólo un número w en el conjunto R de los números reales. Una función de tres variables suele denotarse por medio de $w = f(x, y, z)$ o $w = F(x, y, z)$. Una **función polinomial** de tres variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n z^k$, donde m, n y k son enteros no negativos. El cociente de dos funciones polinomiales se llama **función racional**.

Por ejemplo, el volumen V y el área de la superficie S de una caja rectangular son funciones polinomiales de tres variables:

$$V = xyz \qquad \text{y} \qquad S = 2xy + 2xz + 2yz.$$

*Adaptado con permiso de la revista *National Geographic*.

La ley de Poiseuille establece que la tasa de descarga, o tasa de flujo, de un fluido viscoso (como la sangre) a través de un tubo (como una arteria) es

$$Q = k\frac{R^4}{L}(p_1 - p_2),$$

donde k es una constante, R es el radio del tubo, L es su longitud, y p_1 y p_2 son las presiones en los extremos del tubo. Éste es un ejemplo de una función *de cuatro* variables.

Nota: Puesto que se requieren cuatro dimensiones, no es posible graficar una función de tres variables.

EJEMPLO 8 Dominio de una función de cuatro variables

El dominio de la función racional de cuatro variables

$$f(x, y, z) = \frac{2x + 3y + z}{4 - x^2 - y^2 - z^2}$$

es el conjunto de puntos (x, y, z) que satisface $x^2 + y^2 + z^2 \neq 4$. En otras palabras, el dominio de f es todo el espacio tridimensional *salvo* los puntos que yacen sobre la superficie de una esfera de radio 2 centrada en el origen. ■

Una elección de palabras desafortunada, pero común, puesto que las *superficies de nivel* suelen no estar a nivel.

Superficies de nivel Para una función de tres variables, $w = f(x, y, z)$, las superficies definidas por $f(x, y, z) = c$, donde c es una constante, se llaman **superficies de nivel** de la función f.

EJEMPLO 9 Algunas superficies de nivel

a) Las superficies de nivel del polinomio $f(x, y, z) = x - 2y + 3z$ son una familia de planos paralelos definidos por $x - 2y + 3z = c$. Vea la FIGURA 13.1.12.

b) Las superficies de nivel del polinomio $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ son una familia de esferas concéntricas definidas por $x^2 + y^2 + z^2 = c$, $c > 0$. Vea la FIGURA 13.1.13.

c) Las superficies de nivel de una función racional $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)/z$ están dadas por $(x^2 + y^2)/z = c$ o $x^2 + y^2 = cz$. Algunos miembros de esta familia de paraboloides se presentan en la FIGURA 13.1.14.

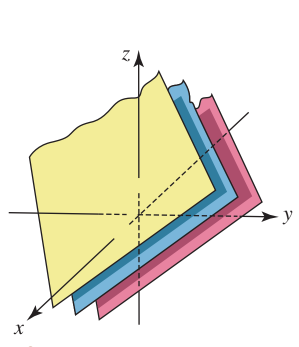


FIGURA 13.1.12 Superficies de nivel en *a*) del ejemplo 9

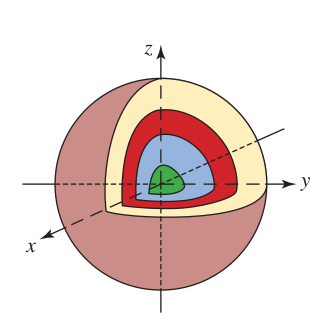


FIGURA 13.1.13 Superficies de nivel en *b*) del ejemplo 9

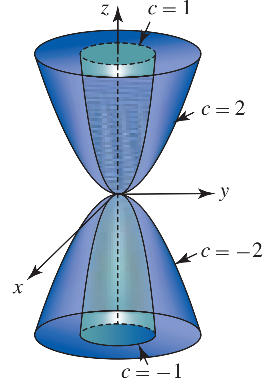


FIGURA 13.1.14 Superficies de nivel en *c*) del ejemplo 9 ■

Ejercicios 13.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-40.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el dominio de la función dada.

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

2. $f(x, y) = (x^2 - 9y^2)^{-2}$

3. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{y + x^2}$

4. $f(x, y) = x^2 - y^2\sqrt{4 + y}$

5. $f(s, t) = s^3 - 2t^2 + 8st$

6. $f(u, v) = \dfrac{u}{\ln(u^2 + v^2)}$

7. $g(r, s) = e^{2r}\sqrt{s^2 - 1}$

8. $g(\theta, \phi) = \dfrac{\tan\theta + \tan\phi}{1 - \tan\theta\tan\phi}$

9. $H(u, v, w) = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 16}$

10. $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{z - 5}$

En los problemas 11-18, relacione el conjunto de puntos dados en la figura con el dominio de una de las funciones en *a*)-*h*).

a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ ***b***) $f(x, y) = \ln(x - y^2)$

c) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y - x}$ ***d***) $f(x, y) = \sqrt{\dfrac{x}{y} - 1}$

e) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ ***f***) $f(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(xy)$

g) $f(x, y) = \dfrac{x^4 + y^4}{xy}$ ***h***) $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}{y - x}$

11.

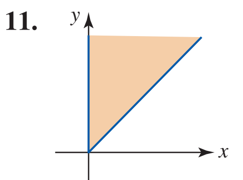


FIGURA 13.1.15 Gráfica del problema 11

12.

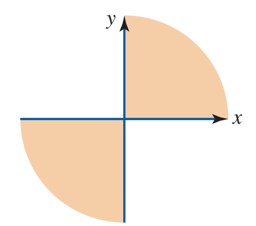


FIGURA 13.1.16 Gráfica del problema 12

13.

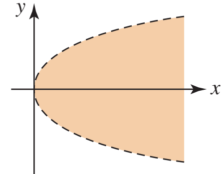


FIGURA 13.1.17 Gráfica del problema 13

14.

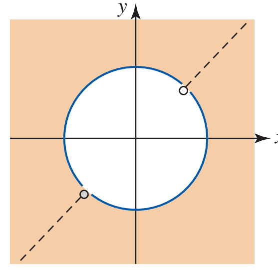


FIGURA 13.1.18 Gráfica del problema 14

15.

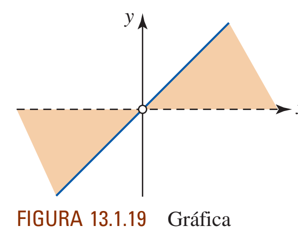


FIGURA 13.1.19 Gráfica del problema 15

16.

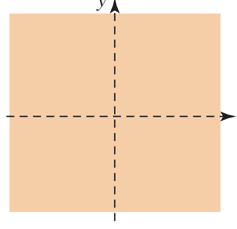


FIGURA 13.1.20 Gráfica del problema 16

17.

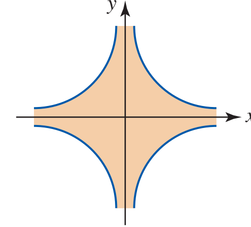


FIGURA 13.1.21 Gráfica del problema 17

18.

FIGURA 13.1.22 Gráfica del problema 18

En los problemas 19-22, dibuje el dominio de la función dada.

19. $f(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

20. $f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(y^2 - 4)}$

21. $f(x, y) = \sqrt{\ln(y - x + 1)}$

22. $f(x, y) = e^{\sqrt{xy+1}}$

En los problemas 23-26, determine el rango de la función dada.

23. $f(x, y) = 10 + x^2 + 2y^2$ **24.** $f(x, y) = x + y$

25. $f(x, y, z) = \operatorname{sen}(x + 2y + 3z)$ **26.** $f(x, y, z) = 7 - e^{xyz}$

En los problemas 27-30, evalúe la función dada en los puntos indicados.

27. $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y (2t - 1)\,dt$; $(2, 4), (-1, 1)$

28. $f(x, y) = \ln\dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$; $(3, 0), (5, -5)$

29. $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z)^2$; $(-1, 1, -1), (2, 3, -2)$

30. $F(x, y, z) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$; $(\sqrt{3}, \sqrt{2}, \sqrt{6}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3})$

En los problemas 31-36, describa la gráfica de la función dada.

31. $z = x$ **32.** $z = y^2$

33. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ **34.** $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

35. $z = \sqrt{36 - x^2 - 3y^2}$ **36.** $z = -\sqrt{16 - x^2 - y^2}$

En los problemas 37-42, dibuje alguna de las curvas de nivel asociadas con la función dada.

37. $f(x, y) = x + 2y$ **38.** $f(x, y) = y^2 - x$

39. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 1}$ **40.** $f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2}$

41. $f(x, y) = e^{y - x^2}$ **42.** $f(x, y) = \tan^{-1}(y - x)$

En los problemas 43-46, describa las superficies de nivel pero no grafique.

43. $f(x, y, z) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{4}z^2$

44. $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2$

45. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2$ **46.** $G(x, y, z) = 4y - 2z + 1$

47. Grafique alguna de las superficies de nivel asociadas con $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ para $c = 0$, $c > 0$ y $c < 0$.

48. Dado que

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9},$$

encuentre las intersecciones x, y y z de las superficies de nivel que pasan por $(-4, 2, -3)$.

≡ Aplicaciones

49. La temperatura, presión y volumen de un gas ideal encerrado están relacionadas por medio de $T = 0.01PV$, donde T, P y V se miden en kelvins, atmósferas y litros, respectivamente. Dibuje las isotermas $T = 300$ K, 400 K y 600 K.

50. Exprese la altura de una caja rectangular con una base cuadrada como una función del volumen y de la longitud de un lado de la caja.

51. Una lata de refresco se construye con un costado lateral de estaño y una tapa y fondo de aluminio. Dado que el costo es de 1.8 centavos por unidad cuadrada de la tapa, 1 centavo por unidad cuadrada del fondo y 2.3 centavos por uni-

dad cuadrada del costado, determine la función de costo $C(r, h)$, donde r es el radio de la lata y h es su altura.

52. Una caja rectangular cerrada va a construirse con 500 cm^2 de cartón. Exprese el volumen V como una función de la longitud x y el ancho y.

53. Como se muestra en la FIGURA 13.1.23, una tapa cónica descansa sobre la parte superior de un cilindro circular. Si la altura de la tapa es dos tercios de la altura del cilindro, exprese el volumen del sólido como una función de las variables indicadas.

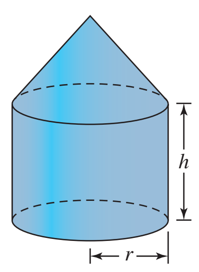


FIGURA 13.1.23 Cilindro con tapa cónica del problema 53

54. A menudo una muestra de tejido es un cilindro que se corta oblicuamente, como se muestra en la FIGURA 13.1.24. Exprese el espesor t del corte como una función de x, y y z.

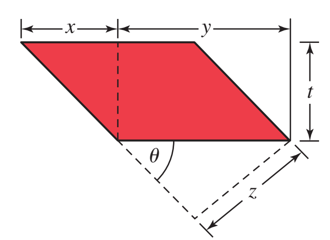


FIGURA 13.1.24 Muestra de tejido del problema 54

55. En medicina a menudo se emplean fórmulas para el área de la superficie (vea el ejemplo 3*b*) para calibrar dosis de fármacos, puesto que se supone que la dosis del fármaco D y el área de la superficie S son directamente proporcionales. La siguiente función simple puede utilizarse para obtener una estimación rápida del área superficial del cuerpo de un humano: $S = 2ht$, donde h es la altura (en cm) y t es la máxima circunferencia de músculo (en cm). Estime el área de la superficie de una persona de 156 cm de altura con una circunferencia de músculo máxima de 50 cm. Estime su propia área superficial.

Proyectos

56. Factor de enfriamiento Durante su investigación del invierno de 1941 en el Antártico, el doctor Paul A. Siple ideó el siguiente modelo matemático para definir el factor de enfriamiento del viento:

$$H(v, T) = \left(10\sqrt{v} - v + 10.5\right)(33 - T),$$

donde H se mide en kcal/m^{2}h, v es la velocidad del viento en m/s y T es la temperatura en grados Celsius. Un ejemplo de este índice es: 1 000 = muy frío, 1 200 = implacablemente frío y 1 400 = congelamiento de la carne expuesta. Determine el factor de enfriamiento en −6.67 °C (20 °F) con una velocidad de viento de 20 m/s (45 mi/h). Escriba un breve informe que defina con precisión el factor de enfriamiento. Encuentre al menos otro modelo matemático para el factor de enfriamiento del viento.

57. Flujo de agua Cuando el agua fluye de un grifo, como se muestra en la FIGURA 13.1.25*a*), se contrae a medida que se acelera hacia abajo. Eso ocurre debido a que la tasa de flujo Q, la cual se define como la velocidad por el área de la sección transversal de la columna de agua, debe ser constante en cada nivel. En este problema suponga que las secciones transversales de la columna de fluido son circulares.

***a*)** Considere la columna de agua que se muestra en la figura 13.1.25*b*). Suponga que v es la velocidad del agua en el nivel superior, V es la velocidad del agua en el nivel inferior a una distancia h unidades por debajo del nivel superior, R es el radio de la sección transversal en el nivel superior y r es el radio de la sección transversal en el nivel inferior. Muestre que la tasa de flujo Q como una función de r y R es

$$Q = \frac{\pi r^2 R^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{R^4 - r^4}},$$

donde g es la aceleración de la gravedad. [*Sugerencia*: Empiece expresando el tiempo t que tarda la sección transversal del agua en caer una distancia h en términos de u y V. Por conveniencia considere la dirección positiva hacia abajo.]

***b*)** Determine la tasa de flujo Q (en cm^3/s) si $g = 980$ cm/s^2, $h = 10$ cm, $R = 1$ cm y $r = 0.2$ cm.

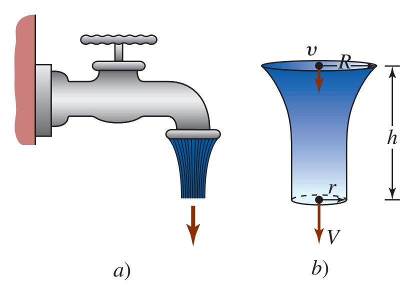


FIGURA 13.1.25 El agua fluye por el grifo del problema 57

13.2 Límites y continuidad

Introducción En el caso de funciones de una variable, en muchos casos es factible hacer un juicio acerca de la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ a partir de la gráfica de $y = f(x)$. También se aprovecha que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y sólo si $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$ existe y son iguales al mismo número L, en cuyo caso $\lim_{x\to a} f(x) = L$. En esta sección veremos que la situación es más difícil en la consideración de límites de funciones de dos variables.

Terminología Antes de proceder con la discusión sobre límites es necesario introducir cierta terminología relativa a conjuntos que se utilizará en este apartado, así como en las secciones y capítulos que siguen. El conjunto en el espacio bidimensional

$$\{(x, y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\} \qquad (1)$$

consiste en todos los puntos *en el interior de*, pero *no en*, un círculo con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$. El conjunto (1) se denomina **disco abierto**. Por otro lado, el conjunto

$$\{(x, y)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta^2\} \qquad (2)$$

es un **disco cerrado**. Un disco cerrado incluye todos los puntos *en el interior de* y *en* un círculo con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$. Vea la FIGURA 13.2.1*a*). Si R es cierta región del plano xy, entonces un punto (a, b) se dice que será un **punto interior** de R si hay *algún* disco abierto centrado en (a, b) que contiene sólo puntos de R. En contraste, afirmamos que (a, b) es un **punto frontera** de R si el interior de *cualquier* disco abierto centrado en (a, b) contiene tanto puntos en R como puntos en no R. La región R se dice que será **abierta** si contiene puntos no frontera y **cerrada** si contiene todos sus puntos frontera. Vea la figura 13.2.1*b*). Se dice que una región R está **acotada** si puede estar contenida en un rectángulo suficientemente grande en el plano. La figura 13.2.1*c*) ilustra una región acotada; el primer cuadrante ilustrado en la figura 13.2.1*d*) es un ejemplo de una región **no acotada**. Estos conceptos se llevan de manera natural al espacio tridimensional. Por ejemplo, el análogo de un disco abierto es una **bola abierta**. Una bola abierta consiste en todos los puntos *en el interior*, pero *no en*, una esfera con centro (x_0, y_0) y radio $\delta > 0$:

$$\{(x, y, z)|(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0) < \delta^2\}. \qquad (3)$$

Una región en el espacio tridimensional está acotada si puede estar contenida en una caja rectangular suficientemente grande.

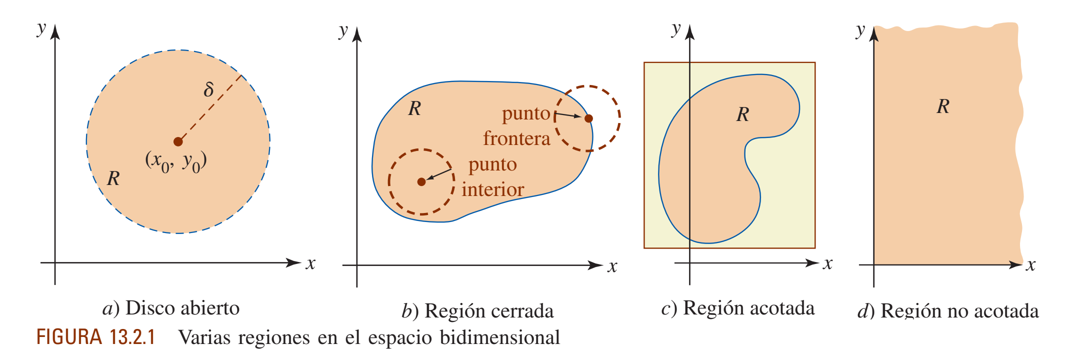


FIGURA 13.2.1 Varias regiones en el espacio bidimensional

Límites de funciones de dos variables Analizar un límite dibujando la gráfica de $z = f(x, y)$ no es conveniente ni es una rutina posible para la mayor parte de las funciones de dos variables. Por intuición sabemos que f tiene un límite en un punto (a, b) si los valores de la función $f(x, y)$ se acercan a un número L conforme (x, y) se acerca a (a, b). Escribimos $f(x, y) \to L$ como $(x, y) \to (a, b)$, o

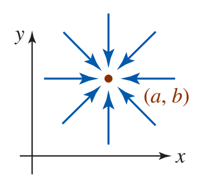
$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y) = L.$$

Para tener un poco más de precisión, f tiene un límite L en el punto (a, b) si los puntos en el espacio $(x, y, f(x, y))$ pueden hacerse arbitrariamente cercanos a (a, b, L) siempre que (x, y) sea suficientemente cercano a (a, b).

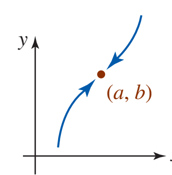
La noción de (x, y) "aproximándose" a un punto (a, b) no es tan simple como para funciones de una variable donde $x \to a$ significa que x puede acercarse a a sólo desde la izquierda y desde la derecha. En el plano xy hay un número infinito de maneras de aproximarse al punto (a, b). Como se muestra en la FIGURA 13.2.2, para que $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ exista, requerimos ahora que f se aproxime al mismo número L a lo largo de *cualquier* **trayectoria** o curva posible que pase por (a, b). Si se pone lo anterior de manera negativa:

- Si $f(x, y)$ no se aproxima al mismo número L por dos trayectorias diferentes a (a, b), entonces $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ no existe. (4)

En la discusión de $\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y)$ que sigue se supondrá que la función f está definida en todo punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b) pero no necesariamente *en* el propio (a, b).



a) A lo largo de las rectas horizontal y vertical que pasan por (*a*, *b*)



b) A lo largo de toda recta que pasa por (*a*, *b*)

c) A lo largo de toda curva que pasa por (*a*, *b*)

FIGURA 13.2.2 Tres de muchas maneras de aproximar el punto (*a*, *b*)

EJEMPLO 1 Un límite que no existe

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^2 - 3y^2}{x^2 + 2y^2}$ no existe.

Solución La función $f(x, y) = (x^2 - 3y^2)/(x^2 + 2y^2)$ se define en todas partes excepto en (0, 0). Como se ilustra en la figura 13.2.2*a*), dos maneras de aproximarse a (0, 0) son a lo largo del eje *x* ($y = 0$) y a lo largo del eje *y* ($x = 0$). En $y = 0$ se tiene

$$\lim_{(x,\,0)\to(0,\,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,\,0)\to(0,\,0)} \frac{x^2 - 0}{x^2 + 0} = 1$$

donde $x = 0$,

$$\lim_{(0,\,y)\to(0,\,0)} f(0, y) = \lim_{(0,\,y)\to(0,\,0)} \frac{0 - 3y^2}{0 + 2y^2} = -\frac{3}{2}.$$

En vista de (4), concluimos que el límite no existe. ■

EJEMPLO 2 Un límite que no existe

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ no existe.

Solución En este caso los límites a lo largo de los ejes *x* y *y* son los mismos:

$$\lim_{(x,\,0)\to(0,\,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,\,0)\to(0,\,0)} \frac{0}{x^2} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{(0,\,y)\to(0,\,0)} f(0, y) = \lim_{(0,\,y)\to(0,\,0)} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Sin embargo, esto *no* significa que $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y)$ exista, ya que no se ha examinado *toda* trayectoria a (0, 0). Como se ilustra en la figura 13.2.2*b*), ahora intentaremos cualquier recta que pase por el origen dada por $y = mx$:

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y) = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}.$$

Puesto que $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y)$ depende de la pendiente *m* de la recta sobre la cual se hace la aproximación al origen, concluimos que el límite no existe. Por ejemplo, en $y = x$ y en $y = 2x$, tenemos, respectivamente,

$$f(x, x) = \frac{x^2}{x^2 + x^2} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, x) = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2},$$

$$f(x, 2x) = \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} \quad \text{y} \quad \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, 2x) = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{2x^2}{x^2 + 4x^2} = \frac{2}{5}.$$

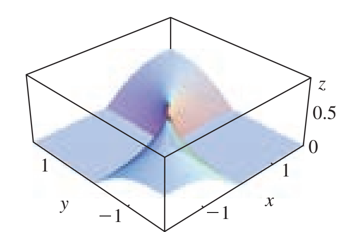


FIGURA 13.2.3 Gráfica de la función del ejemplo 2

Una gráfica generada por computadora de la superficie se presenta en la FIGURA 13.2.3. Si tiene en mente que el origen está en el centro de la caja, debe tener claro por qué diferentes trayectorias a (0, 0) producen diferentes valores del límite. ■

EJEMPLO 3 Un límite que no existe

Demuestre que $\displaystyle\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^3y}{x^6 + y^2}$ no existe.

Solución Sea $f(x, y) = x^3y/(x^6 + y^2)$. Se le pide al lector demostrar que a lo largo del eje *x*, el eje *y*, cualquier recta $y = mx$, $m \neq 0$ que pasa por (0, 0), y a lo largo de cualquier parábola

$y = ax^2$, $a \neq 0$, que pasa por (0, 0), $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Si bien esto constituye verdaderamente un número infinito de trayectorias al origen, el límite *sigue* sin existir, ya que $y = x^3$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, x^3) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}. \quad ■$$

Propiedades de límites En los siguientes dos teoremas se mencionan las propiedades de límites para funciones de dos variables. Estos teoremas son las contrapartes en dos variables de los teoremas 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3.

Teorema 13.2.1 Tres límites fundamentales

i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} c = c$, c una constante

ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} x = a$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$

iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y) = c \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

Teorema 13.2.2 Límite de una suma, producto, cociente

Suponga que (a, b) es un punto en el plano xy y que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)$ existe. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_1$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = L_2$, entonces

i) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L_1 \pm L_2$,

ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y) = L_1L_2$, y

iii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, $L_2 \neq 0$.

EJEMPLO 4 Límite de una suma

Evalúe $\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x + y^2)$.

Solución De *ii*) del teorema 13.2.1 advertimos primero que

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} x = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(x,y)\to(2,3)} y = 3.$$

Entonces de las partes *i*) y *ii*) del teorema 13.2.2 sabemos que el límite de una suma es la suma de los límites y el límite de un producto es el producto de los límites siempre que exista el límite:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,3)} (x + y^2) &= \lim_{(x,y)\to(2,3)} x + \lim_{(x,y)\to(2,3)} y^2 \\ &= \lim_{(x,y)\to(2,3)} x + \left(\lim_{(x,y)\to(2,3)} y\right)\left(\lim_{(x,y)\to(2,3)} y\right) \\ &= 2 + 3 \cdot 3 = 11. \quad ■\end{aligned}$$

Uso de coordenadas polares En algunos casos las coordenadas polares pueden ser de utilidad en la evaluación de un límite de la forma $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Si $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ y $r^2 = x^2 + y^2$, entonces $(x, y) \to (0, 0)$ si y sólo si $r \to 0$.

EJEMPLO 5 Uso de coordenadas polares

Evalúe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{10xy^2}{x^2 + y^2}$.

Solución Al sustituir $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$ en la función, obtenemos

$$\frac{10xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{10r^3 \cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{r^2} = 10r\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta.$$

Puesto que $\lim_{r \to 0} r \cos\theta \,\text{sen}^2\theta = 0$, concluimos que

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{10xy^2}{x^2+y^2} = 0. \quad \blacksquare$$

En el ejemplo 8 examinaremos de nuevo el límite del ejemplo 5.

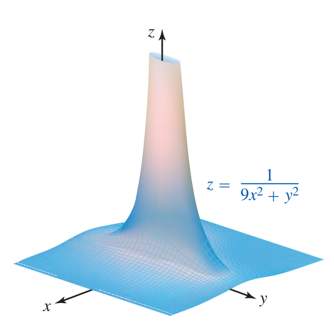


FIGURA 13.2.4 Función con una discontinuidad infinita en (0, 0)

Continuidad Una función $z = f(x, y)$ es **continua** en (a, b) si $f(a, b)$ está definida, $\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y)$ existe y el límite es el mismo que el valor de la función $f(a, b)$; esto es,

$$\lim_{(x,\,y)\to(a,\,b)} f(x, y) = f(a, b). \tag{5}$$

Si f no es continua en (a, b), se afirma que es **discontinua**. La gráfica de una función continua es una superficie sin quiebres. De la gráfica de la función $f(x, y) = 1/(9x^2 + y^2)$ en la FIGURA 13.2.4 vemos que f tiene una discontinuidad infinita en (0, 0), esto es, $f(x, y) \to \infty$ como $(x, y) \to (0, 0)$. Una función $z = f(x, y)$ es **continua sobre un región *R*** del plano xy si f es continua en cualquier punto en R. La **suma** y el **producto** de dos funciones continuas también son continuas. El **cociente** de dos funciones continuas es continuo, excepto en el punto donde el denominador es cero. Además, si g es una función de dos variables continuas en (a, b) y F es una función de una variable continua en $g(a, b)$, entonces la **composición** $f(x, y) = F(g(x, y))$ es continua en (a, b).

EJEMPLO 6 Función discontinua en (0, 0)

La función $f(x, y) = \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$ es discontinua en (0, 0), ya que $f(0, 0)$ no está definida. Sin embargo, como puede observarse en el siguiente ejemplo, f tiene una discontinuidad removible en (0, 0). ■

EJEMPLO 7 Función continua en (0, 0)

La función f definida por

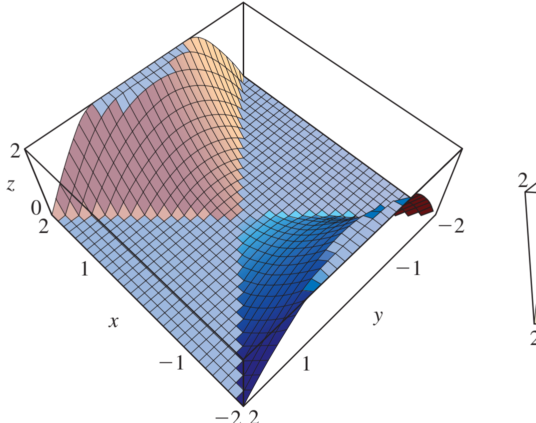
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0), ya que $f(0, 0) = 0$ y

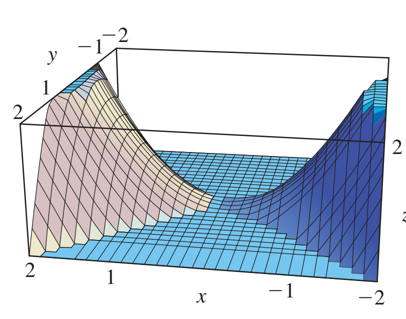
$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} (x^2 - y^2) = 0^2 - 0^2 = 0.$$

Por consiguiente, advertimos que $\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} f(x, y) = f(0, 0)$.

Con la ayuda de un SAC vemos en la FIGURA 13.2.5 dos perspectivas diferentes (ViewPoint en *Mathematica*) de la superficie definida por $z = f(x, y)$. Note en los incisos *a*) y *b*) de la figura 13.2.5 la orientación del eje x y del eje y.



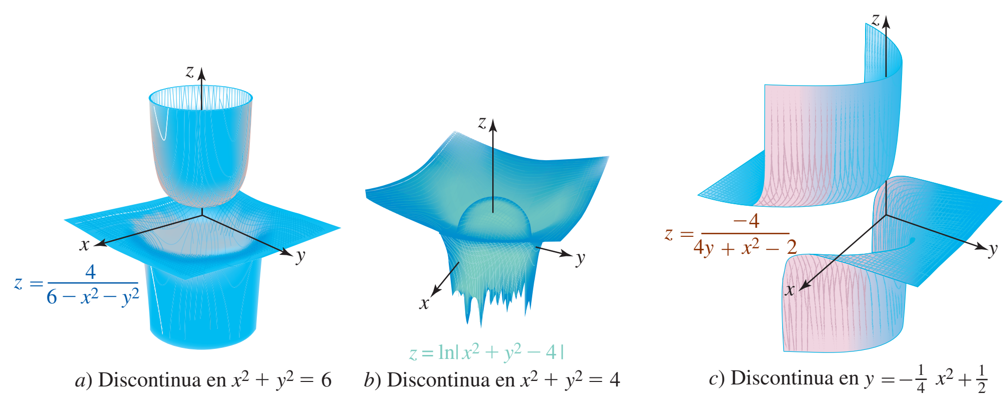
a) Viendo hacia abajo sobre la superficie



b) Viendo ligeramente hacia abajo y hacia el eje x

FIGURA 13.2.5 Gráfica de la función del ejemplo 7 ■

Funciones polinomiales y racionales En la sección 13.1 vimos que una **función polinomial** de dos variables consiste en la suma de potencias $x^m y^n$, donde m y n son enteros no negativos, y que el cociente de dos funciones polinomiales recibe el nombre de **función racional**. Las funciones polinomiales, como $f(x, y) = xy$, son continuas por todo el plano xy. Las funciones racionales son continuas salvo en puntos donde el denominador es cero. Por ejemplo, la función racional $f(x, y) = xy/(y - x)$ es continua salvo en puntos sobre la recta $y = x$. En la FIGURA 13.2.6 se han ilustrado las gráficas de tres funciones que son discontinuas en puntos sobre una curva. En los incisos *a*) y *c*) de la figura 13.2.6, la función racional es discontinua en todos los puntos sobre la curva obtenida igualando a 0 el denominador. En la figura 13.2.6*b*) la función logarítmica es discontinua donde $x^2 + y^2 - 4 = 0$, esto es, sobre el círculo $x^2 + y^2 = 4$.



a) Discontinua en $x^2 + y^2 = 6$ *b*) Discontinua en $x^2 + y^2 = 4$ *c*) Discontinua en $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$

FIGURA 13.2.6 Tres funciones discontinuas

Funciones de tres o más variables Las nociones de límite y continuidad para funciones de tres o más variables son extensiones naturales de las que acaban de considerarse. Por ejemplo, una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ es continua en (a, b, c) si

$$\lim_{(x, y, z) \to (a, b, c)} f(x, y, z) = f(a, b, c).$$

La función polinomial en tres variables $f(x, y, z) = xy^2z^3$ es continua a través del espacio tridimensional. La función racional

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}$$

es continua salvo en el punto (0, 0, 1). La función racional

$$f(x, y, z) = \frac{x + 3y}{2x + 5y + z}$$

es continua excepto en los puntos (x, y, z) sobre el plano $2x + 5y + z = 0$.

Definición formal de un límite La discusión anterior conduce a la definición formal del límite de una función $z = f(x, y)$ en un punto (a, b). Esta **definición ε-δ** es análoga a la definición 2.6.1.

Definición 13.2.1 Definición de un límite

Suponga que una función f de dos variables se define en cualquier punto (x, y) en un disco abierto centrado en (a, b), salvo posiblemente en (a, b). Entonces

$$\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y) = L$$

significa que para toda $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} < \delta.$$

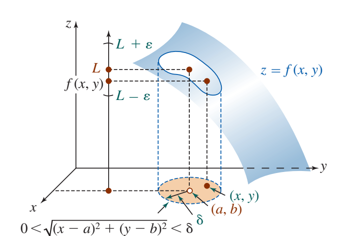


FIGURA 13.2.7 Cuando $(x, y) \neq (a, b)$ es un disco abierto, $f(x, y)$ está en el intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

Como se ilustra en la FIGURA 13.2.7, cuando f tiene un límite en (a, b), para un $\varepsilon > 0$, sin que importe cuán pequeño, es posible encontrar un disco abierto de radio δ centrado en (a, b) de modo que $L - \varepsilon < f(x, y) < L + \varepsilon$ para todo punto $(x, y) \neq (a, b)$ dentro del disco. El disco abierto con radio $\delta > 0$ y su centro (a, b) eliminado se definen mediante la desigualdad

$$0 < \sqrt{(x - a)^2 + (y - a)^2} < \delta.$$

Como se mencionó antes, los valores de f son cercanos a L siempre que (x, y) sea cercano a (a, b). El concepto de "suficientemente cercano" se define mediante el número δ.

EJEMPLO 8 Repaso del ejemplo 5

Demuestre que $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{10xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$

Solución De la definición 13.2.1, si $\varepsilon > 0$ está dado, se desea determinar un número $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{10xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

La última línea es lo mismo que

$$\frac{10|x|y^2}{x^2 + y^2} < \varepsilon \qquad \text{siempre que} \qquad 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta.$$

Como $x^2 \geq 0$, puede escribirse $y^2 \leq x^2 + y^2$ y

$$\frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1.$$

Así,

$$\frac{10|x|y^2}{x^2 + y^2} = 10|x| \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 10|x| = 10\sqrt{x^2} \leq 10\sqrt{x^2 + y^2}.$$

De modo que si se elige $\delta = \varepsilon/10$, tenemos

$$\left| \frac{10xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq 10\sqrt{x^2 + y^2} \leq 10 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \varepsilon.$$

Por la definición 13.2.1, esto demuestra

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0. \qquad ■$$

Ejercicios 13.2 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-30, evalúe el límite dado, si existe.

1. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(5, -1)} (x^2 + y^2)$
2. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(2, 1)} \frac{x^2 - y}{x - y}$
3. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{5x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$
4. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(1, 2)} \frac{4x^2 + y^2}{16x^4 + y^4}$
5. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{4 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
6. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{2x^2 - y}{x^2 + 2y^2}$
7. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$
8. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{6xy^2}{x^2 + y^4}$
9. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(1, 2)} x^3y^2(x + y)^3$
10. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(2, 3)} \frac{xy}{x^2 - y^2}$
11. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{e^{xy}}{x + y + 1}$
12. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{x^2 + y^2}$
13. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(2, 2)} \frac{xy}{x^3 + y^2}$
14. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(\pi, \pi/4)} \cos(3x + y)$
15. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2 - 3y + 1}{x + 5y - 3}$
16. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 0)} \frac{x^2y^2}{x^4 + 5y^4}$
17. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(4, 3)} xy^2\left(\frac{x + 2y}{x - y}\right)$
18. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(1, 0)} \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$
19. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(1, 1)} \frac{xy - x - y + 1}{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$
20. $\displaystyle \lim_{(x, y)\to(0, 3)} \frac{xy - 3y}{x^2 + y^2 - 6y + 9}$

21. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + xy^3 - 3x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$

22. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,2)} \frac{y^3 + 2x^3}{x + 5xy^2}$

23. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \ln(2x^2 - y^2)$ **24.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/y)}{\cos^{-1}(x - y)}$

25. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 + y^2}$ **26.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(3x^2 + 3y^2)}{x^2 + y^2}$

27. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ **28.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

29. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ **30.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

En los problemas 31-34, determine dónde es continua la función indicada.

31. $f(x, y) = \sqrt{x}\cos\sqrt{x + y}$ **32.** $f(x, y) = y^2e^{1/xy}$

33. $f(x, y) = \tan\dfrac{x}{y}$

34. $f(x, y) = \ln(4x^2 + 9y^2 + 36)$

En los problemas 35 y 36, determine si la función indicada es continua en los conjuntos dados en el plano xy.

35. $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2 \end{cases}$

***a*)** $x^2 + y^2 < 1$ ***b*)** $x \geq 0$ ***c*)** $y > x$

36. $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$

***a*)** $y \geq 3$ ***b*)** $|x| + |y| < 1$ ***c*)** $(x - 2)^2 + y^2 < 1$

37. Determine si la función f definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{6x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0).

38. Muestre que

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en cada variable por separado en (0, 0), esto es, que $f(x, 0)$ y $f(0, y)$ son continuas en $x = 0$ y $y = 0$, respectivamente. Demuestre, sin embargo, que f es no continua en (0, 0).

≡ Piense en ello

En los problemas 39 y 40, emplee la definición 13.2.1 para demostrar el resultado indicado; esto es, encuentre δ para un $\varepsilon > 0$ arbitrario.

39. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{2x^2 + 2y^2} = 0$ **40.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} = 0$

41. Determine si existen puntos en los cuales la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x - y}, & y \neq x \\ 3x^2, & y = x \end{cases}$$

es discontinua.

42. Utilice la definición 13.2.1 para demostrar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$.

13.3 Derivadas parciales

Introducción La derivada de una función de **una variable** $y = f(x)$ está dada por el límite de un cociente de diferencia

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Exactamente de la misma manera, podemos definir la derivada de primer orden de una función de **dos variables** $z = f(x, y)$ con respecto a *cada* variable.

Definición 13.3.1 Derivadas parciales de primer orden

Si $z = f(x, y)$ es una función de dos variables, entonces la **derivada parcial con respecto a *x*** en un punto (x, y) es

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \tag{1}$$

y la **derivada parcial con respecto a *y*** es

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \tag{2}$$

siempre que exista el límite.

Cálculo de una derivada parcial En (1) observe que la variable y no cambia en el proceso del límite, en otras palabras, y se mantiene fija. De manera similar, en la definición del límite (2) la variable x se mantiene fija. Las dos derivadas parciales de primer orden (1) y (2) representan entonces las *tasas de cambio* de f con respecto a x y y. En un nivel práctico tenemos las siguientes guías simples.

Guías para la diferenciación parcial

Por *reglas de la diferenciación ordinaria* se entienden las reglas formuladas en el capítulo 3: reglas del múltiplo constante, suma, producto, cociente, potencia y de la cadena.

- Para calcular $\partial z/\partial x$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a y como una constante.
- Para calcular $\partial z/\partial y$, emplee las leyes de la diferenciación ordinaria mientras trata a x como una constante.

EJEMPLO 1 Derivadas parciales

Si $z = 4x^3y^2 - 4x^2 + y^6 + 1$, encuentre

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y ***b***) $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Solución

a) Diferenciamos z con respecto a x mientras y se mantiene fija y se tratan a las constantes de la manera usual:

y es constante

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (12x^2)y^2 - 8x + 0 + 0 = 12x^2y^2 - 8x.$$

b) Ahora tratando a x como constante, obtenemos

x es constante

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3(2y) - 0 + 6y^5 + 0 = 8x^3y + 6y^5.$$ ■

Símbolos alternos Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ a menudo se representan por medio de símbolos alternos. Si $z = f(x, y)$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y.$$

Símbolos como $\partial/\partial x$ y $\partial/\partial y$ se denominan **operadores de diferenciación parcial** y denotan la *operación* de tomar una derivada parcial, en este caso con respecto a x y y. Por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y^2) = \frac{\partial}{\partial x}x^2 - \frac{\partial}{\partial x}y^2 = 2x - 0 = 2x$$

y
$$\frac{\partial}{\partial y}e^{x^4y^5} = e^{x^4y^5} \cdot \frac{\partial}{\partial y}x^4y^5 = e^{x^4y^5}x^4 \cdot \frac{\partial}{\partial y}y^5 = e^{x^4y^5}x^4(5y^4) = 5x^4y^4e^{x^4y^5}.$$

El **valor** de una derivada parcial en un punto (x_0, y_0) se escribe de diversas maneras. Por ejemplo, la derivada parcial de $z = f(x, y)$ con respecto a x para (x_0, y_0) se escribe como

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,\, y_0)}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x = x_0,\, y = y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \text{o} \quad f_x(x_0, y_0).$$

EJEMPLO 2 Empleo de la regla del producto

Si $f(x, y) = x^5y^{10}\cos(xy^2)$, encuentre f_y.

Solución Cuando x se mantiene fija, observe que

$$f(x, y) = x^5\overbrace{y^{10}\cos(xy^2)}^{\text{producto de dos funciones de } y}.$$

Por consiguiente, por las reglas del producto y de la cadena la derivada parcial de f con respecto a y es,

$$\begin{aligned} f_y(x, y) &= x^5[y^{10}(-\operatorname{sen}(xy^2)) \cdot 2xy + 10y^9 \cdot \cos(xy^2)] \\ &= -2x^6y^{11}\operatorname{sen}(xy^2) + 10x^5y^9\cos(xy^2). \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Una tasa de cambio

La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ relaciona el área superficial (en pies cuadrados) del cuerpo de una persona como una función del peso w (en libras) y la altura h (en pulgadas). Encuentre $\partial S/\partial w$ cuando $w = 150$ y $h = 72$. Interprete.

Solución La derivada parcial de S respecto a w,

$$\frac{\partial S}{\partial w} = (0.1091)(0.425)w^{-0.575}h^{0.725},$$

evaluada en (150, 72) es

$$\left.\frac{\partial S}{\partial w}\right|_{(150,\,72)} = (0.1091)(0.425)(150)^{-0.575}(72)^{0.725} \approx 0.058.$$

La derivada parcial $\partial S/\partial w$ es la tasa a la cual el área superficial de una persona de altura *fija* h, como un adulto, cambia con respecto al peso w. Puesto que las unidades para la derivada son pies^2/libra y $\partial S/\partial w > 0$, advertimos que el aumento de 1 lb, mientras que h está fija en 72, produce un *aumento* en el área de la piel de aproximadamente $0.058 \approx \frac{1}{17}$ pie^2. ■

Interpretación geométrica Como advertimos en la FIGURA 13.3.1*a*), cuando y es constante, digamos $y = b$, la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano $y = b$ es la curva azul C. Si definimos la pendiente de una secante a través de los puntos $P(a, b, f(a, b))$ y $R(a + h, b, f(a + h, b))$ como

$$\frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{(a + h) - a} = \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

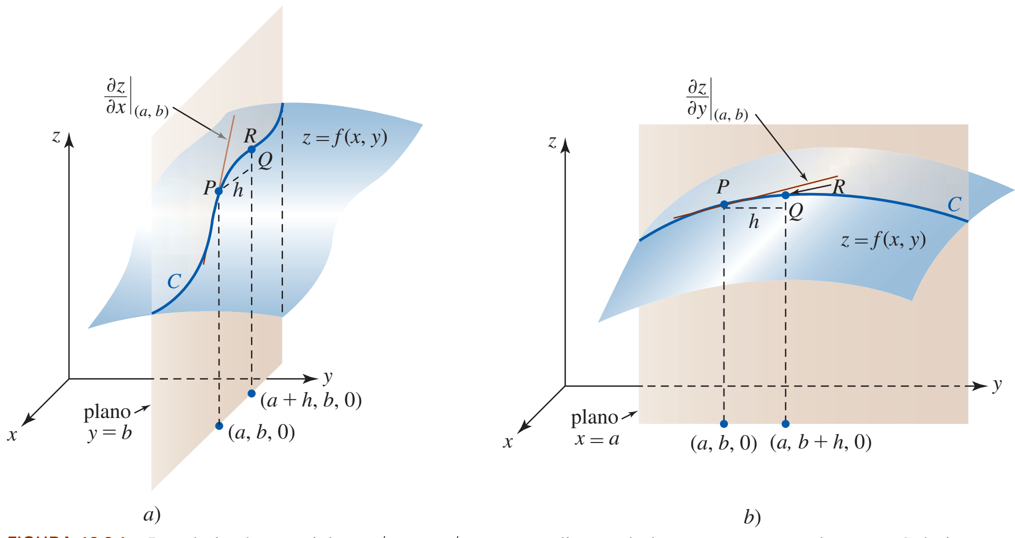


FIGURA 13.3.1 Las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son pendientes de la recta tangente a la curva C de intersección de la superficie y el plano paralelo a los ejes x o y.

tenemos $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(a,\, b)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

En otras palabras, es posible interpretar $\partial z/\partial x$ como la pendiente de la recta tangente en el punto P (para la cual el límite existe) sobre la curva C de intersección de la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $y = b$. A su vez, una inspección de la figura 13.3.1*b*) revela que $\partial z/\partial y$ es la pendiente de la recta tangente en el punto P sobre la curva C de intersección entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano $x = a$.

EJEMPLO 4 Pendientes de rectas tangentes

Para $z = 9 - x^2 - y^2$, encuentre la pendiente de la recta tangente en (2, 1, 4) en

a) el plano $x = 2$ y ***b***) el plano $y = 1$.

Solución

a) Al especificar el plano $x = 2$, se mantienen todos los valores de x constantes. Por consiguiente, calculamos la derivada parcial de z con respecto a y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y.$$

En (2, 1, 4) la pendiente es $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\, 1)} = -2.$$

b) En el plano $y = 1$, y es constante y por ello encontramos la derivada parcial de z con respecto a x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2x.$$

En (2, 1, 4) la pendiente es $$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,\, 1)} = -4.$$

Vea la FIGURA 13.3.2. ■

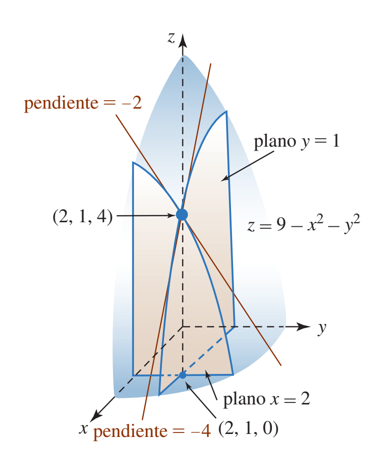


FIGURA 13.3.2 Pendientes de las rectas tangentes del ejemplo 4

Si $z = f(x, y)$, entonces los valores de las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en un punto $(a, b, f(a, b))$ también se denominan **pendientes de la superficie** en las direcciones x y y, respectivamente.

Funciones de tres o más variables Las tasas de cambio de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ en las direcciones x, y y z son las derivadas parciales $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ y $\partial w/\partial z$, respectivamente. La derivada parcial de f respecto a z se define como

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y, z + h) - f(x, y, z)}{h}, \tag{3}$$

siempre que el límite exista. Para calcular, por ejemplo, $\partial w/\partial x$, se deriva con respecto a x de la manera usual mientras se mantienen constantes *tanto y como z*. De esta manera se extiende el proceso de diferenciación parcial a funciones de cualquier número de variables. Si $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es una función de n variables, entonces la derivada parcial de f con respecto a la variable i-ésima, $i = 1, 2, \ldots, n$, se define como

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_i + h, \ldots x_n) - f(x_1, x_2, \ldots x_n)}{h}. \tag{4}$$

Para calcular $\partial u/\partial x_i$ se deriva con respecto a x_i mientras se mantienen fijas las $n - 1$ variables restantes.

EJEMPLO 5 Empleo de la regla del cociente

Si $w = \dfrac{x^2 - z^2}{y^2 + z^2}$, encuentre $\dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Solución Se emplea la regla del cociente mientras se mantiene constante x y y:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{(y^2 + z^2)(-2z) - (x^2 - z^2)2z}{(y^2 + z^2)^2} = -\frac{2z(x^2 + y^2)}{(y^2 + z^2)^2}. \qquad ■$$

EJEMPLO 6 Tres derivadas parciales

Si $f(x, y, t) = e^{-3\pi t}\cos 4x \operatorname{sen} 6y$, entonces las derivadas parciales con respecto a x, y y t son, a su vez,

$$f_x(x, y, t) = -4e^{-3\pi t}\operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 6y,$$
$$f_y(x, y, t) = 6e^{-3\pi t}\cos 4x \cos 6y,$$

y

$$f_t(x, y, t) = -3\pi e^{-3\pi t}\cos 4x \operatorname{sen} 6y. \qquad ■$$

Derivadas de orden superior y mixtas Para una función de dos variables $z = f(x, y)$, las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son ellas mismas funciones de x y y. En consecuencia, se pueden calcular las **derivadas parciales de segundo orden** y de orden superior. De hecho, se encuentra la derivada parcial de $\partial z/\partial x$ con respecto a y, y la derivada parcial de $\partial z/\partial y$ con respecto a x. Los últimos tipos de derivadas parciales se denominan **derivadas parciales mixtas**. En resumen, las segundas, terceras derivadas parciales y la derivada parcial mixta de $z = f(x, y)$ están definidas por:

Derivadas parciales de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Derivadas parciales de tercer orden:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

Derivadas parciales de segundo orden mixtas:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

diferenciar ↑ primero con respecto a y — diferenciar ↑ primero con respecto a x

Observe en el resumen que hay cuatro derivadas parciales de segundo orden. ¿Cuántas derivadas parciales de tercer orden de $z = f(x, y)$ hay? Las derivadas parciales de orden superior para $z = f(x, y)$ y para funciones de tres o más variables se definen de manera similar.

Símbolos alternos Las derivadas parciales de segundo y tercer orden también se denotan mediante f_{xx}, f_{yy}, f_{xxx}, etcétera. La notación de subíndice para las derivadas parciales de segundo orden mixtas es f_{xy} o f_{yx}.

Nota El orden de los símbolos en los subíndices de las parciales mixtas es justamente lo opuesto al orden de los símbolos cuando se usa la notación de operador de diferenciación parcial:

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

y

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

Igualdad de parciales mixtas Aunque no se demostrará, el siguiente teorema enuncia que bajo ciertas condiciones es irrelevante el orden en el cual se efectúa una derivada parcial de segundo orden mixta; esto es, las derivadas parciales mixtas f_{xy} y f_{yx} son iguales.

Teorema 13.3.2 Igualdad de parciales mixtas

Sea f una función de dos variables. Si las derivadas parciales f_x, f_y, f_{xy} y f_{yx} son continuas en algún disco abierto, entonces

$$f_{xy} = f_{yx}$$

en cada punto sobre el disco.

Vea el problema 68 en los ejercicios 13.3.

EJEMPLO 7 Derivadas parciales de segundo orden

Si $z = x^2y^2 - y^3 + 3x^4 + 5$, encuentre

$$a)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} \qquad b)\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} \qquad \text{y} \qquad c)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}.$$

Solución De las primeras derivadas parciales

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 12x^3 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y - 3y^2$$

obtenemos:

$$a)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2y^2 + 36x^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 72x,$$

$$b)\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2x^2 - 6y \quad \text{y} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -6,$$

$$c)\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 4xy.$$

Debemos verificar que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = 4xy.$ ■

Si f es una función de dos variables y tiene derivadas parciales de primer, segundo y tercer orden continuas sobre algún disco abierto, entonces las derivadas mixtas de tercer orden son iguales; esto es,

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx} \qquad \text{y} \qquad f_{yxx} = f_{xyx} = f_{xxy}.$$

Se sostienen comentarios similares para funciones de tres o más variables. Por ejemplo, si f es una función de tres variables x, y y z que posee derivadas parciales continuas de cualquier orden en alguna bola abierta, entonces las derivadas parciales como $f_{xyz} = f_{zyx} = f_{yxz}$ son iguales en cada punto en la bola.

EJEMPLO 8 Derivadas parciales mixtas de tercer orden

Si $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^4 + z^6}$, determine f_{yzz}.

Solución f_{yzz} es una derivada parcial mixta de tercer orden. Primero se encuentra la derivada parcial con respecto a y mediante la regla de potencias para funciones:

$$f_y = \frac{1}{2}(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2}4y^3 = 2y^3(x^2 + y^4 + z^6)^{-1/2}.$$

La derivada parcial con respecto a z de la función en la última línea es entonces

$$\begin{aligned} f_{yz} = (f_y)_z &= 2y^3\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2} \cdot 6z^5 \\ &= -6y^3z^5(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Por último, por la regla del producto,

$$f_{yzz} = (f_{yz})_z = -6y^3z^5\left(-\frac{3}{2}\right)(x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2} \cdot 6z^5 - 30y^3z^4(x^2 + y^4 + z^6)^{-3/2}$$
$$= y^3z^4(x^2 + y^4 + z^6)^{-5/2}(24z^6 - 30x^2 - 30y^4).$$

Se sugiere que el lector calcule f_{zzy} y f_{zyz} y verifique sobre cualquier disco abierto que no contenga al origen que $f_{yzz} = f_{zzy} = f_{zyz}$. ■

Diferenciación parcial implícita La diferenciación parcial implícita se llevó a cabo de la misma manera que en la sección 3.6.

EJEMPLO 9 Derivada parcial implícita

Suponga que la ecuación $z^2 = x^2 + xy^2z$ define a z implícitamente como una función de x y y. Encuentre $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

Solución Al mantener y constante,

$$\frac{\partial}{\partial x}z^2 = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + xy^2z) \qquad \text{implica} \qquad \frac{\partial}{\partial x}z^2 = \frac{\partial}{\partial x}x^2 + y^2\frac{\partial}{\partial x}xz.$$

Por la regla de potencia para funciones junto con la regla del producto:

$$2z\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + z\right).$$

Después de que resolvamos la última ecuación para $\partial z/\partial x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y^2z}{2z - xy^2}.$$

Al mantener ahora x constante,

$$\frac{\partial}{\partial y}z^2 = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + xy^2z) \qquad \text{implica} \qquad 2z\frac{\partial z}{\partial y} = x\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz\right).$$

Al resolver para $\partial z/\partial y$ se obtiene

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xyz}{2z - xy^2}.$$ ■

Ejercicios 13.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

Fundamentos

En los problemas 1-4, emplee la definición 13.3.1 para calcular $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ con respecto a la función dada.

1. $z = 7x + 8y^2$

2. $z = xy$

3. $z = 3x^2y + 4xy^2$

4. $z = \dfrac{x}{x + y}$

En los problemas 5-24, encuentre las primeras derivadas parciales de la función dada.

5. $z = x^2 - xy^2 + 4y^5$

6. $z = -x^3 + 6x^2y^3 + 5y^2$

7. $z = 5x^4y^3 - x^2y^6 + 6x^5 - 4y$

8. $z = \tan(x^3y^2)$

9. $z = \dfrac{4\sqrt{x}}{3y^2 + 1}$

10. $z = 4x^3 - 5x^2 + 8x$

11. $z = (x^3 - y^2)^{-1}$

12. $z = (-x^4 + 7y^2 + 3y)^6$

13. $z = \cos^2 5x + \operatorname{sen}^2 5y$

14. $z = e^{x^2\tan^{-1}y^2}$

15. $f(x, y) = xe^{x^3y}$

16. $f(\theta, \phi) = \phi^2 \operatorname{sen}\dfrac{\theta}{\phi}$

17. $f(x, y) = \dfrac{3x - y}{x + 2y}$

18. $f(x, y) = \dfrac{xy}{(x^2 - y^2)^2}$

19. $g(u, v) = \ln(4u^2 + 5v^3)$

20. $h(r, s) = \dfrac{\sqrt{r}}{s} - \dfrac{\sqrt{s}}{r}$

21. $w = 2\sqrt{x}y - ye^{y/z}$

22. $w = xy \ln xz$

23. $f(u, v, x, t) = u^2w^2 - uv^3 + vw\cos(ut^2) + (2x^2t)^4$

24. $G(p, q, r, s) = (p^2q^3)e^{2r^4s^5}$

En los problemas 25-26, suponga que $z = 4x^3y^4$.

25. Determine la pendiente de la recta tangente en $(1, -1, 4)$ en el plano $x = 1$.

26. Encuentre la pendiente de la recta tangente en $(1, -1, 4)$ en el plano $y = -1$.

En los problemas 27 y 28, suponga que $f(x, y) = \dfrac{18xy}{x + y}$.

27. Determine las ecuaciones paramétricas para la recta tangente en $(-1, 4, -24)$ en el plano $x = -1$.

28. Encuentre ecuaciones simétricas para la recta tangente en $(-1, 4, -24)$ en el plano $y = 4$.

En los problemas 29 y 30, suponga que $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

29. ¿A qué tasa está cambiando z con respecto a x en el plano $y = 2$ en el punto $(2, 2, 1)$?

30. ¿A qué tasa está cambiando z con respecto a y en el plano $x = \sqrt{2}$ en el punto $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, 2)$?

En los problemas 31-38, encuentre la derivada parcial indicada.

31. $z = e^{xy}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ **32.** $z = x^4 y^{-2}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y^3}$

33. $f(x, y) = 5x^2y^2 - 2xy^3$; f_{xy} **34.** $f(p, q) = \ln\dfrac{p + q}{q^2}$; f_{qp}

35. $w = u^2 v^3 t^3$; w_{tuv} **36.** $w = \dfrac{\cos(u^2 v)}{t^3}$; w_{vvt}

37. $F(r, \theta) = e^{r^2}\cos\theta$; $F_{r\theta r}$ **38.** $H(s, t) = \dfrac{s + t}{s - t}$; H_{tts}

En los problemas 39 y 40, verifique que $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

39. $z = x^6 - 5x^4y^3 + 4xy^2$ **40.** $z = \tan^{-1}(2xy)$

En los problemas 41 y 42, verifique que las derivadas parciales indicadas son iguales.

41. $w = u^3v^4 - 4u^2v^2t^3 + v^2t$; $w_{uvt}, w_{tvu}, w_{vut}$

42. $F(\eta, \xi, \tau) = (\eta^3 + \xi^2 + \tau)^2$; $F_{\eta\xi\eta}, F_{\xi\eta\eta}, F_{\eta\eta\xi}$

En los problemas 43-46, suponga que la ecuación dada define a z como una función de las dos variables restantes. Emplee diferenciación implícita para encontrar las primeras derivadas parciales.

43. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ **44.** $z^2 = x^2 + y^2 z$

45. $z^2 + u^2v^3 - uvz = 0$ **46.** $se^z - e^{st} + 4s^3t = z$

47. El área A de un paralelogramo con base x y altura y sen θ es $A = xy$ sen θ. Encuentre todas las primeras derivadas parciales.

48. El volumen del cono truncado que se muestra en la FIGURA 13.3.3 es $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + rR + R^2)$. Determine todas las primeras derivadas parciales.

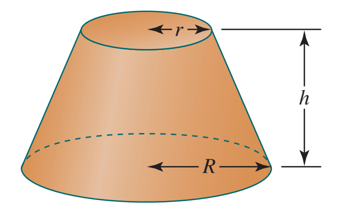


FIGURA 13.3.3 Cono truncado del problema 48

Aplicaciones

En los problemas 49 y 50, verifique que la distribución de temperatura indicada satisface la **ecuación de Laplace en dos dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Una solución $u(x, y)$ de la ecuación de Laplace (5) puede interpretarse como la distribución de temperatura independiente del tiempo a través de una delgada placa bidimensional. Vea la FIGURA 13.3.4.

49. $u(x, y) = (\cosh 2\pi y + \operatorname{senh} 2\pi y)\operatorname{sen} 2\pi x$

50. $u(x, y) = e^{-(n\pi x/L)}\operatorname{sen}(n\pi y/L)$, n y L constantes

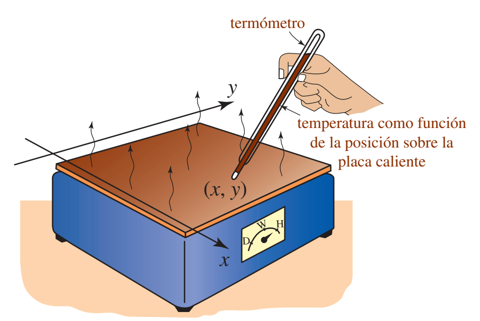


FIGURA 13.3.4 Placa caliente de los problemas 49 y 50

En los problemas 51 y 52, verifique que la función dada satisface la ecuación de Laplace (5).

51. $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ **52.** $u(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$

En los problemas 53 y 54 verifique que la función dada satisface la **ecuación de Laplace en tres dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{6}$$

53. $u(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

54. $u(x, y, z) = e^{\sqrt{m^2+n^2}\,x}\cos my \operatorname{sen} nz$

En los problemas 55 y 56, verifique que la función dada satisface la **ecuación de onda unidimensional**

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{7}$$

La ecuación de onda (7) ocurre en problemas que implican fenómenos vibratorios.

55. $u(x, t) = \cos at \operatorname{sen} x$

56. $u(x, t) = \cos(x + at) + \operatorname{sen}(x - at)$

57. La concentración molecular $C(x, t)$ de un líquido está dada por $C(x, t) = t^{-1/2}e^{-x^2/kt}$. Verifique que esta función satisface la **ecuación de difusión unidimensional**

$$\frac{k}{4}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\partial C}{\partial t}.$$

58. La presión P ejercida por un gas ideal encerrado está dada por $P = k(T/V)$, donde k es una constante. T es la temperatura y V es el volumen. Encuentre:

a) la tasa de cambio de P con respecto a V,
b) la tasa de cambio de V con respecto a T y
c) la tasa de cambio de T con respecto a P.

59. El desplazamiento vertical de una larga cuerda fija en el origen pero cayendo bajo su propio peso está dado por

$$u(x, t) = \begin{cases} -\dfrac{g}{2a^2}(2axt - x^2), & 0 \le x \le at \\ -\frac{1}{2}gt^2, & x > at. \end{cases}$$

Vea la FIGURA 13.3.5.

a) Determine $\partial u/\partial t$. Interprete para $x > at$.
b) Determine $\partial u/\partial x$. Interprete para $x > at$.

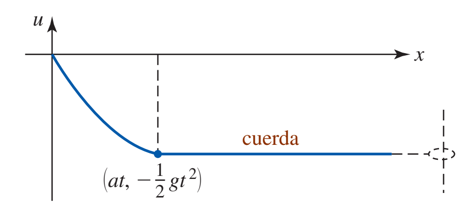


FIGURA 13.3.5 Cuerda que cae del problema 59

60. Para la función de área de la piel $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ que se discutió en el ejemplo 3 encuentre $\partial S/\partial h$ en $w = 60$, $h = 36$. Si una niña crece de 36 a 37 pulg, mientras su peso se mantiene en 60 lb, ¿cuál es el aumento aproximado en el área de la piel?

≡ Piense en ello

61. Formule una definición de límite que sea análoga a la definición 13.3.1 para las derivadas parciales de segundo orden

a) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ *b*) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ *c*) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$

62. Encuentre una función $z = f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 + 2y + \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2x + 1.$$

63. ¿Es posible que una función $z = f(x, y)$, con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto, se encuentra de manera tal que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2?$$

64. *a*) Suponga que la función $w = f(x, y, z)$ tiene derivadas parciales de tercer orden continuas. ¿Cuántas derivadas parciales de tercer orden diferentes hay?
b) Suponga que la función $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de n-ésimo orden. ¿Cuántas derivadas parciales diferentes de n-ésimo orden hay?

65. *a*) Suponga que $z = f(x, y)$ tiene la propiedad de que $\partial z/\partial x = 0$ y $\partial z/\partial y = 0$ para todo (x, y). ¿Qué puede usted afirmar acerca de la forma de f?
b) Suponga que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales de segundo orden continuas y $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = 0$. ¿Qué puede usted afirmar acerca de la forma f?

66. Algunas curvas de nivel de una función $z = f(x, y)$ se muestran en la FIGURA 13.3.6. Emplee estas curvas de nivel para conjeturar respecto a los signos algebraicos de las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ en el punto que se indica en rojo en la figura.

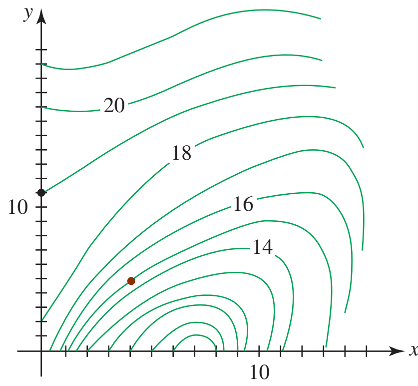


FIGURA 13.3.6 Curvas de nivel del problema 66

67. **Un clásico matemático** Una función $z = f(x, y)$ quizá no sea continua en un punto aunque es posible que siga teniendo derivadas parciales en ese punto. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

no es continua en (0, 0). (Vea el problema 38 en los ejercicios 13.2.) Emplee (1) y (2) de la definición 13.3.1 para mostrar que

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = 0 \quad \text{y} \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

68. **Un clásico matemático** Considere la función $z = f(x, y)$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(y^2 - x^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \ne (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calcule $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,y)}$ y $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,0)}$.

b) Muestre que $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right|_{(0,0)} \ne \left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right|_{(0,0)}$.

13.4 Linealización y diferenciales

▌Introducción En la sección 4.9 se vio que una linealización $L(x)$ de una función de una sola variable $y = f(x)$ en un número x_0 está dada por $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Esta ecuación puede utilizarse para aproximar los valores de la función $f(x)$ en la vecindad de x_0, esto es, $L(x) \approx f(x)$ para valores de x cercanos a x_0. De manera similar puede definirse una linealización

$L(x, y)$ de una función de dos variables en un punto (x_0, y_0). En el caso de una función de una sola variable se asumió que $y = f(x)$ era diferenciable en x_0, esto es,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{1}$$

existe. Recuerde también que si f es diferenciable en x_0, también es continua en ese número. Al repetir la suposición en (1), deseamos que $z = f(x, y)$ sea diferenciable en un punto (x_0, y_0). Aunque hemos considerado lo que significa que $z = f(x, y)$ posea *derivadas parciales* en un punto, aún no formulamos una definición de *diferenciabilidad* de una función de dos variables f en un punto.

Incremento de la variable dependiente La definición de diferenciabilidad de una función de cualquier número de variables independientes no depende de la noción de un cociente de diferencia como en (1), sino más bien de la noción de un *incremento* de la variable dependiente. Recuerde que para una función de una variable $y = f(x)$ el incremento en la variable dependiente está dado por

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

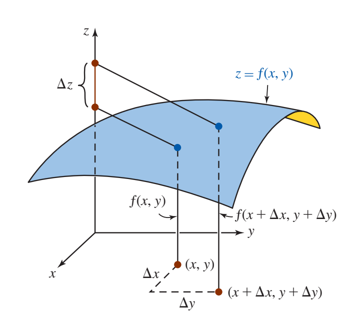


FIGURA 13.4.1 Incremento en z

De manera análoga, para una función de dos variables $z = f(x, y)$, definimos el **incremento de la variable dependiente** z como

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{2}$$

La FIGURA 13.4.1 muestra que Δz produce la cantidad de cambio en la función cuando (x, y) cambia a $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

EJEMPLO 1 Determinando Δz

Encuentre Δz para la función polinomial $z = x^2 - xy$. ¿Cuál es el cambio en la función de (1, 1) a (1.2, 0.7)?

Solución De (2),

$$\begin{aligned} \Delta z &= [(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x)(y + \Delta y)] - (x^2 - xy) \\ &= (2x - y)\Delta x - x\Delta y + (\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y. \end{aligned} \tag{3}$$

Con $x = 1$, $y = 1$, $\Delta x = 0.2$ y $\Delta y = -0.3$,

$$\Delta z = (1)(0.2) - (1)(-0.3) + (0.2)^2 - (0.2)(-0.3) = 0.6.$$ ■

Una fórmula de incremento fundamental Una breve reinspección del incremento Δz en (3) muestra que en los primeros dos términos los coeficientes de Δx y Δy son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$, respectivamente. El importante teorema que sigue muestra que esto no es un accidente.

Teorema 13.4.1 Una fórmula del incremento

Considere que $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ en una región rectangular abierta que está definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Si (x, y) es cualquier punto en esta región, entonces existen ε_1 y ε_2, las cuales son funciones de Δx y Δy, tales que

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{4}$$

donde $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$.

DEMOSTRACIÓN Al sumar y restar $f(x, y + \Delta y)$ en (2), tenemos,

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

Al aplicar el teorema del valor medio (teorema 4.4.2) a cada conjunto de corchetes, se llega a

$$\Delta z = f_x(x_0, y + \Delta y)\Delta x + f_y(x, y_0)\Delta y, \tag{5}$$

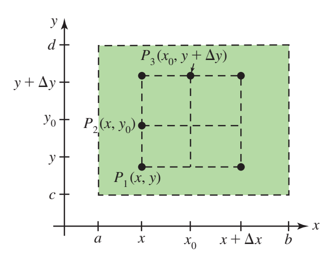


FIGURA 13.4.2 Región rectangular en el teorema 13.4.1

donde, como se muestra en la FIGURA 13.4.2, $x < x_0 < x + \Delta x$ y $y < y_0 < y + \Delta y$. En este caso, definimos

$$\varepsilon_1 = f_x(x_0, y + \Delta y) - f_x(x, y) \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_2 = f_y(x, y_0) - f_y(x, y). \tag{6}$$

Cuando $\Delta x \to 0$ y $\Delta y \to 0$, entonces, como se ilustra en la figura, $P_2 \to P_1$ y $P_3 \to P_1$. Puesto que f_x y f_y se suponen continuas en la región, tenemos

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0.$$

Al resolver (6) para $f_x(x_0, y + \Delta y)$ y $f_y(x, y_0)$ y sustituir en (5), obtenemos (4). ■

Diferenciabilidad: funciones de dos variables Ahora podemos definir la diferenciabilidad de una función $z = f(x, y)$ en un punto.

Definición 13.4.1 Función diferenciable

Una función $z = f(x, y)$ es **diferenciable** en (x_0, y_0) si el incremento Δz puede escribirse como

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

donde ε_1 y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$.

Si la función $z = f(x, y)$ es diferenciable en cada punto en una región R del plano xy, entonces se dice que f es **diferenciable en *R***. Si f es diferenciable sobre la región consistente en el plano xy completo, se afirma entonces que es **diferenciable en todas partes**.

Es interesante notar que las derivadas parciales f_x y f_y quizás existan en un punto (x_0, y_0) e incluso f no sea diferenciable en ese punto. Desde luego, si f_x y f_y no existen en un punto (x_0, y_0), entonces f no es diferenciable en ese punto. El siguiente teorema proporciona una condición suficiente bajo la cual la existencia de las derivadas parciales implica diferenciabilidad.

Teorema 13.4.2 Condición suficiente para la diferenciabilidad

Si las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas en un punto en una región abierta R, entonces $z = f(x, y)$ es diferenciable sobre R.

El siguiente teorema es el análogo del teorema 3.1.1; establece que si $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto, entonces es continua en el punto.

Teorema 13.4.3 Diferenciabilidad implica continuidad

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en el punto (x_0, y_0), entonces f es continua en (x_0, y_0).

DEMOSTRACIÓN Suponga que f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) y que

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

Utilizando esta expresión en (4), obtenemos

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, se deduce de la última línea que

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0).$$

Si se considera $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, entonces el último resultado es equivalente a

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Por (5) de la sección 13.2, f es continua en (x_0, y_0). ■

EJEMPLO 2 Diferenciabilidad

Si (3) del ejemplo 1 se escribe como

$$\Delta z = \overbrace{(2x - y)}^{f_x}\Delta x + \overbrace{(-x)}^{f_y}\Delta y + \overbrace{(\Delta x)}^{\varepsilon_1}(\Delta x) + \overbrace{(-\Delta x)}^{\varepsilon_2}\Delta y,$$

podemos identificar $\varepsilon_1 = \Delta x$ y $\varepsilon_2 = -\Delta x$. Puesto que $\varepsilon_1 \to 0$ y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x, \Delta y) \to (0, 0)$, la función $z = x^2 - xy$ es diferenciable en todo punto en el plano xy. ■

Como se advirtió en el ejemplo 2, la función dada es un polinomio. Cualquier función polinomial de dos o más variables es diferenciable en todas partes.

Linealización Si $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x_0, y_0) y (x, y) es un punto muy cercano a (x_0, y_0), se deduce de la definición 13.4.1 que $\Delta x = x - x_0$ y $\Delta y = y - y_0$ son ambas cercanas a cero, e igualmente lo son $\varepsilon_1 \Delta x$ y $\varepsilon_2 \Delta y$. En vista de (4) esto significa que

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Empleando $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ la última línea es lo mismo que

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Esto nos lleva a definir la linealización de f en (x_0, y_0) de la siguiente manera.

Definición 13.4.2 Linealización

Si una función $z = f(x, y)$ es diferenciable en un punto (x_0, y_0), entonces la función

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{7}$$

se dice que es una **linealización** de f en (x_0, y_0). Para un punto (x, y) cercano a (x_0, y_0), la aproximación

$$f(x, y) \approx L(x, y) \tag{8}$$

se denomina una **aproximación lineal local** de f en (x_0, y_0).

EJEMPLO 3 Linealización

Encuentre una linealización de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ en (4, 3).

Solución Las primeras derivadas parciales de f son

$$f_x(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Utilizando los valores $f(4, 3) = 5$, $f_x(4, 3) = \frac{4}{5}$ y $f_y(4, 3) = \frac{3}{5}$, se deduce de (7) que una linealización de f en (4, 3) es

$$L(x, y) = 5 + \frac{4}{5}(x - 4) + \frac{3}{5}(y - 3). \tag{9}$$

La última ecuación es equivalente a $L(x, y) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ pero con fines de cálculo (9) es más conveniente. ■

EJEMPLO 4 Aproximación lineal local

Utilice la aproximación lineal local para aproximar $\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2}$.

Solución Primero observe que se está pidiendo una aproximación del valor de la función $f(4.01, 2.98)$, donde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Debido a que el punto (4.01, 2.98) es razonablemente cercano al punto (4, 3) es factible utilizar la linealización en (9) para formar una aproximación lineal local $f(x, y) \approx L(x, y)$. De

$$L(4.01, 2.98) = 5 + \frac{4}{5}(4.01 - 4) + \frac{3}{5}(2.98 - 3) = 4.996$$

se sigue que la aproximación deseada es $f(4.01, 2.98) \approx L(4.01, 2.98)$ o

$$\sqrt{(4.01)^2 + (2.98)^2} \approx 4.996.$$

Suponga que se deja $z = L(x, y)$ y se reescribe (7) como

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0. \tag{10}$$

Al relacionar (10) término a término con (2) de la sección 11.6 se demuestra que una linealización de una función $z = f(x, y)$ en (x_0, y_0) es una ecuación de un plano.

Plano tangente En la sección 4.9 vimos que la linealización $L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ de una función f de una sola variable en un número x_0 no es más que una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en $(x_0, f(x_0))$. En tres dimensiones el análogo de una *recta tangente* a una curva es un *plano tangente* a una superficie. Veremos en la sección 13.7 que la fórmula de linealización $z = L(x, y)$ en (7) es una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Diferenciales Recuerde también que para una función f de una sola variable independiente hay dos diferenciales $\Delta x = dx$ y $dy = f'(x)\,dx$. La diferencial dx es simplemente el cambio en la variable independiente x. La diferencial dy es el cambio en la linealización $L(x)$; en el número x_0 tenemos

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x) - L(x_0)\\ &= [f(x_0) + f'(x_0)\Delta x] - [f(x_0) + f'(x_0)\cdot 0]\\ &= f'(x_0)\,dx = dy.\end{aligned}$$

En el caso de una función f de dos variables tenemos naturalmente tres diferenciales. Los cambios en las variables independientes x y y son dx y dy; los cambios en la linealización $L(x, y)$ se denotan por medio de dz. En el punto (x_0, y_0) el cambio en la linealización es

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - L(x_0, y_0)\\ &= f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x_0 + \Delta x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y_0 + \Delta y - y_0) - f(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y.\end{aligned} \tag{11}$$

Empleando el resultado en (11) definimos a continuación la diferencial dz de una función f en un punto arbitrario en el plano xy. Si (x, y) denota el punto, entonces un punto cercano es $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ o $(x + dx, y + dy)$. La diferencial dz se llama comúnmente **diferencial total** de la función.

Definición 13.4.3 Diferenciales

Sea $z = f(x, y)$ una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y existen. Entonces las **diferenciales de x y y** son $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. La **diferencial de z**,

$$dz = f_x(x, y)\,dx + f_y(x, y)\,dy = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \tag{12}$$

también se denomina **diferencial total de z**.

EJEMPLO 5 Diferencial total

Si $z = x^2 - xy$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x.$$

De (12) la diferencial total de la función es

$$dz = (2x - y)\,dx - x\,dy.$$

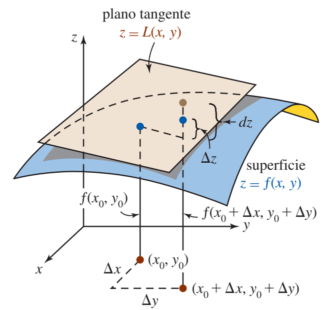


FIGURA 13.4.3 Interpretaciones geométricas de dx, dy, Δz y dz

Concluimos de inmediato de (4) del teorema 13.4.1 que cuando f_x y f_y son continuas y cuando Δx y Δy son cercanas a 0, entonces dz es una aproximación de Δz, esto es

$$dz \approx \Delta z. \tag{13}$$

La FIGURA 13.4.3 es una versión tridimensional de la figura 4.9.4. Los puntos en azul son los mismos puntos que se muestran en la figura 13.4.1 y están sobre la superficie. El plano es tangente a la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ y el punto marcado en café es un punto sobre el plano tangente.

EJEMPLO 6 Comparación de Δz y dz

En el ejemplo 1 vimos que la función $z = x^2 - xy$ cambió en la cantidad exacta $\Delta z = 0.6$ cuando hubo un desplazamiento del punto (1, 1) a (1.2, 0.7). Con las identificaciones $x = 1$, $y = 1$, $dx = 0.2$ y $dy = -0.3$, se observa de (12) y (13) y el resultado del ejemplo 5 que el cambio Δz de la función puede aproximarse por medio de los cambios en la linealización:

$$dz = (1)(0.2) - (1)(-0.3) = 0.5.$$ ■

EJEMPLO 7 Una aproximación de un error

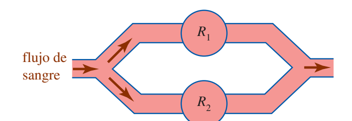


FIGURA 13.4.4 Flujo de sangre a través de las dos resistencias del ejemplo 7

El sistema cardiovascular humano es similar a circuitos eléctricos en serie y en paralelo. Por ejemplo, cuando la sangre circula a través de dos resistencias en paralelo, como se muestra en la FIGURA 13.4.4, entonces la resistencia equivalente R de la red es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{o} \quad R = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Si los errores porcentuales en la medición de R_1 y R_2 son $\pm 0.2\%$ y $\pm 0.6\%$, respectivamente, encuentre el error porcentual máximo aproximado en R.



Solución Tenemos que $\Delta R_1 = \pm 0.002R_1$ y $\Delta R_2 = \pm 0.006R_2$. En este caso,

$$dR = \frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}\,dR_1 + \frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}\,dR_2,$$

y por ello

$$\begin{aligned} |\Delta R| \approx |dR| &\le \left|\frac{R_2^2}{(R_1 + R_2)^2}(\pm 0.002R_1)\right| + \left|\frac{R_1^2}{(R_1 + R_2)^2}(\pm 0.006R_2)\right| \\ &= R\left[\frac{0.002R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006R_1}{R_1 + R_2}\right] \\ &\le R\left[\frac{0.006R_2}{R_1 + R_2} + \frac{0.006R_1}{R_1 + R_2}\right] = (0.006)R. \end{aligned}$$

Entonces el error relativo máximo está dado por la aproximación $|dR|/R \approx 0.006$; por tanto, el error porcentual máximo es aproximadamente 0.6%. ■

Funciones de tres variables Las definiciones 13.4.1, 13.4.2 y 13.4.3, así como los teoremas 13.4.1, 13.4.2 y 13.4.3, se generalizan de la manera esperada a funciones de tres o más variables. A continuación se mencionan algunos puntos importantes. Si $w = f(x, y, z)$, entonces el **incremento** Δw está dado por

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z). \tag{14}$$

En este caso f es **diferenciable** en un punto (x_0, y_0, z_0) si Δw puede escribirse

$$\Delta w = f_x\Delta x + f_y\Delta y + f_z\Delta z + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y + \varepsilon_3\Delta z, \tag{15}$$

donde ε_1, ε_2 y $\varepsilon_3 \to 0$ cuando Δx, Δy y $\Delta z \to 0$. Si f es diferenciable en (x_0, y_0, z_0), entonces la **linealización** de f se define como

$$L(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0). \tag{16}$$

Por último, la **diferencial total** de f es

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz. \tag{17}$$

EJEMPLO 8 Diferencial total: función de tres variables

Si $w = x^2 + 2y^3 + 3z^4$, entonces las tres primeras derivadas parciales son

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 6y^2 \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 12z^3.$$

Por (17) la diferencial total es

$$dw = 2x\,dx + 6y^2\,dy + 12z^3\,dz.$$ ■



NOTAS DESDE EL AULA

i) Puesto que $dy \approx \Delta y$ siempre que $f'(x)$ exista y Δx es cercana a 0, parece razonable esperar que $dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$ será una buena aproximación a Δz cuando Δx y Δy son ambas cercanas a 0. Pero la vida no es tan sencilla para funciones de varias variables. La garantía de que $dz \approx \Delta z$ para incrementos cercanos a 0 proviene de la continuidad de las derivadas parciales $f_x(x, y)$ y $f_y(x, y)$ y no simplemente de su existencia.

ii) Cuando trabaje en los problemas 27-30 en los ejercicios 13.4 descubrirá que las funciones ε_1 y ε_2 introducidas en (4) del teorema 13.4.1 no son únicas.

Ejercicios 13.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre una linealización de la función dada en el punto indicado.

1. $f(x, y) = 4xy^2 - 2x^3y$; $(1, 1)$
2. $f(x, y) = \sqrt{x^3y}$; $(2, 2)$
3. $f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2}$; $(8, 15)$
4. $f(x, y) = 3\,\text{sen}\,x \cos y$; $(\pi/4, 3\pi/4)$
5. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^3)$; $(-1, 1)$
6. $f(x, y) = e^{-2y}\,\text{sen}\,3x$; $(0, \pi/3)$

En los problemas 7-10, emplee una aproximación lineal para aproximar la cantidad indicada.

7. $\sqrt{102} + \sqrt[4]{80}$
8. $\sqrt{\dfrac{35}{63}}$
9. $f(1.95, 2.01)$ para $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2$
10. $f(0.52, 2.96)$ para $f(x, y) = \cos \pi xy$

En los problemas 11-22, calcule la diferencial total de la función dada.

11. $z = x^2\,\text{sen}\,4y$
12. $z = xe^{x^2 - y^2}$
13. $z = \sqrt{2x^2 - 4y^3}$
14. $z = (5x^3y + 4y^5)^3$
15. $f(s, t) = \dfrac{2s - t}{s + 3t}$
16. $g(r, \theta) = r^2 \cos 3\theta$
17. $w = x^2y^4z^{-5}$
18. $w = e^{-z^2}\cos(x^2 + y^4)$
19. $F(r, s, t) = r^3 + s^{-2} - 4t^{1/2}$
20. $G(\rho, \theta, \phi) = \rho\,\text{sen}\,\phi \cos \theta$
21. $w = \ln\left(\dfrac{uv}{st}\right)$
22. $w = \sqrt{u^2 + s^2t^2 - v^2}$

En los problemas 23-26, compare los valores de Δz y dz para la función dada cuando (x, y) varía del primero al segundo punto.

23. $z = 3x + 4y + 8$; $(2, 4), (2.2, 3.9)$
24. $z = 2x^2y + 5y + 8$; $(0, 0), (0.2, -0.1)$
25. $z = (x + y)^2$; $(3, 1), (3.1, 0.8)$
26. $z = x^2 + x^2y^2 + 2$; $(1, 1), (0.9, 1.1)$

En los problemas 27-30, encuentre funciones ε_1 y ε_2 de Δz como se define en (4) del teorema 13.4.1.

27. $z = 5x^2 + 3y - xy$
28. $z = 10y^2 + 3x - x^2$
29. $z = x^2y^2$
30. $z = x^3 - y^3$

≡ Aplicaciones

31. Cuando la sangre fluye a través de tres resistencias R_1, R_2, R_3, en paralelo, la resistencia equivalente R de la red es

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Dado que el error porcentual en la medida de cada resistencia es $\pm 0.9\%$, calcule el error porcentual máximo aproximado en R.

32. La presión P de un gas ideal confinado está dada por $P = k(T/V)$, donde V es el volumen, T es la temperatura y k es una constante. Dado que los errores porcentuales al medir T y V son a lo sumo 0.6 y 0.8%, respectivamente, calcule el error porcentual máximo aproximado en P.

33. La tensión T en la cuerda del yo-yo que se muestra en la FIGURA 13.4.5 es

$$T = mg\frac{R}{2r^2 + R^2},$$

donde mg es su peso constante. Determine el cambio aproximado en la tensión si R y r se incrementan de 4 cm y 0.8 cm a 4.1 cm y 0.9 cm, respectivamente. ¿La tensión aumenta o disminuye?

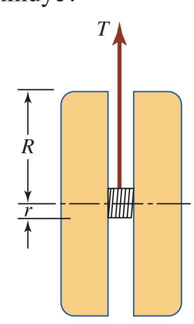


FIGURA 13.4.5 Yo-yo del problema 33

34. Determine el incremento aproximado en el volumen de un cilindro circular recto si su altura aumenta de 10 a 10.5 cm y su radio crece de 5 a 5.3 cm. ¿Cuál es el nuevo volumen aproximado?

35. Si la longitud, ancho y altura de una caja rectangular cerrada aumentan, respectivamente, en 2, 5 y 8%, ¿cuál es el incremento porcentual aproximado en el volumen?

36. En el problema 35, si la longitud, ancho y altura originales son, respectivamente, 3, 1 y 2 pies, ¿cuál es el incremento aproximado en el área de la superficie de la caja? ¿Cuál es la nueva área aproximada de la superficie?

37. La función $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ produce el área de la superficie del cuerpo de una persona en términos de su peso w y altura h. Si el error en la medición de w es a lo sumo 3% y el error en la medición de h es a lo sumo 5%, ¿cuál es el error porcentual máximo aproximado en la medición de S?

38. La impedancia Z del circuito en serie que se presenta en la FIGURA 13.4.6 es $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, donde R es la resistencia, $X = 1\,000L - 1/(1\,000C)$ es la reactancia neta, L es la inductancia y C es la capacitancia. Si los valores de R, L y C dados en la figura se incrementan, respectivamente, a 425 ohms, 0.45 henrys y 11.1×10^{-5} farads, ¿cuál es el cambio aproximado en la impedancia del circuito? ¿Cuál es el valor aproximado de la nueva impedancia?

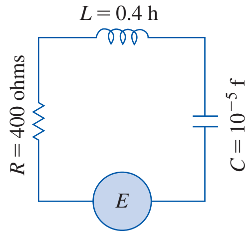


FIGURA 13.4.6 Circuito en serie del problema 38

≡ Piense en ello

39. ***a)*** Dé una definición para la linealización de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$.

b) Emplee la linealización para encontrar una aproximación de $\sqrt{(9.1)^2 + (11.75)^2 + (19.98)^2}$.

40. En el problema 67 de los ejercicios 13.3 se vio que para

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

tanto $\partial z/\partial x$ como $\partial z/\partial y$ existen en (0, 0). Explique por qué f no es diferenciable en (0, 0).

41. ***a)*** Dé una explicación intuitiva del porqué $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ no es diferenciable en (0, 0).

b) Después de esto pruebe que f no es diferenciable en (0, 0).

42. La longitud de los lados de la caja rectangular roja que se muestra en la FIGURA 13.4.7 son x, y y z. Considere que el volumen de la caja roja es V. Cuando se incrementan los lados de la caja en las cantidades Δx, Δy y Δz obtenemos la caja rectangular que se ilustra en la figura que se traza en azul. Dibuje o trace la figura 13.4.7 sobre un pedazo de papel. Identifique por medio de colores diferentes las cantidades Δx, Δy, Δz, ΔV, dV y $\Delta V - dV$.

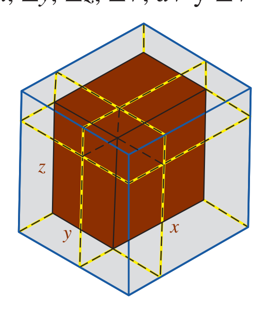


FIGURA 13.4.7 Caja del problema 42

≡ Proyectos

43. Brazo robótico Un brazo de robot bidimensional cuyo hombro está fijo en el origen sigue el rastro de su posición por medio de un ángulo del hombro θ y un ángulo del codo ϕ como se ilustra en la FIGURA 13.4.8. El ángulo del hombro se mide en el sentido contrario de las manecillas del reloj desde el eje x y el ángulo del codo se mide en esa misma dirección desde el brazo superior hasta el brazo inferior, los cuales tienen una longitud respectiva L y l.

a) La ubicación de la unión del codo está dada por (x_c, y_c), donde

$$x_c = L\cos\theta, \quad y_c = L\,\text{sen}\,\theta.$$

Encuentre fórmulas correspondientes para la ubicación (x_m, y_m) de la mano.

b) Muestre que las diferenciales totales de x_m y y_m pueden escribirse como

$$dx_m = -y_m d\theta + (y_c - y_m)\,d\phi$$
$$dy_m = x_m d\theta + (x_c - x_m)\,d\phi.$$

c) Suponga que $L = l$ y que el brazo está ubicado de manera que alcanza el punto (L, L). Suponga también

que el error en la medición de cada uno de los ángulos θ y ϕ es a lo más de $\pm 1°$. Calcule el error máximo aproximado en la coordenada x de la ubicación de la mano para cada una de las dos posiciones posibles.

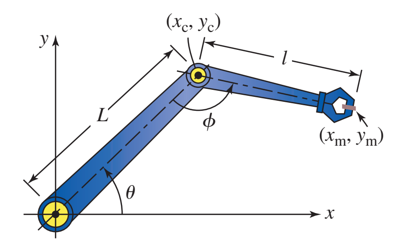


FIGURA 13.4.8 Brazo robótico del problema 43

44. Movimiento de proyectiles Se dispara un proyectil a un ángulo θ con velocidad v a través de un abismo de ancho D hacia el muro del acantilado vertical que es esencialmente infinito tanto en la altura como en profundidad. Vea la FIGURA 13.4.9.

a) Si el proyectil sólo está sujeto a la fuerza de la gravedad, demuestre que la altura H a la cual golpea el muro del acantilado como una función de las variables v y θ está dada por

$$H = D\tan\theta - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v^2}\sec^2\theta.$$

[*Sugerencia*: Vea la sección 10.2.]

b) Calcule la diferencial total de H.

c) Suponga que $D = 100$ pies, $g = 32$ pies/s^2, $v = 100$ pies/s y $\theta = 45°$. Calcule H.

d) Suponga, para los datos del inciso *c*), que el error en la medición de v es a lo sumo ± 1 pies/s y que el error en la medición de θ es a lo sumo $\pm 1°$. Calcule el error máximo aproximado en H.

e) Al dejar que D varíe, H también puede considerarse como una función de tres variables. Encuentre la diferencial total de H. Empleando los datos de los incisos *c*) y *d*) y suponiendo que el error en la medición D es a lo sumo ± 2 pies/s, calcule el error máximo aproximado en H.

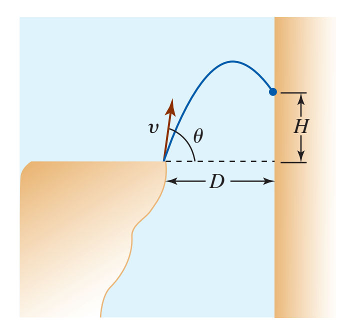


FIGURA 13.4.9 Abismo del problema 44

13.5 Regla de la cadena

Introducción La regla de la cadena para funciones de una sola variable indica que si $y = f(x)$ es una función diferenciable de x, y $x = g(t)$ es una función diferenciable de t, entonces la derivada de la función compuesta es

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

En esta sección se extiende la regla de la cadena a funciones de varias variables.

Regla de la cadena para derivadas ordinarias Si $z = f(x, y)$ y x y y son funciones de una sola variable t, entonces el siguiente teorema indica cómo calcular la derivada ordinaria dz/dt.

Teorema 13.5.1 Regla de la cadena

Suponga que $z = f(x, y)$ es diferenciable en (x, y) y $x = g(t)$ y que $y = h(t)$ son funciones diferenciables en t. Entonces $z = f(g(t), h(t))$ es una función diferenciable de t y

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

EJEMPLO 1 Regla de la cadena

Si $z = x^3y - y^4$ y $x = 2t^2$, $y = 5t^2 - 6t$, calcule dz/dt en $t = 1$.

Solución De (1)

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= (3x^2y)(4t) + (x^3 - 4y^3)(10t - 6).\end{aligned}$$

En este caso, en $t = 1$, $x(1) = 2$ y $y(1) = -1$, por lo que

$$\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=1} = (3\cdot 4\cdot(-1))\cdot 4 + (8 + 4)\cdot 4 = 0.$$

■

Aunque no hay necesidad de hacerlo de esa manera, también podemos encontrar la derivada dz/dt en el ejemplo 1 al sustituir las funciones $x = 2t^2$, $y = 5t^2 - 6t$ en $z = x^3y - y^4$ y después derivar la función resultante de una sola variable $z = 8t^6(5t^2 - 6t) - (5t^2 - 6t)^4$ con respecto a t.

EJEMPLO 2 Tasas relacionadas

En el ejemplo 3 de la sección 13.3 observamos que la función $S(w, h) = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ relaciona el área de la superficie (pies cuadrados) del cuerpo de una persona como una función del peso w (en libras) y la altura h (en pulgadas). Encuentre la tasa a la cual S cambia cuando $dw/dt = 10$ lb/año, $dh/dt = 2.3$ pulg/año, $w = 100$ lb y $h = 60$ pulgadas.

Solución Con los símbolos w y h desempeñando los papeles de x y y se deduce de (1) que la tasa de cambio de S con respecto al tiempo t es

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \frac{\partial S}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial S}{\partial h}\frac{dh}{dt}\\ &= (0.1091)(0.425)w^{-0.575}h^{0.725}\frac{dw}{dt} + (0.1091)(0.725)w^{0.425}h^{-0.275}\frac{dh}{dt}.\end{aligned}$$

Cuando $dw/dt = 10$, $dh/dt = 2.3$, $w = 100$ y $h = 60$, el valor de la derivada es

$$\begin{aligned}\left.\frac{dS}{dt}\right|_{(100,\,60)} &= (0.1091)(0.425)(100)^{-0.575}(60)^{0.725}\cdot(10) + (0.1091)(0.725)(100)^{0.425}(60)^{-0.275}\cdot(2.3)\\ &\approx 1.057.\end{aligned}$$

Como $dS/dt > 0$, la superficie de la persona está creciendo a una tasa de aproximadamente 1.057 pies^2 por año. ■

Regla de la cadena para derivadas parciales Para una función compuesta de dos variables $z = f(x, y)$, donde $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$, se esperarían naturalmente *dos* fórmulas análogas a (1), ya que $z = f(g(u, v), h(u, v))$ y por ello pueden calcularse tanto $\partial z/\partial u$ como $\partial z/\partial v$. La regla de la cadena para funciones de dos variables se resume en el siguiente teorema.

Teorema 13.5.2 Regla de la cadena

Si $z = f(x, y)$ es diferenciable y $x = g(u, v)$ y $y = h(u, v)$ tienen primeras derivadas parciales continuas, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN Probamos el segundo de los resultados en (2). Si $\Delta u = 0$, entonces

$$\Delta z = f(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v)) - f(g(u, v), h(u, v))$$

Ahora bien, si

$$\Delta x = g(u, v + \Delta v) - g(u, v) \quad \text{y} \quad \Delta y = h(u, v + \Delta v) - h(u, v),$$

entonces

$$g(u, v + \Delta v) = x + \Delta x \quad \text{y} \quad h(u, v + \Delta v) = y + \Delta y.$$

Por consiguiente, Δz puede escribirse como

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Puesto que f es diferenciable, se deduce de la fórmula de incremento (4) de la sección 13.4 que Δz puede escribirse como

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y,$$

donde, recuerde, ε_1 y ε_2 son funciones de Δx y Δy con la propiedad de que $\lim_{(\Delta u,\, \Delta v)\to(0,\,0)} \varepsilon_1 = 0$ y $\lim_{(\Delta u,\, \Delta v)\to(0,\,0)} \varepsilon_2 = 0$. Puesto que ε_1 y ε_2 no son funciones definidas de manera única, podemos encontrar siempre un par de funciones para las cuales $\varepsilon_1(0, 0) = 0$, $\varepsilon_2(0, 0) = 0$. Por consiguiente, ε_1 y ε_2 son continuas en (0, 0). Por tanto,

$$\frac{\Delta z}{\Delta v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta v} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta v} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta v}.$$

Ahora, tomando el límite de la última línea cuando $\Delta v \to 0$ obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + 0 \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + 0 \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

puesto que Δx y Δy se aproximan a cero cuando $\Delta v \to 0$. ■

EJEMPLO 3 Regla de la cadena

Si $z = x^2 - y^3$ y $x = e^{2u-3v}$, $y = \operatorname{sen}(u^2 - v^2)$, determine $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$.

Solución Como

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2e^{2u-3v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 2u\cos(u^2 - v^2),$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -3e^{2u-3v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -2v\cos(u^2 - v^2),$$

vemos de (2) que $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ son, a su vez,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x(2e^{2u-3v}) - 3y^2[2u\cos(u^2 - v^2)] = 4xe^{2u-3v} - 6uy^2\cos(u^2 - v^2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x(-3e^{2u-3v}) - 3y^2[-2v\cos(u^2 - v^2)] = -6xe^{2u-3v} + 6vy^2\cos(u^2 - v^2).$$ ■

Desde luego, como en el ejemplo 1, podríamos sustituir las expresiones para x y y en la función original y encontrar después las derivadas parciales $\partial z/\partial u$ y $\partial z/\partial v$ de manera directa. Sin embargo, no hay una ventaja particular que se obtenga al hacerlo así.

Generalizaciones Los resultados dados en (1) y (2) se generalizan de inmediato a cualquier número de variables. Si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ es diferenciable en $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y si x_i, $i = 1, \ldots, n$, son funciones diferenciables de una sola variable t, entonces (1) del teorema 13.5.1 se convierte en

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}. \tag{3}$$

De manera similar, si $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y cada una de las variables $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son funciones de k variables $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_k$, entonces bajo las mismas suposiciones que en el teorema 13.5.2, tenemos

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u_i} + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial u_i}, \tag{4}$$

donde $i = 1, 2, \ldots, k$.

Diagramas de árbol Los resultados en (1) y (2) pueden memorizarse en términos de **diagramas de árbol**. Los puntos en la FIGURA 13.5.1*a*) indican que z depende de x y y; x y y dependen, a su vez, de u y v. Para calcular $\partial z/\partial u$ por ejemplo, leemos el diagrama verticalmente hacia abajo empezando desde z y siguiendo las dos trayectorias azules que llevan a x y y. Después seguimos las trayectorias azules que conducen a u, multiplicamos las derivadas parciales en cada trayectoria y luego sumamos los productos. Para calcular $\partial z/\partial v$ empezamos en las dos trayectorias azules pero después ramificamos en x y y hacia las trayectorias rojas para obtener v, multiplicar las derivadas parciales en cada segmento y después sumar los productos. El resultado en (1) se

representa mediante el diagrama de árbol de la figura 13.5.1*b*). Sólo hay una rama que parte de x y de y puesto que estas variables dependen sólo de la variable individual t.

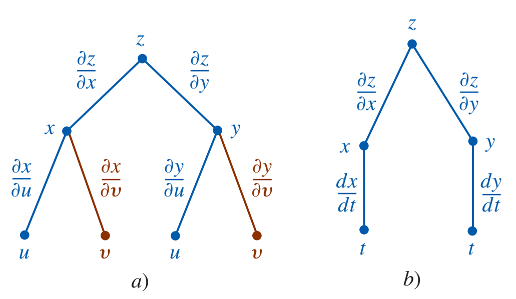


FIGURA 13.5.1 Diagramas de árbol: *a*) para (2) y *b*) para (1)

Empleamos los diagramas de árbol en los siguientes tres ejemplos para ilustrar casos especiales de (3) y (4).

EJEMPLO 4 Regla de la cadena

Si $r = x^2 + y^5z^3$ y $x = uve^{2s}$, $y = u^2 - v^2s$, $z = \text{sen}(uvs^2)$, encuentre *a*) $\partial r/\partial u$ y *b*) $\partial r/\partial s$.

Solución En este caso r es una función de tres variables x, y y z, y cada una es en sí misma una función de tres variables u, v y s. Para construir un diagrama de árbol dibujamos tres trayectorias azules desde r hasta tres puntos denominados x, y y z. Luego, ya que x, y y z dependen de tres variables, dibujamos tres trayectorias (azul, roja y verde) que parten de los puntos x, y y z hasta los puntos u, v y s. En cada uno de estos doce segmentos indicamos la derivada parcial apropiada. Vea la FIGURA 13.5.2. Para calcular $\partial r/\partial u$ seguimos las tres trayectorias poligonales azules que empiezan en r siempre hacia u en los tres diagramas. Formamos los productos de las derivadas parciales indicadas sobre cada segmento de las tres trayectorias poligonales azules hacia u y sumamos:

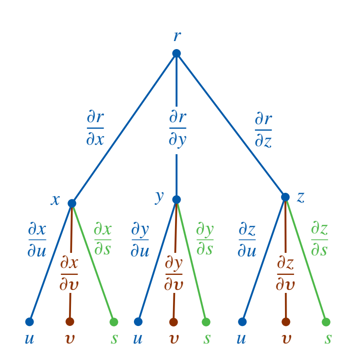


FIGURA 13.5.2 Diagrama de árbol del ejemplo 4

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$= 2x(ve^{2s}) + 5y^4z^3(2u) + 3y^5z^2(vs^2\cos(uvs^2)).$$

Ahora para calcular $\partial r/\partial s$ empezamos desde r sobre las tres trayectorias poligonales azules en la figura 13.5.2 y luego ramificamos hacia las trayectorias verdes en x, y y z para llegar a s. Al sumar los productos de la derivada parcial en cada segmento de las tres trayectorias poligonales que llevan a s obtenemos

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$
$$= 2x(2uve^{2s}) + 5y^4z^3(-v^2) + 3y^5z^2(2uvs\cos(uvs^2)).$$ ■

EJEMPLO 5 Regla de la cadena

Suponga que $w = f(x, y, z)$ es una función diferenciable de x, y y z y $x = g(u, v)$, $y = h(u, v)$ y $z = k(u, v)$ son funciones diferenciables de u y v. Construya un diagrama de árbol para calcular $\partial w/\partial u$ y $\partial w/\partial v$.

Solución Puesto que f es una función de tres variables x, y y z, y éstas son funciones de dos variables u y v, el diagrama de árbol es como se ilustra en la FIGURA 13.5.3. Las derivadas parciales son entonces

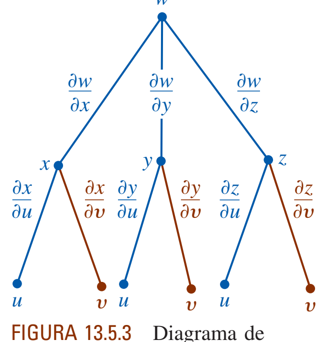


FIGURA 13.5.3 Diagrama de árbol del ejemplo 5

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}.$$ ■

EJEMPLO 6 Regla de la cadena

Si $z = u^2v^3w^4$ y $u = t^2$, $v = 5t - 8$, $w = t^3 + t$, determine dz/dt.

Solución En este caso el diagrama de árbol de la FIGURA 13.5.4 indica que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dt}\\ &= 2uv^3w^4(2t) + 3u^2v^2w^4(5) + 4u^2v^3w^3(3t^2 + 1).\end{aligned}$$ ■

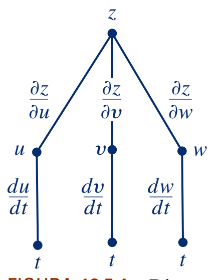


FIGURA 13.5.4 Diagrama de árbol del ejemplo 6

Diferenciación implícita Si la ecuación $F(x, y) = 0$ define a una función $y = f(x)$ de manera implícita, entonces $F(x, f(x)) = 0$ para toda x en el dominio de f. Recuerde de la sección 3.6 que encontramos la derivada dy/dx mediante un proceso llamado *diferenciación implícita*. La derivada dy/dx también puede determinarse de la regla de la cadena. Si suponemos que $w = F(x, y)$ y $y = f(x)$ son funciones diferenciables, entonces de (1) tenemos

$$\frac{dw}{dx} = F_x(x, y)\frac{dx}{dx} + F_y(x, y)\frac{dy}{dx}. \tag{5}$$

Puesto que $w = F(x, y) = 0$ y $dx/dx = 1$, (5) implica

$$F_x(x, y) + F_y(x, y)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)},$$

siempre que $F_y(x, y) \neq 0$.

Además, si $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente una función $z = f(x, y)$, entonces $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para toda (x, y) en el dominio de f. Si $w = F(x, y, z)$ es una función diferenciable y $z = f(x, y)$ es diferenciable en x y y, entonces (3) produce

$$\frac{\partial w}{\partial x} = F_x(x, y, z)\frac{\partial x}{\partial x} + F_y(x, y, z)\frac{\partial y}{\partial x} + F_z(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}. \tag{6}$$

Puesto que $w = F(x, y, z) = 0$, $\partial x/\partial x = 1$ y $\partial y/\partial x = 0$, (6) produce

$$F_x(x, y, z) + F_z(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)},$$

siempre que $F_z(x, y, z) \neq 0$. La derivada parcial $\partial z/\partial y$ puede obtenerse de manera similar. Resumimos estos resultados en el siguiente teorema.

Teorema 13.5.3 Diferenciación implícita

i) Si $w = F(x, y)$ es diferenciable y $y = f(x)$ es una función diferenciable de x definida implícitamente por $F(x, y) = 0$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}, \tag{7}$$

donde $F_y(x, y) \neq 0$.

ii) Si $w = F(x, y, z)$ es diferenciable y $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$, entonces

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}, \tag{8}$$

donde $F_z(x, y, z) \neq 0$.

EJEMPLO 7 Diferenciación implícita

a) Encuentre dy/dx si $x^2 - 4xy - 3y^2 = 10$.

b) Encuentre $\partial z/\partial y$ si $x^2y - 5xy^2 = 2yz - 4z^3$.

Solución

a) Sea $F(x, y) = x^2 - 4xy - 3y^2 - 10$. Entonces definimos y como una función de x por medio de $F(x, y) = 0$. En este caso, $F_x = 2x - 4y$ y $F_y = -4x - 6y$, y consecuentemente por (7) del teorema 13.5.3 tenemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = -\frac{2x - 4y}{-4x - 6y} = \frac{x - 2y}{2x + 3y}.$$

Se le pide al lector verificar este resultado mediante el procedimiento de la sección 3.6.

b) Sea $F(x, y, z) = x^2y - 5xy^2 - 2yz + 4z^3$. Entonces definimos z como una función de x y y mediante $F(x, y, z) = 0$. Puesto que $F_y = x^2 - 10xy - 2z$ y $F_z = -2y + 12z^2$, concluimos de (8) en el teorema 13.5.3 que

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)} = -\frac{x^2 - 10xy - 2z}{-2y + 12z^2} = \frac{x^2 - 10xy - 2z}{2y - 12z^2}. \quad ■$$

Ejercicios 13.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-41.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la derivada indicada.

1. $z = \ln(x^2 + y^2)$; $x = t^2, y = t^{-2}$; $\dfrac{dz}{dt}$

2. $z = x^3y - xy^4$; $x = e^{5t}, y = \sec 5t$; $\dfrac{dz}{dt}$

3. $z = \cos(3x + 4y)$; $x = 2t + \dfrac{\pi}{2}, y = -t - \dfrac{\pi}{4}$; $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=\pi}$

4. $z = e^{xy}$; $x = \dfrac{4}{2t + 1}, y = 3t + 5$; $\left.\dfrac{dz}{dt}\right|_{t=0}$

5. $p = \dfrac{r}{2s + t}$; $r = u^2, s = \dfrac{1}{u^2}, t = \sqrt{u}$; $\dfrac{dp}{du}$

6. $r = \dfrac{xy^2}{z^3}$; $x = \cos s, y = \operatorname{sen} s, z = \tan s$; $\dfrac{dr}{ds}$

En los problemas 7-16, determine las derivadas parciales indicadas.

7. $z = e^{xy^2}$; $x = u^3, y = u - v^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

8. $z = x^2 \cos 4y$; $x = u^2v^3, y = u^3 + v^3$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

9. $z = 4x - 5y^2$; $x = u^4 - 8v^3, y = (2u - v)^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

10. $z = \dfrac{x - y}{x + y}$; $x = \dfrac{u}{v}, y = \dfrac{v^2}{u}$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$

11. $w = (u^2 + v^2)^{3/2}$; $u = e^{-t} \operatorname{sen} \theta, v = e^{-t} \cos \theta$; $\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}$

12. $w = \tan^{-1}\sqrt{uv}$; $u = r^2 - s^2, v = r^2s^2$; $\dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial s}$

13. $R = rs^2t^4$; $r = ue^{v^2}, s = ve^{-u^2}, t = e^{u^2v^2}$; $\dfrac{\partial R}{\partial u}, \dfrac{\partial R}{\partial v}$

14. $Q = \ln(pqr)$; $p = t^2 \operatorname{sen}^{-1} x, q = \dfrac{x}{t^2}, r = \tan^{-1}\dfrac{x}{t}$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial t}$

15. $w = \sqrt{x^2 + y^2}$; $x = \ln(rs + tu)$, $y = \dfrac{t}{u}\cosh rs$; $\dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial u}$

16. $s = p^2 + q^2 - r^2 + 4t$; $p = \phi e^{3\theta}, q = \cos(\phi + \theta)$, $r = \phi\theta^2, t = 2\phi + 8\theta$; $\dfrac{\partial s}{\partial \phi}, \dfrac{\partial s}{\partial \theta}$

En los problemas 17-20, encuentre dy/dx mediante dos métodos:

a) diferenciación implícita y

b) el teorema 13.5.3*i*).

17. $x^3 - 2x^2y^2 + y = 1$

18. $x + 2y^2 = e^y$

19. $y = \operatorname{sen} xy$

20. $(x + y)^{2/3} = xy$

En los problemas 21-24, emplee el teorema 13.5.3*ii*) para encontrar $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$.

21. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

22. $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$

23. $xy^2z^3 + x^2 - y^2 = 5z^2$

24. $z = \ln(xyz)$

25. Si F y G tienen segundas derivadas parciales, muestre que $u(x, t) = F(x + at) + G(x - at)$ satisface la **ecuación de onda**

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

26. Sea $\eta = x + at$ y $\xi = x - at$. Muestre que la ecuación de onda del problema 25 se convierte en

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} = 0,$$

donde $u = f(\eta, \xi)$.

27. Si $u = f(x, y)$ y $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, muestre que la **ecuación de Laplace** $\partial^2u/\partial x^2 + \partial^2u/\partial y^2 = 0$ se vuelve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

28. Si $z = f(u)$ es una función diferenciable de una variable y $u = g(x, y)$ posee primeras derivadas parciales, entonces, ¿cuáles son $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$?

29. Emplee el resultado del problema 28 con el fin de mostrar que para cualquier función diferenciable f, $z = f(y/x)$ satisface la ecuación diferencial parcial $x\partial z/\partial x + y\partial z/\partial y = 0$.

30. Si $u = f(r)$ y $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, muestre que la ecuación de Laplace $\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ se transforma en

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

31. La **función error** definida por $\operatorname{erf}(x) = \left(2/\sqrt{\pi}\right)\int_0^x e^{-v^2}dv$ es importante en matemáticas aplicadas. Muestre que $u(x, t) = A + B\operatorname{erf}\left(x/\sqrt{4kt}\right)$, A y B constantes, satisfacen la ecuación de difusión unidimensional

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

≡ Aplicaciones

32. El voltaje en los extremos de un conductor aumenta a una tasa de 2 volts/min y la resistencia disminuye a razón de 1 ohm/min. Emplee $I = E/R$ y la regla de la cadena para calcular la tasa a la cual la corriente que circula por el conductor está cambiando cuando $R = 50$ ohms y $E = 60$ volts.

33. La longitud del lado marcado x del triángulo de la FIGURA 13.5.5 aumenta a una tasa de 0.3 cm/s, el lado marcado y crece a una tasa de 0.5 cm/s y el ángulo incluido θ aumenta a una tasa de 0.1 rad/s. Emplee la regla de la cadena para determinar la tasa a la cual el área del triángulo está cambiando en el instante $x = 10$ cm, $y = 8$ cm y $\theta = \pi/6$.

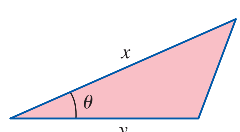


FIGURA 13.5.5 Triángulo del problema 33

34. La **ecuación de estado de Van der Waals** para un gas real CO_2 es

$$P = \frac{0.08T}{V - 0.0427} - \frac{3.6}{V^2}.$$

Si dT/dt y dV/dt son las tasas a las cuales cambian, respectivamente, la temperatura y el volumen, utilice la regla de la cadena para determinar dP/dt.

35. Un bebé crece a una tasa de 2 pulg/año y gana peso a una tasa de 4.2 lb/año. Utilice $S = 0.1091w^{0.425}h^{0.725}$ y la regla de la cadena para determinar la tasa a la cual el área superficial del bebé está cambiando cuando éste pesa 25 lb y mide 29 pulg de altura.

36. Una partícula se mueve en el espacio tridimensional de manera que sus coordenadas en cualquier tiempo son $x = 4\cos t$, $y = 4\operatorname{sen} t$, $z = 5t$, $t \geq 0$. Emplee la regla de la cadena para encontrar la tasa a la cual su distancia

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

a partir del origen está cambiando en $t = 5\pi/2$ segundos.

37. La ecuación de estado correspondiente a un sistema termodinámico es $F(P, V, T) = 0$, donde P, V y T son la presión, el volumen y la temperatura, respectivamente. Si la ecuación define a V como una función de P y T, y también define a T como una función de V y P, muestre que

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial T}}{\dfrac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial T}{\partial V}}.$$

38. Dos barcos de la guardia costera (denotados por A y B en la FIGURA 13.5.6), separados por una distancia de 500 yardas, descubren a un barco sospechoso C con orientaciones relativas θ y ϕ como se ilustra en la figura.

a) Utilice la ley de los senos para expresar la distancia r de A y C en términos de θ y ϕ.

b) ¿Cuán lejos está C de A cuando $\theta = 62°$ y $\phi = 75°$?

c) Suponga que en el momento especificado en el inciso *b*), el ángulo θ está creciendo a una tasa de 5° por minuto, mientras que ϕ está disminuyendo a una tasa de 10° por minuto. ¿La distancia de C a A crece o decrece? ¿A qué tasa?

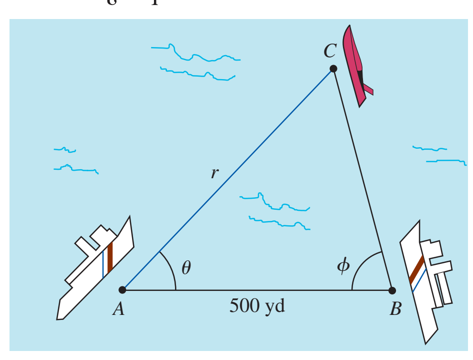


FIGURA 13.5.6 Barcos del problema 38

39. Un **resonador de Helmholtz** es cualquier recipiente con un cuello y una abertura (tal como una jarra o una botella de cerveza). Cuando se sopla el aire a través de la abertura, el resonador produce un sonido característico cuya frecuencia, en ciclos por segundo, es

$$f = \frac{c}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{lV}},$$

donde A es el área de la sección transversal de la abertura, l es la longitud del cuello, V es el volumen del recipiente (sin contar el cuello) y c es la velocidad del sonido (aproximadamente 330 m/s). Vea la FIGURA 13.5.7.

a) ¿Qué frecuencia sonora producirá una botella si tiene una abertura circular de 2 cm de diámetro, un cuello de 6 cm de largo y un volumen de 100 cm^3? [*Sugerencia*: Asegúrese de convertir c a cm/s.]

b) Suponga que el volumen de la botella en el inciso *a*) está disminuyendo a una tasa de 10 cm^3/s, mientras que su cuello se adelgaza a una tasa de 1 cm/s. En el instante especificado en el inciso *a*) (esto es, $V = 100$, $l = 6$) ¿la frecuencia está creciendo o decreciendo?

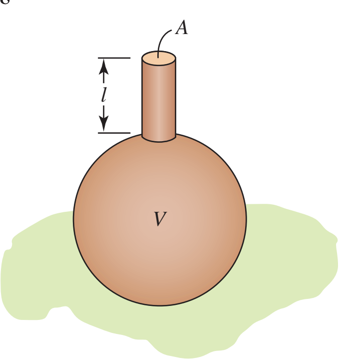


FIGURA 13.5.7 Recipiente del problema 39

≡ Piense en ello

40. ***a***) Suponga que $w = F(x, y, z)$ y $y = g(x)$, $z = h(x)$. Dibuje un diagrama de árbol apropiado y encuentre una expresión para dw/dx.

b) Suponga que $w = xy^2 - 2yz + x$ y $y = \ln x$, $z = e^x$. Emplee la regla de la cadena para determinar dw/dx.

41. Suponga que $z = F(u, v, w)$, donde $u = F(t_1, t_2, t_3, t_4)$, $v = g(t_1, t_2, t_3, t_4)$ y $w = h(t_1, t_2, t_3, t_4)$. Dibuje un diagrama de árbol apropiado y encuentre expresiones para las derivadas parciales $\partial z/\partial t_2$ y $\partial z/\partial t_4$.

42. Suponga que $w = F(x, y, z, u)$ es diferenciable y $u = f(x, y, z)$ es una función diferenciable de x, y y z definida implícitamente por $f(x, y, z, u) = 0$. Encuentre expresiones para $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$.

43. Utilice los resultados del problema 42 para encontrar $\partial u/\partial x$, $\partial u/\partial y$ y $\partial u/\partial z$ si u es una función diferenciable de x, y y z definida implícitamente por $-xyz + x^2yu + 2xy^3u - u^4 = 8$.

44. ***a***) Se dice que una función f es **homogénea de grado *n*** si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$. Si f tiene primeras derivadas parciales, muestre que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

b) Verifique que $f(x, y) = 4x^2y^3 - 3xy^4 + x^5$ es una función homogénea de grado 5.

c) Verifique que la función en el inciso *b*) satisface la ecuación diferencial del inciso *a*).

d) Reexamine el problema 29. Conjeture acerca de si $z = f(y/x)$ es homogénea.

13.6 Derivada direccional

Introducción En la sección 13.3 vimos que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ son las tasas de cambio de la función $z = f(x, y)$ en las direcciones que son paralelas al eje x o al eje y, respectivamente. En la presente sección generalizaremos la noción de derivadas parciales mostrando cómo encontrar la tasa de cambio de f en una dirección arbitraria. Para hacerlo es conveniente introducir una nueva función vectorial cuyas componentes son derivadas parciales.

El gradiente de una función Cuando el **operador diferencial**

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \qquad \text{o} \qquad \nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

se aplica a una función $z = f(x, y)$ o $w = f(x, y, z)$, obtenemos una función vectorial muy útil.

Definición 13.6.1 Gradientes

i) Suponga que f es una función de dos variables x y y cuyas derivadas parciales f_x y f_y existen. Entonces el **gradiente de *f*** se define como

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}. \tag{1}$$

ii) Suponga que f es una función de tres variables x, y y z cuyas derivadas parciales f_x, f_y y f_z existen. Entonces el **gradiente de *f*** se define como

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{2}$$

El símbolo ∇ es una delta griega mayúscula invertida, que se denomina *del* o *nabla*. El símbolo ∇f suele leerse "grad f".

EJEMPLO 1 Gradiente de una función de dos variables

Calcule $\nabla f(x, y)$ para $f(x, y) = 5y - x^3y^2$.

Solución De (1),

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(5y - x^3y^2)\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}(5y - x^3y^2)\mathbf{j}$$
$$= -3x^2y^2\mathbf{i} + (5 - 2x^3y)\mathbf{j}.$$

■

EJEMPLO 2 Gradiente de una función de tres variables

Si $f(x, y, z) = xy^2 + 3x^2 - z^3$, determine $\nabla f(x, y, z)$ en $(2, -1, 4)$.

Solución De (2),

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2 + 6x)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} - 3z^2\mathbf{k}$$

y por ello $$\nabla f(2, -1, 4) = 13\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 48\mathbf{k}.$$ ■

El gradiente de una función f tiene muchas aplicaciones. Veremos después que ∇f desempeña un importante papel en la generalización del concepto de derivada parcial.

Una generalización de la diferenciación parcial Recuerde que las derivadas parciales $\partial z/\partial x$ y $\partial z/\partial y$ producen la pendiente de una recta tangente a la traza, o curva de intersección, de una superficie dada por $z = f(x, y)$ y planos verticales que son, respectivamente, paralelos a los ejes de coordenadas x y y. De manera equivalente, $\partial z/\partial x$ es la tasa de cambio de la función f en la dirección dada por el vector $\mathbf{i}$, y $\partial z/\partial y$ es la tasa de cambio de $z = f(x, y)$ en la dirección $\mathbf{j}$. No hay razón para restringir nuestra atención sólo a dos direcciones; podemos encontrar la tasa de cambio de una función diferencial en *cualquier* dirección. Vea la FIGURA 13.6.1. Suponga que Δx y Δy denotan incrementos en x y y, respectivamente, y que $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es un vector *unitario* en el plano xy que forma un ángulo θ con el eje positivo x y que es paralelo al vector $\mathbf{v}$ de $(x, y, 0)$ a $(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$. Si $h = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} > 0$, entonces $\mathbf{v} = h\mathbf{u}$. Además, considere que el plano perpendicular al plano xy que contiene estos puntos corta la superficie $z = f(x, y)$ en una curva C. Preguntamos:

- ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a C en el punto P con coordenadas $(x, y, f(x, y))$ en la dirección dada por $\mathbf{v}$?

Vea la FIGURA 13.6.2.

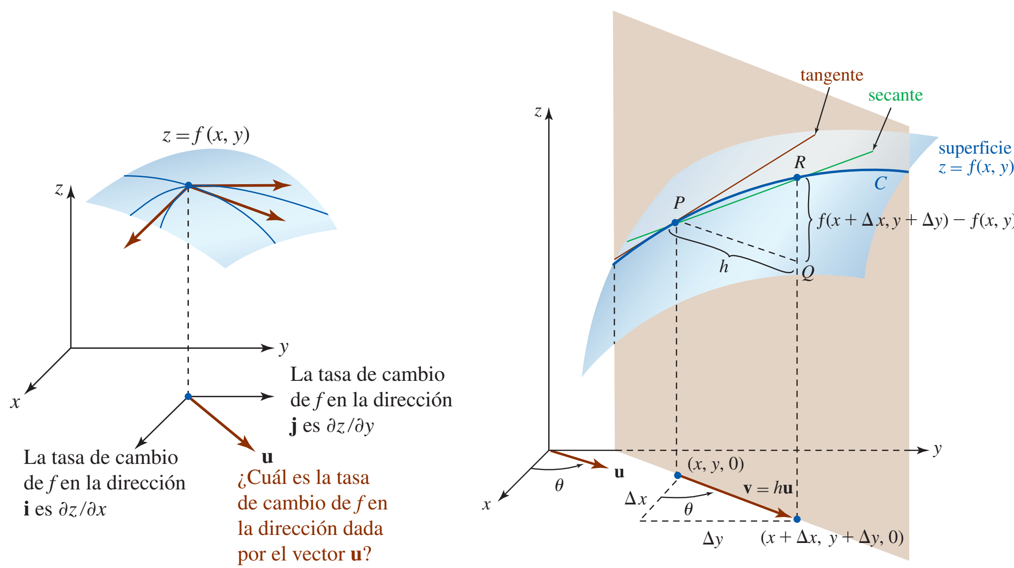


FIGURA 13.6.1 El vector $\mathbf{u}$ determina la dirección

FIGURA 13.6.2 ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva C en P?

De la figura 13.6.2, vemos que $\Delta x = h\cos\theta$ y $\Delta y = h\operatorname{sen}\theta$, por lo que la pendiente de la recta secante indicada que pasa por los puntos P y R sobre C es

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{h} = \frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}. \tag{3}$$

Esperamos que la pendiente de la tangente en P sea el límite de (3) cuando $h \to 0$. Esta pendiente es la tasa de cambio de f en P en la dirección especificada por el vector unitario $\mathbf{u}$. Esto nos lleva a la siguiente definición.

Definición 13.6.2 Derivada direccional

La **derivada direccional** de una función $z = f(x, y)$ en (x, y) en la dirección del vector unitario $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ está dada por

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}, \tag{4}$$

siempre que el límite exista.

Observe que (4) es realmente una generalización de (1) y (2) de la sección 13.3, puesto que:

$$\theta = 0 \text{ implica que } D_{\mathbf{i}} f(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

y

$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ implica que } D_{\mathbf{j}} f(x, y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Cálculo de una derivada direccional Si bien (4) podría utilizarse para encontrar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ relativa a una función dada, como es usual buscaremos un procedimiento más eficiente. El siguiente teorema muestra cómo el concepto de gradiente de una función desempeña un papel fundamental en el cálculo de una derivada direccional.

Teorema 13.6.1 Cálculo de una derivada direccional

Si $z = f(x, y)$ es una función diferenciable de x y y, y $\mathbf{u} = \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ es un vector unitario, entonces

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y)\cdot\mathbf{u}. \tag{5}$$

DEMOSTRACIÓN Sean x, y y θ fijas de manera que

$$g(t) = f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$$

es una función de una sola variable t. Deseamos comparar el valor de $g'(0)$, el cual se encuentra mediante dos métodos diferentes. Primero, por la definición de una derivada,

$$g'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(0 + h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\theta, y + h\operatorname{sen}\theta) - f(x, y)}{h}. \tag{6}$$

Segundo, por la regla de la cadena (1) de la sección 13.5,

$$\begin{aligned} g'(t) &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(x + t\cos\theta) + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\frac{d}{dt}(y + t\operatorname{sen}\theta) \\ &= f_1(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + f_2(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Aquí los subíndices 1 y 2 se refieren a las derivadas parciales de $f(x + t\cos\theta, y + t\operatorname{sen}\theta)$ respecto a $x + t\cos\theta$ y $y + t\operatorname{sen}\theta$. Cuando $t = 0$, advertimos que $x + t\cos\theta$ y $y + t\operatorname{sen}\theta$ son simplemente x y y, y en consecuencia (7) se convierte en

$$g'(0) = f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta. \tag{8}$$

Al comparar (4), (6) y (8) se produce entonces

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\cos\theta + f_y(x, y)\operatorname{sen}\theta \\ &= [f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j}]\cdot(\cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}) \\ &= \nabla f(x, y)\cdot\mathbf{u}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Derivada direccional

Determine la derivada direccional de $f(x, y) = 2x^2y^3 + 6xy$ en (1, 1) en la dirección del vector unitario cuyo ángulo con el eje x positivo sea $\pi/6$.

Solución Puesto que $\partial f/\partial x = 4xy^3 + 6y$ y $\partial f/\partial y = 6x^2y^2 + 6x$ tenemos de (1) de la definición 13.6.1,

$$\nabla f(x, y) = (4xy^3 + 6y)\mathbf{i} + (6x^2y^2 + 6x)\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla f(1, 1) = 10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}.$$

Ahora bien, en $\theta = \pi/6$, $\mathbf{u} + \cos\theta\mathbf{i} + \operatorname{sen}\theta\mathbf{j}$ se convierte en

$$\mathbf{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}.$$

Por tanto, por (5) del teorema 13.6.1,

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 1) = \nabla f(1, 1) \cdot \mathbf{u} = (10\mathbf{i} + 12\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right) = 5\sqrt{3} + 6. \qquad ■$$

Es importante que usted recuerde que el vector $\mathbf{u}$ en el teorema 13.6.1 es un vector *unitario*. Si un vector $\mathbf{v}$ no unitario especifica una dirección, entonces para utilizar (5) debemos normalizar $\mathbf{v}$ y utilizar $\mathbf{u} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

EJEMPLO 4 Derivada direccional

Considere el plano que es perpendicular al plano xy y que pasa por los puntos $P(2, 1)$ y $Q(3, 2)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de este plano con la superficie $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ en (2, 1, 17) en la dirección de Q?

Solución Queremos determinar $D_{\mathbf{u}}f(2, 1)$ en la dirección dada por el vector $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. Sin embargo, puesto que $\overrightarrow{PQ}$ no es un vector unitario, formamos

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\overrightarrow{PQ}|}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

En este caso,

$$\nabla f(x, y) = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \nabla f(2, 1) = 16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}.$$

Por tanto, de (5) la pendiente que se desea es

$$D_{\mathbf{u}}f(2, 1) = (16\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}\right) = 9\sqrt{2}. \qquad ■$$

Funciones de tres variables Para una función $w = f(x, y, z)$ la derivada direccional está definida por

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta, z + h\cos\gamma) - f(x, y, z)}{h},$$

donde α, β y γ son los ángulos direccionales del vector $\mathbf{u}$ medidos con relación a los ejes x, y y z, respectivamente.* No obstante, de la misma manera que antes, podemos demostrar que

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \cdot \mathbf{u}. \tag{9}$$

Note que, puesto que $\mathbf{u}$ es un vector unitario, de (11) de la sección 11.3 se deduce que

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = \operatorname{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f(x, y) \qquad \text{y} \qquad D_{\mathbf{u}}f(x, y, z) = \operatorname{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f(x, y, z).$$

Además, (9) revela que

$$D_{\mathbf{k}}f(x, y, z) = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

*Advierta que el numerador de (4) puede escribirse como $f(x + h\cos\alpha, y + h\cos\beta) - f(x, y)$, donde $\beta = (\pi/2) - \alpha$.

EJEMPLO 5 Derivada direccional

Encuentre la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2 - 4x^2y + z^2$ en $(1, -1, 2)$ en la dirección de $\mathbf{v} = 6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Solución Tenemos $\partial f/\partial x = y^2 - 8xy$, $\partial f/\partial y = 2xy - 4x^2$ y $\partial f/\partial z = 2z$, por lo que

$$\nabla f(x, y, z) = (y^2 - 8xy)\mathbf{i} + (2xy - 4x^2)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$
$$\nabla f(1, -1, 2) = 9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

Puesto que $|\mathbf{v}| = |6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}| = 7$ entonces $\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{v}|}\mathbf{v} = \frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}$

es un vector unitario en la dirección indicada. De (9) obtenemos

$$D_{\mathbf{u}}f(1, -1, 2) = (9\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) \cdot \left(\frac{6}{7}\mathbf{i} + \frac{2}{7}\mathbf{j} + \frac{3}{7}\mathbf{k}\right) = \frac{54}{7}.$$ ■

Valor máximo de la derivada direccional Considere que f representa una función de dos o tres variables. Puesto que (5) y (9) expresan la derivada direccional como un producto punto, vemos del teorema 11.3.2 que

$$D_{\mathbf{u}}f = \nabla f \cdot \mathbf{u} = |\nabla f||\mathbf{u}|\cos\phi = |\nabla f|\cos\phi, \quad (|u| = 1), \tag{10}$$

donde ϕ es el ángulo entre ∇f y $\mathbf{u}$ que satisface $0 \le \phi \le \pi$. Debido a que $-1 \le \cos\phi \le 1$ se deduce de (10) que

$$-|\nabla f| \le D_{\mathbf{u}}f \le |\nabla f|.$$

En otras palabras:

- El valor máximo de la derivada direccional es $|\nabla f|$ y ocurre cuando $\mathbf{u}$ tiene la misma dirección que ∇f (cuando $\cos\phi = 1$), (11)

y

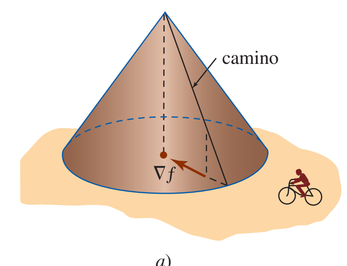
- El valor mínimo de la derivada direccional es $-|\nabla f|$ y ocurre cuando $\mathbf{u}$ y ∇f tienen direcciones opuestas (cuando $\cos\phi = -1$). (12)

EJEMPLO 6 Valor máximo de la derivada direccional

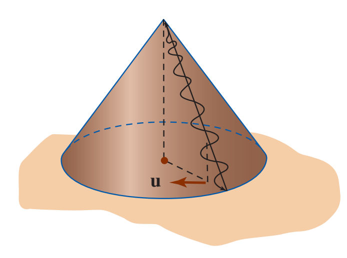
En el ejemplo 5 el valor máximo de la derivada direccional de f en $(1, -1, 2)$ es $|\nabla f(1, -1, 2)| = \sqrt{133}$. El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(1, -1, 2)$ es entonces $-\sqrt{133}$. ■

Puntos gradientes en la dirección del incremento más rápido de *f* Puesto de otra forma, (11) y (12) establecen que:

- El vector gradiente ∇f apunta en la dirección en la cual f crece con mayor rapidez, en tanto que $-\nabla f$ apunta en la dirección en la cual f decrece con mayor rapidez.



a)



b)

FIGURA 13.6.3 Modelo de la colina inclinada del ejemplo 7

EJEMPLO 7 Un modelo matemático

Cada año en Los Ángeles hay una carrera de bicicletas hasta la cima de una colina por un camino conocido como el más inclinado de la ciudad. Para entender por qué un ciclista, con un mínimo de cordura, ascenderá en zigzag por el camino, vamos a suponer que la gráfica $f(x, y) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 4$, que se muestra en la FIGURA 13.6.3*a*), es un modelo matemático de la colina. El gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \frac{2}{3}\left[\frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j}\right] = \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ es un vector que apunta hacia el centro de la base circular.

Entonces, la subida más inclinada por la colina es un camino recto cuya proyección en el plano xy es un radio de la base circular. Puesto que $D_{\mathbf{u}}f = \text{comp}_{\mathbf{u}}\nabla f$, un ciclista realizará zigzag, o buscará una dirección $\mathbf{u}$ distinta a ∇f, para reducir esta componente. Vea la figura 13.6.3*b*). ■

EJEMPLO 8 Un modelo matemático

La temperatura en un caja rectangular se aproxima mediante el modelo matemático $T(x, y, z) = xyz(1 - x)(2 - y)(3 - z)$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 3$. Si un mosquito se ubica en $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$, ¿en qué dirección debería volar para enfriarse tan rápido como sea posible?

Solución El gradiente de T es

$$\nabla T(x, y, z) = yz(2 - y)(3 - z)(1 - 2x)\mathbf{i} + xz(1 - x)(3 - z)(2 - 2y)\mathbf{j} + xy(1 - x)(2 - y)(3 - 2z)\mathbf{k}.$$

Por tanto,
$$\nabla T\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = \frac{1}{4}\mathbf{k}.$$

Para enfriarse con la mayor rapidez, el mosquito debe volar en la dirección de $\frac{1}{4}\mathbf{k}$; esto es, debe volar hacia el piso de la caja, donde la temperatura es $T(x, y, 0) = 0$. ■

Ejercicios 13.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-42.

Fundamentos

En los problemas 1-4, calcule el gradiente para la función dada.

1. $f(x, y) = x^2 - x^3y^2 + y^4$

2. $f(x, y) = y - e^{-2x^2y}$

3. $F(x, y, z) = \dfrac{xy^2}{z^3}$

4. $G(x, y, z) = xy \cos yz$

En los problemas 5-8, determine el gradiente de la función dada en el punto indicado.

5. $f(x, y) = x^2 - 4y^2$; $(2, 4)$

6. $f(x, y) = \sqrt{x^3y - y^4}$; $(3, 2)$

7. $f(x, y, z) = x^2z^2 \operatorname{sen} 4y$; $(-2, \pi/3, 1)$

8. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $(-4, 3, 5)$

En los problemas 9 y 10, emplee la definición 13.6.2 para encontrar $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ dado que $\mathbf{u}$ forma el ángulo indicado con el eje positivo.

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$; $\theta = 30°$

10. $f(x, y) = 3x - y^2$; $\theta = 45°$

En los problemas 11-20, encuentre la derivada direccional de la función dada en el punto indicado en la dirección señalada.

11. $f(x, y) = 5x^3y^6$; $(-1, 1), \theta = \pi/6$

12. $f(x, y) = 4x + xy^2 - 5y$; $(3, -1), \theta = \pi/4$

13. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $(2, -2), \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$

14. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$; $(2, -1), 6\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$

15. $f(x, y) = (xy + 1)^2$; $(3, 2)$, en la dirección de $(5, 3)$

16. $f(x, y) = x^2 \tan y$; $\left(\frac{1}{2}, \pi/3\right)$, en la dirección del eje x negativo.

17. $F(x, y, z) = x^2y^2(2z + 1)^2$; $(1, -1, 1), \langle 0, 3, 3\rangle$

18. $F(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z^2}$; $(2, 4, -1), \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2y + 2y^2z}$; $(-2, 2, 1)$, en la dirección del eje z negativo.

20. $f(x, y, z) = 2x - y^2 + z^2$; $(4, -4, 2)$, en la dirección del origen.

En los problemas 21 y 22, considere el plano que pasa por los puntos P y Q y que es perpendicular al plano xy. Encuentre la pendiente de la tangente en el punto indicado a la curva de intersección de este plano y la gráfica de la función dada en la dirección de Q.

21. $f(x, y) = (x - y)^2$; $P(4, 2), Q(0, 1)$; $(4, 2, 4)$

22. $f(x, y) = x^3 - 5xy + y^2$; $P(1, 1), Q(-1, 6)$; $(1, 1, -3)$

En los problemas 23-26, encuentre un vector que produzca la dirección en la cual la función dada aumenta más rápidamente en el punto indicado. Encuentre la tasa máxima.

23. $f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} y$; $(0, \pi/4)$

24. $f(x, y) = xye^{x-y}$; $(5, 5)$

25. $f(x, y, z) = x^2 + 4xz + 2yz^2$; $(1, 2, -1)$

26. $f(x, y, z) = xyz$; $(3, 1, -5)$

En los problemas 27-30, encuentre un vector que produzca la dirección en la cual la función dada disminuye más rápidamente en el punto que se indica. Determine la tasa mínima.

27. $f(x, y) = \tan(x^2 + y^2)$; $(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6})$

28. $f(x, y) = x^3 - y^3$; $(2, -2)$

29. $f(x, y, z) = \sqrt{xz}\, e^y$; $(16, 0, 9)$

30. $f(x, y, z) = \ln\dfrac{xy}{z}$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$

31. Encuentre la(s) derivada(s) direccional(es) de $f(x, y) = x + y^2$ en $(3, 4)$ en la dirección de un vector tangente a la gráfica de $2x^2 + y^2 = 9$ en $(2, 1)$.

32. Si $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x$, encuentre todos los puntos donde $D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ en la dirección de $\mathbf{u} = \left(1/\sqrt{2}\right)(\mathbf{i} + \mathbf{j})$ es cero.

33. Suponga $\nabla f(a, b) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. Encuentre un vector unitario $\mathbf{u}$ de manera que

a) $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 0$

b) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un máximo

c) $D_{\mathbf{u}}f(a, b)$ es un mínimo

34. Suponga $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 6$. ¿Cuál es el valor de $D_{-\mathbf{u}}f(a, b)$?

35. *a)* Si $f(x, y) = x^3 - 3x^2y^2 + y^3$, encuentre la derivada direccional de f en un punto (x, y) en la dirección de $\mathbf{u} = \left(1/\sqrt{10}\right)(3\mathbf{i} + \mathbf{j})$.

b) Si $F(x, y) = D_{\mathbf{u}}f(x, y)$ en el inciso *a*), determine $D_{\mathbf{u}}F(x, y)$.

36. Suponga $D_{\mathbf{u}}f(a, b) = 7$, $D_{\mathbf{v}}f(a, b) = 3$, $\mathbf{u} = \frac{5}{13}\mathbf{i} - \frac{12}{13}\mathbf{j}$ y $\mathbf{v} = \frac{5}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j}$. Determine $\nabla f(a, b)$.
37. Si $f(x, y) = x^3 - 12x + y^2 - 10y$, encuentre todos los puntos en los cuales $|\nabla f| = 0$.
38. Si $f(x, y) = x^2 - \frac{5}{2}y^2$, dibuje entonces el conjunto de puntos en el plano xy para los cuales $|\nabla f| = 10$.

Aplicaciones

39. Considere la placa rectangular que se muestra en la FIGURA 13.6.4. La temperatura en el punto (x, y) sobre la placa está dada por $T(x, y) = 5 + 2x^2 + y^2$. Determine la dirección que un insecto seguiría, empezando en (4, 2), con el fin de enfriarse lo más rápidamente posible.

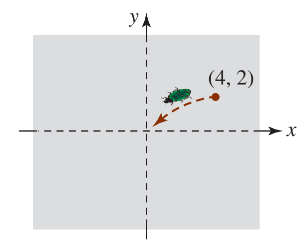


FIGURA 13.6.4 Insecto sobre una placa del problema 39

40. En el problema 39 observe que para (0, 0) es el punto más frío de la placa. Encuentre la trayectoria de búsqueda de enfriamiento del insecto, empezando en (4, 2), que el insecto seguiría hacia el origen. Si $\langle x(t), y(t)\rangle$ es la ecuación vectorial de la trayectoria, entonces use el hecho de que $-\nabla T(x, y) = \langle x'(t), y'(t)\rangle$. ¿Cuál es la razón de lo anterior? [*Sugerencia*: Revise la sección 8.1.]
41. La temperatura T en el punto (x, y) sobre una placa de metal rectangular está dada por $T(x, y) = 100 - 2x^2 - y^2$. Encuentre la trayectoria que tomaría una partícula que busca calor, empezando en (3, 4), cuando ésta se mueve en la dirección en la cual la temperatura aumenta con mayor rapidez.
42. La temperatura T en un punto (x, y, z) en el espacio es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de (x, y, z) al origen. Sabemos que $T(0, 0, 1) = 500$. Encuentre la tasa de cambio de la temperatura T en (2, 3, 3) en la dirección de (3, 1, 1). ¿En cuál dirección a partir de (2, 3, 3) la temperatura T aumenta con mayor rapidez? En (2, 3, 3), ¿cuál es la máxima tasa de cambio de T?
43. Considere el potencial gravitacional
$$U(x, y) = \frac{-Gm}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$
donde G y m son constantes. Muestre que U crece o decrece con mayor rapidez a lo largo de una recta que pasa por el origen.

Piense en ello

44. Encuentre una función f tal que
$$\nabla f = (3x^2 + y^3 + ye^{xy})\mathbf{i} + (-2y^2 + 3xy^2 + xe^{xy})\mathbf{j}.$$

En los problemas 45-48, suponga que f y g son funciones diferenciables de dos variables. Demuestre la identidad dada.

45. $\nabla(cf) = c\nabla f$
46. $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$
47. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$
48. $\nabla\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$
49. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y $r = |\mathbf{r}|$, entonces muestre que $\nabla r = \mathbf{r}/r$.
50. Emplee el problema 49 para mostrar que $\nabla f(r) = f'(r)\mathbf{r}/r$.
51. Sea f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} continua y $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores unitarios. Muestre que $D_{\mathbf{u}}D_{\mathbf{v}}f = D_{\mathbf{v}}D_{\mathbf{u}}f$.
52. Si $\mathbf{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$, determine $\nabla \times \mathbf{F}$.

13.7 Planos tangentes y rectas normales

Introducción En la sección 13.4 se mencionó que el análogo tridimensional de una recta tangente a una curva es un plano tangente a una superficie. Para obtener una ecuación de un plano tangente en un punto sobre una superficie debemos regresar a la noción del gradiente de una función de dos o tres variables.

Interpretación geométrica del gradiente Suponga que $f(x, y) = c$ es la *curva de nivel* de la función diferenciable de dos variables $z = f(x, y)$ que pasa por un punto especificado $P(x_0, y_0)$; esto es, el número c se define mediante $f(x_0, y_0) = c$. Si la curva de nivel se parametriza mediante las funciones diferenciables

$$x = x(t),\ y = y(t) \qquad \text{tal que} \qquad x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),$$

entonces por la regla de la cadena, (1) de la sección 13.5, la derivada de $f(x(t), y(t)) = c$ con respecto a t está dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0. \tag{1}$$

Al introducir los vectores

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

(1) puede escribirse como el producto punto $\nabla f \cdot \mathbf{r}' = 0$. Específicamente, en $t = t_0$, tenemos

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{2}$$

Entonces, si $\mathbf{r}'(t_0) \neq 0$, el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$ en $P(x_0, y_0)$. Interpretamos que esto significa lo siguiente:

- El gradiente ∇f es perpendicular a la curva de nivel en P.

Vea la FIGURA 13.7.1.

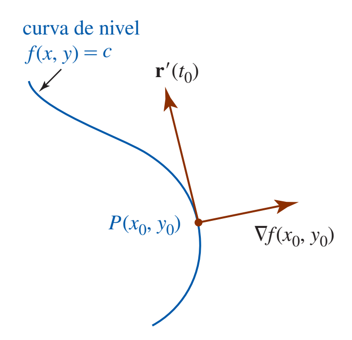


FIGURA 13.7.1 El gradiente es perpendicular a la curva de nivel

EJEMPLO 1 Gradiente en un punto sobre una curva de nivel

Encuentre la curva de nivel de $f(x, y) = -x^2 + y^2$ que pasa por (2, 3). Grafique el gradiente en el punto.

Solución Puesto que $f(2, 3) = -4 + 9 = 5$, la curva de nivel es la hipérbola $-x^2 + y^2 = 5$. Ahora bien,

$$\nabla f(x, y) = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} \qquad \text{y por ello} \qquad \nabla f(2, 3) = -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j}.$$

La FIGURA 13.7.2 muestra la curva de nivel y el gradiente $\nabla f(2, 3)$. ■

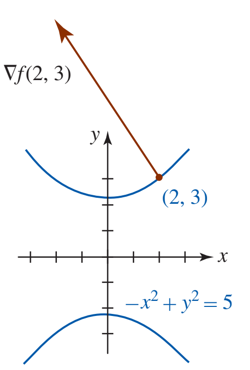


FIGURA 13.7.2 Gradiente del ejemplo 1

Interpretación geométrica del gradiente (continuación) Procediendo como antes, sea $F(x, y, z) = c$ la *superficie de nivel* de una función diferenciable de tres variables $w = F(x, y, z)$ que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$. Si las funciones diferenciables $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ son las ecuaciones paramétricas de una curva C sobre las superficies para las cuales $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$, entonces por (3) de la sección 13.5, la derivada de $F(x(t), y(t), z(t)) = c$ con respecto a t es

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = 0$$

o

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right) = 0. \tag{3}$$

En particular, en $t = t_0$, (3) se convierte en

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0. \tag{4}$$

Entonces, (4) muestra que cuando $\mathbf{r}'(t_0) \neq \mathbf{0}$ el vector $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ es ortogonal al vector tangente $\mathbf{r}'(t_0)$. Puesto que este argumento se cumple para cualquier curva diferenciable que pasa por $P(x_0, y_0, z_0)$ sobre la superficie, concluimos que:

- El gradiente ∇F es perpendicular (normal) a la superficie de nivel en P.

Vea la FIGURA 13.7.3.

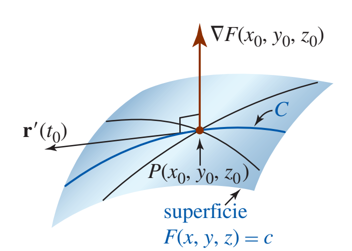


FIGURA 13.7.3 El gradiente es perpendicular a una superficie de nivel

EJEMPLO 2 Gradiente en un punto sobre una superficie de nivel

Encuentre la superficie de nivel de $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ que pasa por (1, 1, 1). Grafique el gradiente en el punto.

Solución Puesto que $F(1, 1, 1) = 3$, la superficie de nivel que pasa por (1, 1, 1) es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. El gradiente de la función es

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

y por ello, en el punto dado,

$$\nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

La superficie de nivel y $\nabla F(1, 1, 1)$ se ilustran en la FIGURA 13.7.4. ■

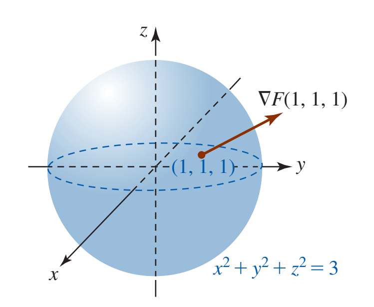


FIGURA 13.7.4 El gradiente es perpendicular a la esfera del ejemplo 2

Plano tangente En capítulos anteriores encontramos ecuaciones de rectas tangentes a gráficas de funciones. En el espacio tridimensional podemos resolver ahora el problema análogo de

determinar las ecuaciones de **plano tangente** a superficies. Suponemos también que $w = F(x, y, z)$ es una función diferenciable y que se da una superficie mediante $F(x, y, z) = c$, donde c es una constante.

Definición 13.7.1 Plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de la superficie de nivel $F(x, y, z) = c$ donde ∇F no es $\mathbf{0}$. El **plano tangente** en $P(x_0, y_0, z_0)$ es aquel plano que pasa por P y que es perpendicular a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$.

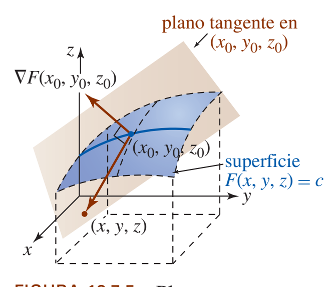
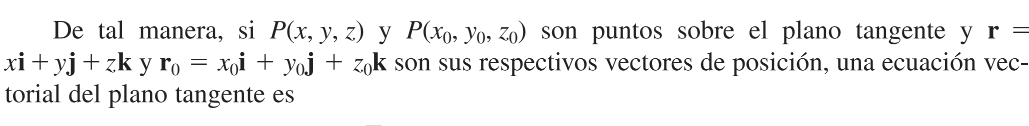


FIGURA 13.7.5 Plano tangente a una superficie



De tal manera, si $P(x, y, z)$ y $P(x_0, y_0, z_0)$ son puntos sobre el plano tangente y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ son sus respectivos vectores de posición, una ecuación vectorial del plano tangente es

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0,$$

donde $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = (x - x_0)\mathbf{i} + (y - y_0)\mathbf{j} + (z - z_0)\mathbf{k}$. Vea la FIGURA 13.7.5. Resumimos este último resultado.



Teorema 13.7.1 Ecuación de un plano tangente

Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de $F(x, y, z) = c$, donde ∇F no es $\mathbf{0}$. Entonces una ecuación del plano tangente en P es

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0. \qquad (5)$$

EJEMPLO 3 Ecuación de un plano tangente

Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ en $(1, 1, 1)$.

Solución Al definir $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, encontramos que la esfera dada es la superficie de nivel $F(x, y, z) = F(1, 1, 1) = 3$ que pasa por $(1, 1, 1)$. En este caso,

$$F_x(x, y, z) = 2x, \quad F_y(x, y, z) = 2y \quad \text{y} \quad F_z(x, y, z) = 2z$$

por lo que

$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \nabla F(1, 1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Concluimos de (5) que una ecuación del plano tangente es

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2(z - 1) = 0 \quad \text{o} \quad x + y + z = 3.$$

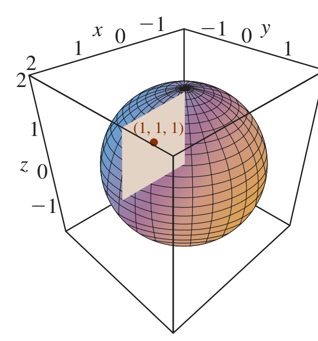


FIGURA 13.7.6 Plano tangente del ejemplo 3

Con la ayuda de un SAC el plano tangente se muestra en la FIGURA 13.7.6. ■

Superficies dadas por $z = f(x, y)$ En el caso de una superficie dada explícitamente mediante una función diferenciable $z = f(x, y)$, definimos $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ o $F(x, y, z) = z - f(x, y)$. Así, un punto (x_0, y_0, z_0) está sobre la gráfica de $z = f(x, y)$ si y sólo si se encuentra también sobre la superficie de nivel $F(x, y, z) = 0$. Lo anterior sigue de $F(x_0, y_0, z_0) = f(x_0, y_0) - z_0 = 0$. En este caso,

$$F_x = f_x(x, y), \quad F_y = f_y(x, y), \quad F_z = -1$$

y por ello (5) se convierte en

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

o

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \qquad (6)$$

Una comparación directa de (6) con (7) de la sección 13.4 muestra que una linealización $L(x, y)$ de una función $z = f(x, y)$ que es diferenciable en un punto (x_0, y_0) es una ecuación de un plano tangente en (x_0, y_0).

EJEMPLO 4 Ecuación de un plano tangente

Encuentre una ecuación de un plano tangente a la gráfica del paraboloide $z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4$ en $(1, -1, 5)$.

Solución Definimos $F(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z + 4$ de manera que la superficie de nivel de F que pasa por el punto dado es $F(x, y, z) = F(1, -1, 5)$ o $F(x, y, z) = 0$. En este caso $F_x = x$, $F_y = y$ y $F_z = -1$, por lo que

$$\nabla F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - \mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Por consiguiente, de (5) la ecuación deseada es

$$(x - 1) - (y + 1) - (z - 5) = 0 \qquad \text{o} \qquad -x + y + z = 3.$$

Vea la FIGURA 13.7.7. ■

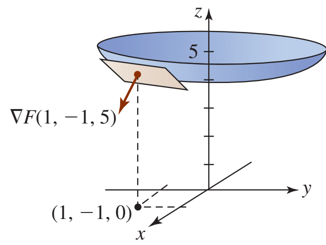


FIGURA 13.7.7 Plano tangente del ejemplo 4

Recta normal Sea $P(x_0, y_0, z_0)$ un punto sobre la gráfica de $F(x, y, z) = c$ donde ∇F no es $\mathbf{0}$. La recta que contiene a $P(x_0, y_0, z_0)$ que es paralela a $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ se denomina **recta normal** a la superficie en P. La recta normal es perpendicular al plano tangente a la superficie en P.

EJEMPLO 5 Recta normal

Encuentre ecuaciones paramétricas para la recta normal a la superficie del ejemplo 4 en $(1, -1, 5)$.

Solución Un vector de dirección para la recta normal en $(1, -1, 5)$ es $\nabla F(1, -1, 5) = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$. Se sigue de (4) de la sección 11.5 que las ecuaciones paramétricas para la recta normal son $x = 1 + t, y = -1 - t, z = 5 - t$. ■

Expresada como ecuaciones simétricas, la recta normal a la superficie $F(x, y, z) = c$ en $P(x_0, y_0, z_0)$ está dada por

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

En el ejemplo 5, usted debe verificar que las ecuaciones simétricas de la recta normal en $(1, -1, 5)$ son

$$x - 1 = \frac{y + 1}{-1} = \frac{z - 5}{-1}.$$

∇f NOTAS DESDE EL AULA

El agua que fluye hacia abajo por una colina elige una trayectoria en la dirección del mayor cambio en la altura. La FIGURA 13.7.8 muestra los contornos, o curvas de nivel, de una colina. Como se muestra en la figura, una corriente que empieza en el punto P seguirá una trayectoria que es perpendicular a los contornos. Después de leer las secciones 13.7 y 13.8 usted debe ser capaz de explicar la razón.

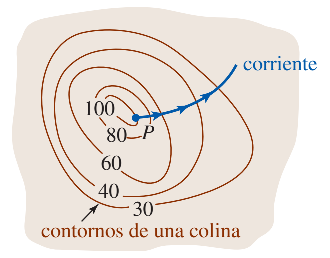


FIGURA 13.7.8 Corriente que fluye colina abajo

Ejercicios 13.7 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-42.

Fundamentos

En los problemas 1-12, dibuje la curva o superficie de nivel que pasa por el punto indicado. Dibuje el gradiente en el punto.

1. $f(x, y) = x - 2y;\quad (6, 1)$
2. $f(x, y) = \dfrac{y + 2x}{x};\quad (1, 3)$
3. $f(x, y) = y - x^2;\quad (2, 5)$
4. $f(x, y) = x^2 + y^2;\quad (-1, 3)$
5. $f(x, y) = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9};\quad (-2, -3)$
6. $f(x, y) = \dfrac{y^2}{x};\quad (2, 2)$
7. $f(x, y) = (x - 1)^2 - y^2;\quad (1, 1)$
8. $f(x, y) = \dfrac{y - 1}{\operatorname{sen} x};\quad \left(\pi/6, \frac{3}{2}\right)$
9. $f(x, y, z) = y + z;\quad (3, 1, 1)$
10. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z;\quad (1, 1, 3)$
11. $F(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\quad (3, 4, 0)$
12. $F(x, y, z) = x^2 - y^2 + z;\quad (0, -1, 1)$

En los problemas 13 y 14, determine los puntos sobre la superficie dada en los cuales el gradiente es paralelo al vector indicado.

13. $z = x^2 + y^2;\quad 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$
14. $x^3 + y^2 + z = 15;\quad 27\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k}$

En los problemas 15-24, encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de la ecuación dada en el punto que se indica.

15. $x^2 + y^2 + z^2 = 9; \quad (-2, 2, 1)$

16. $5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8; \quad (2, 4, 1)$

17. $x^2 - y^2 - 3z^2 = 5; \quad (6, 2, 3)$

18. $xy + yz + zx = 7; \quad (1, -3, -5)$

19. $z = 25 - x^2 - y^2; \quad (3, -4, 0)$

20. $xz = 6; \quad (2, 0, 3)$

21. $z = \cos(2x + y); \quad (\pi/2, \pi/4, -1/\sqrt{2})$

22. $x^2y^3 + 6z = 10; \quad (2, 1, 1)$

23. $z = \ln(x^2 + y^2); \quad (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$

24. $z = 8e^{-2y} \operatorname{sen} 4x; \quad (\pi/24, 0, 4)$

En los problemas 25 y 26, determine los puntos sobre la superficie dada en la cual el plano tangente es paralelo al plano indicado.

25. $x^2 + y^2 + z^2 = 7; \quad 2x + 4y + 6z = 1$

26. $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 33; \quad 8x + 4y + 6z = 5$

27. Encuentre los puntos sobre la superficie $x^2 + 4x + y^2 + z^2 - 2z = 11$ en los cuales el plano tangente es horizontal.

28. Encuentre los puntos sobre la superficie $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy = 16$ en los cuales el plano tangente es paralelo a

a) el plano *xz*,
b) el plano *yz* y
c) el plano *xy*.

En los problemas 29 y 30, muestre que la segunda ecuación es la de un plano tangente a la gráfica de la primera ecuación en (x_0, y_0, z_0).

29. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \quad \dfrac{xx_0}{a^2} + \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

30. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1; \quad \dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} + \dfrac{zz_0}{c^2} = 1$

En los problemas 31 y 32, encuentre ecuaciones paramétricas para la recta normal en el punto indicado.

31. $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4; \quad (1, -1, 1)$

32. $z = 2x^2 - 4y^2; \quad (3, -2, 2)$

En los problemas 33 y 34, determine ecuaciones simétricas para la recta normal en el punto indicado.

33. $z = 4x^2 + 9y^2 + 1; \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3\right)$

34. $x^2 + y^2 - z^2 = 0; \quad (3, 4, 5)$

≡ Piense en ello

35. Muestre que todo plano tangente a la gráfica $z^2 = x^2 + y^2$ pasa por el origen.

36. Muestre que la suma de las intersecciones con los ejes *x*, *y* y *z* de todo plano tangente a la gráfica de $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$, $a > 0$, es el número *a*.

37. Muestre que toda recta normal a la gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ pasa por el origen.

38. Se afirma que dos superficies son **ortogonales** en el punto *P* de intersección si sus rectas normales son perpendiculares en *P*. Demuestre que si $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ y $\nabla G(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$, entonces las superficies dadas por $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$ son ortogonales en $P(x_0, y_0, z_0)$ si y sólo si

$$F_xG_x + F_yG_y + F_zG_z = 0$$

en *P*.

En los problemas 39 y 40, emplee el resultado del problema 38 para mostrar que las superficies dadas son ortogonales en un punto de intersección. Las superficies del problema 39 se presentan en la FIGURA 13.7.9.

39. $x^2 + y^2 + z^2 = 25; \quad x^2 + y^2 - z^2 = 0$

40. $x^2 - y^2 + z^2 = 4; \quad z = 1/xy^2$

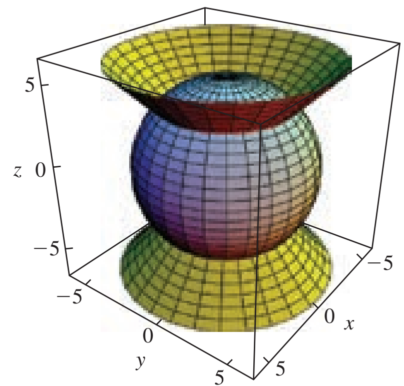


FIGURA 13.7.9 Superficies ortogonales del problema 39

13.8 Extremos de funciones multivariables

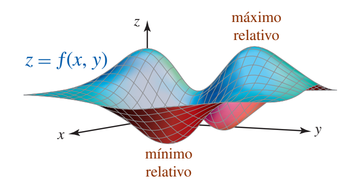


FIGURA 13.8.1 Extremos relativos de *f*

Introducción Como se muestra en la FIGURA 13.8.1, una función *f* de dos variables puede tener máximos relativos y mínimos relativos. En esta sección exploramos una manera de determinar estos extremos. Puesto que muchos de los conceptos considerados en esta sección son las contrapartes tridimensionales de las importantes definiciones y teoremas del capítulo 4 para funciones de una sola variable, se recomienda un repaso de las secciones 4.3 y 4.7.

Extremos Empezamos con la definición de **extremos relativos** o **locales** para funciones de dos variables *x* y *y*.

Definición 13.8.1 Extremos relativos

i) Un número $f(a, b)$ es un **máximo relativo** de una función $z = f(x, y)$ si $f(x, y) \leq f(a, b)$ para todo (x, y) en algún disco abierto que contenga a (a, b).
ii) Un número $f(a, b)$ es un **mínimo relativo** de una función $z = f(x, y)$ si $f(x, y) \geq f(a, b)$ para todo (x, y) en algún disco abierto que contenga a (a, b).

En aras de la discusión suponga que (a, b) es un punto interior de una región rectangular R en la cual f tiene un máximo relativo en el punto $(a, b, f(a, b))$ y, además, suponga que en las primeras derivadas parciales de f existen en (a, b). Entonces como advertimos en la FIGURA 13.8.2, sobre la curva C_1 de intersección de la superficie y el plano $x = a$, la recta tangente en $(a, b, f(a, b))$ es horizontal y por ello su pendiente en el punto es $f_y(a, b) = 0$. Similarmente, sobre la curva C_2, la cual es la traza de la superficie en el plano $y = b$, tenemos $f_x(a, b) = 0$.

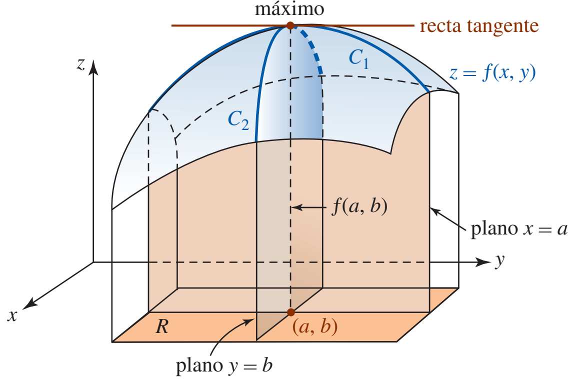


FIGURA 13.8.2 Máximo relativo de una función f

Dicho de otra manera, como lo hicimos en el espacio bidimensional, podemos argumentar que un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$ donde la *recta tangente* es horizontal muchas veces conduce a un extremo relativo. En el espacio tridimensional podemos buscar un *plano tangente* horizontal a la gráfica de una función $z = f(x, y)$. Si f tiene un máximo o mínimo relativo en un punto (a, b) y las primeras parciales existen en el punto, entonces una ecuación del plano tangente en $(a, b, f(a, b))$ es

$$z - f(a, b) = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b). \qquad (1)$$

Si el plano es horizontal, su ecuación debe ser $z =$ constante, o de manera más específica, $z = f(a, b)$. Utilizando este último hecho, podemos concluir de (1) que debemos tener $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$.

Esta discusión sugiere el siguiente teorema.

Teorema 13.8.1 Extremos relativos

Si una función $z = f(x, y)$ tiene un extremo relativo en el punto (a, b) y si las primeras derivadas parciales existen en este punto, entonces

$$f_x(a, b) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(a, b) = 0.$$

Puntos críticos En la sección 4.3 definimos un **número crítico** c de una función f de una sola variable x como un número en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe. En la definición que sigue definimos un **punto crítico** de una función f de dos variables x y y.

Definición 13.8.2 Puntos críticos

Un **punto crítico** de una función $z = f(x, y)$ es un punto (a, b) en el dominio de f para el cual $f_x(a, b) = 0$ y $f_y(a, b) = 0$, o si una de sus derivadas parciales no existe en el punto.

Los puntos críticos corresponden a puntos donde f podría *posiblemente* tener un extremo relativo. En algunos libros los puntos críticos también reciben el nombre de **puntos estacionarios**. En el caso en que las primeras derivadas parciales existan, notamos que un punto crítico (a, b) se encuentra al resolver las ecuaciones

$$f_x(x, y) = 0 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 0$$

simultáneamente.

EJEMPLO 1 Puntos críticos

Encuentre todos los puntos críticos para $f(x, y) = x^3 + y^3 - 27x - 12y$.

Solución Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 27 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 3y^2 - 12.$$

Por consiguiente, $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ implican que

$$x^2 = 9 \qquad \text{y} \qquad y^2 = 4$$

y por ello $x = \pm 3$, $y = \pm 2$. Entonces, hay cuatro puntos críticos $(3, 2)$, $(-3, 2)$, $(3, -2)$ y $(-3, -2)$. ■

Prueba de las segundas derivadas parciales El siguiente teorema da condiciones suficientes para establecer extremos relativos. No se dará la demostración del teorema. En términos generales, el teorema 13.8.2 es análogo a la prueba de la segunda derivada (teorema 4.7.3).

Teorema 13.8.2 Prueba de las segundas derivadas parciales

Sea (a, b) un punto crítico de $z = f(x, y)$ y suponga que f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} son continuas en un disco centrado en (a, b). Considere que

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2.$$

i) Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) > 0$, entonces $f(a, b)$ es un **mínimo relativo**.
ii) Si $D(a, b) > 0$ y $f_{xx}(a, b) < 0$, entonces $f(a, b)$ es un **máximo relativo**.
iii) Si $D(a, b) < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ **no es un extremo relativo**.
iv) Si $D(a, b) = 0$, entonces la prueba **no es concluyente**.

Repase la sección 4.7 para la relación entre la segunda derivada y la concavidad.

Si usted se siente cómodo al trabajar con determinantes, la función $D(x, y)$ puede escribirse como

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{xy}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix}.$$

EJEMPLO 2 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

Determine los extremos de $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 - 2xy - 10y - 2x$.

Solución Las primeras derivadas parciales son

$$f_x(x, y) = 8x - 2y - 2 \qquad \text{y} \qquad f_y(x, y) = 4y - 2x - 10.$$

Al resolver las ecuaciones simultáneas

$$8x - 2y = 2 \qquad \text{y} \qquad -2x + 4y = 10$$

obtenemos un punto crítico $(1, 3)$. En este caso,

$$f_{xx}(x, y) = 8, \quad f_{yy}(x, y) = 4, \quad f_{xy}(x, y) = -2$$

y por ello $D(x, y) = (8)(4) - (-2)^2 = 28$. Debido a $D(1, 3) > 0$ y $f_{xx}(1, 3) > 0$, se deduce de la parte *i)* del teorema 13.8.2 que $f(1, 3) = -16$ es un mínimo relativo. ■

EJEMPLO 3 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

La gráfica de $f(x, y) = y^2 - x^2$ es el paraboloide hiperbólico dado en la FIGURA 13.8.3. De $f_x(x, y) = -2x$ y $f_y(x, y) = 2y$ vemos que (0, 0) es un punto crítico y que $f(0, 0) = 0$ es el único extremo posible de la función. Sin embargo, antes de usar la prueba de las segundas derivadas parciales, observe que

$$f(0, y) = y^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad f(x, 0) = -x^2 \leq 0$$

indica que en una vecindad de (0, 0), los puntos a lo largo del eje y corresponden a valores de la función que son *mayores* o iguales a $f(0, 0) = 0$ y los puntos a lo largo del eje x corresponden a valores de la función que son *menores* o iguales a $f(0, 0) = 0$. Por consiguiente, podemos afirmar que $f(0, 0) = 0$ no es un extremo.

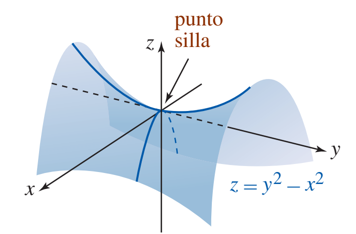


FIGURA 13.8.3 Paraboloide hiperbólico del ejemplo 3

La conclusión anterior es consistente con los resultados de la prueba de las segundas derivadas parciales. De $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = 2$, $f_{xy}(x, y) = 0$ vemos que en el punto crítico (0, 0),

$$\begin{aligned} D(0, 0) &= f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - [f_{xy}(0, 0)]^2 \\ &= (-2)(2) - (0)^2 = -4 < 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente, concluimos del inciso *iii*) del teorema 13.8.2 que $f(0, 0) = 0$ no es un extremo relativo. ■

El punto (0, 0) en el ejemplo 3 se dice que es un **punto silla** de la función. En general, el punto crítico (a, b) en el caso *iii*) del teorema 13.8.2 es un punto silla. Si $D(a, b) < 0$ para un punto crítico (a, b), entonces la gráfica de la función f se comporta esencialmente como el paraboloide hiperbólico en forma de silla de montar en la vecindad de (a, b).

EJEMPLO 4 Punto silla

Encuentre los extremos para $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2 - 14x + 4y + 10$.

Solución Las primeras derivadas parciales son $f_x(x, y) = 4y - 2x - 14$ y $f_y(x, y) = 4x - 2y + 4$. Encontramos entonces que la única solución del sistema

$$4y - 2x - 14 = 0 \qquad \text{y} \qquad 4x - 2y + 4 = 0$$

es $x = 1$ y $y = 4$; esto es, (1, 4) es un punto crítico. En este caso, $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -2$ y $f_{xy}(x, y) = 4$ muestra que

$$D(1, 4) = (-2)(-2) - (4)^2 < 0$$

y por ello $f(1, 4)$ no es un extremo debido a que (1, 4) es un punto silla. La gráfica de f generada por computadora de la FIGURA 13.8.4 sugiere la característica de la forma de paraboloide hiperbólico en una proximidad cercana a (1, 4). ■

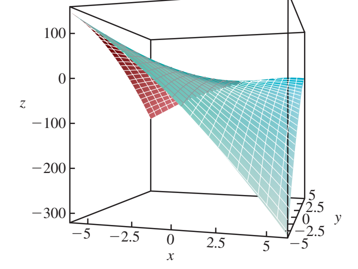


FIGURA 13.8.4 Gráfica de la función del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Empleo de la prueba de las segundas derivadas parciales

Encuentre los extremos de $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$.

Solución De las primeras derivadas parciales

$$f_x(x, y) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1), \qquad f_y(x, y) = 3y^2 - 6y = 3y(y - 2)$$

y las ecuaciones

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \qquad \text{y} \qquad y(y - 2) = 0$$

encontramos que hay cuatro puntos críticos: (3, 0), (3, 2), (−1, 0), (−1, 2). Puesto que

$$f_{xx} = 6x - 6, \quad f_{yy} = 6y - 6, \quad f_{xy} = 0$$

se deduce que $D(x, y) = 36(x - 1)(y - 1)$. La prueba de las segundas derivadas parciales se resume en la siguiente tabla.

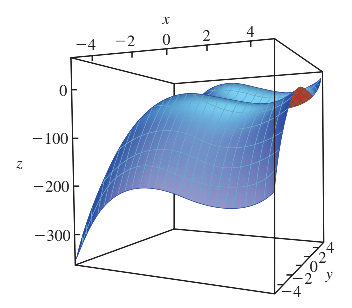


FIGURA 13.8.5 Gráfica de la función del ejemplo 5

Punto crítico (a, b)	$D(a, b)$	$f_{xx}(a, b)$	$f(a, b)$	Conclusión
$(3, 0)$	negativo	positivo	-27	no extremo
$(3, 2)$	positivo	positivo	-31	mín. relativo
$(-1, 0)$	positivo	negativo	5	máx. relativo
$(-1, 2)$	negativo	negativo	1	no extremo

Un estudio de la gráfica de f de la FIGURA 13.8.5 muestra claramente el máximo y el mínimo. ■

Extremos en conjuntos acotados cerrados Recuerde que el teorema del valor extremo para una función f de una variable x (teorema 4.3.1) establece que si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f posee siempre un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo. También vimos que estos extremos absolutos sobre $[a, b]$ ocurren en un punto extremo del intervalo o en un número crítico c en el intervalo abierto (a, b). A continuación se presenta el **teorema del valor extremo** para una función f de dos variables x y y que es continua sobre un conjunto R cerrado y acotado en el plano xy.

Teorema 13.8.3 Teorema del valor extremo

Una función f de dos variables x y y que es continua sobre un conjunto R cerrado y acotado tiene siempre un **máximo absoluto** y un **mínimo absoluto** sobre R.

En otras palabras, cuando $x = f(x, y)$ es continua sobre R, hay números $f(x_1, y_1)$ y $f(x_2, y_2)$ tales que $f(x_1, y_1) \leq f(x, z) \leq f(x_2, y_2)$ para todo (x, y) en R. Los valores $f(x_1, y_1)$ y $f(x_2, y_2)$ son, respectivamente, el máximo y mínimo absolutos sobre el conjunto cerrado R.

Análogo a los extremos de puntos extremos, una función de dos variables puede tener **extremos frontera**; esto es, extremos sobre la frontera del conjunto cerrado.

Guías para encontrar los extremos sobre un conjunto R cerrado y acotado

i) Encuentre el valor de f en los puntos críticos de f en R.
ii) Encuentre todos los valores extremos de f sobre la frontera de R.

El valor más grande de la función en la lista de valores obtenidos de los pasos *i*) y *ii*) es el máximo absoluto de f sobre R; el valor más pequeño de la función de esta lista es el mínimo absoluto de f sobre R.

EJEMPLO 6 Determinación de extremos absolutos

Puesto que $f(x, y) = 6x^2 - 8x + 2y^2 - 5$ es una función polinomial, ésta es continua sobre un conjunto cerrado R definido por $x^2 + y^2 \leq 1$. Encuentre sus extremos absolutos sobre R.

Recuerde que R recibe el nombre de *disco cerrado*.

Solución Encontramos primero cualesquiera puntos críticos de f en el interior de R. De $f_x(x, y) = 12x - 8$ y $f_y(x, y) = 4y$, así como de

$$12x - 8 = 0, \qquad 4y = 0$$

obtenemos el punto crítico $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Como $\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 0^2 < 1$, el punto está en el interior de R.

Con el fin de examinar f en la frontera de la región, representamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ por medio de ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Entonces, sobre la frontera podemos escribir f como una función de una sola variable t:

$$F(t) = f(\cos t, \operatorname{sen} t) = 6\cos^2 t - 8\cos t + 2\operatorname{sen}^2 t - 5.$$

Procedemos ahora como en la sección 4.3. Al diferenciar F con respecto a t y simplificar, obtenemos

$$F'(t) = 8 \text{ sen } t(-\cos t + 1).$$

Por consiguiente, $F'(t) = 0$ implica que sen $t = 0$ o cos $t = 1$. A partir de estas ecuaciones encontramos que el único número crítico de F en el intervalo abierto $(0, 2\pi)$ es $t = \pi$. En este número $x = \cos \pi = -1$, $y = \text{sen } \pi = 0$ de manera que el punto correspondiente en R es $(-1, 0)$. Los puntos extremos del intervalo del parámetro $[0, 2\pi]$, $t = 0$ y $t = 2\pi$, corresponden ambos al punto $(1, 0)$ en R. De los valores de la función

$$f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}, \qquad f(-1, 0) = 9, \qquad f(1, 0) = -7$$

vemos que el máximo absoluto de f sobre R es $f(-1, 0) = 9$ y el mínimo absoluto es $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}$. ■

En el ejemplo 6, podemos entender lo que está sucediendo al completar el cuadrado en x y reescribir la función f como

$$f(x, y) = 6\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + 2(y - 0)^2 - \frac{23}{3}. \tag{2}$$

A partir de (2) es evidente que el "vértice" del paraboloide corresponde al punto interior $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ del disco cerrado definido por $x^2 + y^2 \leq 1$ y que $f\left(\frac{2}{3}, 0\right) = -\frac{23}{3}$. La FIGURA 13.8.6*a*) muestra una perspectiva de la gráfica de f; en la figura 13.8.6*b*) hemos superpuesto las gráficas de $z = 6x^2 - 8x + 2y^2 - 5$ y el cilindro definido por $x^2 + y^2 = 1$ sobre los mismos ejes de coordenadas. En la parte *b*) de la figura, el extremo de la frontera $f(-1, 0) = 9$ se marca mediante el punto rojo.

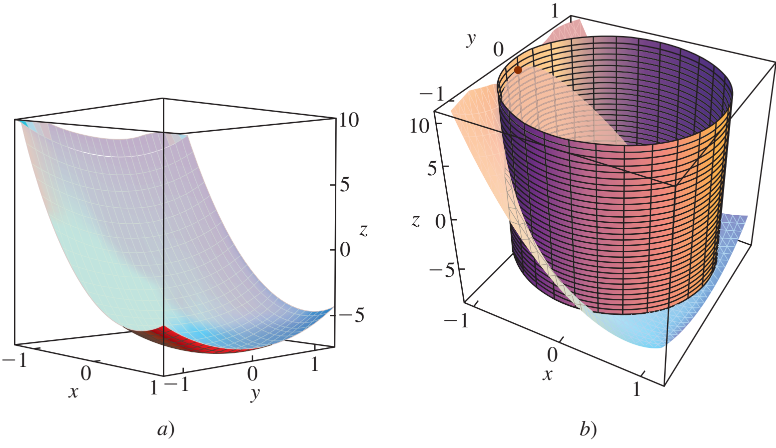


FIGURA 13.8.6 Gráfica de la función en *a*); intersección del cilindro y la superficie en *b*)

$\frac{\partial z}{\partial x}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) La prueba de las segundas derivadas parciales tiene un caso inclusivo al igual que la prueba de la segunda derivada. Recuerde que si c es un número crítico de una función $y = f(x)$, entonces la parte *iii*) del teorema 4.7.3 nos lleva a utilizar la prueba de la primera derivada cuando $f''(c) = 0$. Desafortunadamente, para funciones de dos variables no hay una prueba conveniente de la primera derivada a la cual recurrir cuando (a, b) es un punto crítico para el cual $D(a, b) = 0$.

ii) El método de solución para el sistema

$$f_x(x, y) = 0, \qquad f_y(x, y) = 0$$

no siempre será obvio, en especial cuando f_x y f_y no son lineales. No dude en ejercitar sus habilidades algebraicas en los problemas que siguen.

Ejercicios 13.8 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-42.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-20, encuentre los extremos relativos de la función indicada.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 + 5$
2. $f(x, y) = 4x^2 + 8y^2$
3. $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 8x + 6y$
4. $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y$
5. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 20x - 10y + 40$
6. $f(x, y) = -4x^2 - 2y^2 - 8x + 12y + 5$
7. $f(x, y) = 4x^3 + y^3 - 12x - 3y$
8. $f(x, y) = -x^3 + 2y^3 + 27x - 24y + 3$
9. $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x - 2y + 2$
10. $f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 + 5xy - 10x - 5y + 18$
11. $f(x, y) = (2x - 5)(y - 4)$
12. $f(x, y) = (x + 5)(2y + 6)$
13. $f(x, y) = -2x^3 - 2y^3 + 6xy + 10$
14. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 27$
15. $f(x, y) = xy - \dfrac{2}{x} - \dfrac{4}{y} + 8$
16. $f(x, y) = -3x^2y - 3xy^2 + 36xy$
17. $f(x, y) = xe^x \operatorname{sen} y$
18. $f(x, y) = e^{y^2-3y+x^2+4x}$
19. $f(x, y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$
20. $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$
21. Determine tres números positivos cuya suma sea 21, tal que su producto P sea un máximo. [*Sugerencia*: Exprese P como una función de sólo dos variables.]
22. Determine las dimensiones de una caja rectangular con un volumen de 1 pie^3 que tiene un área superficial mínima S.
23. Encuentre el punto sobre el plano $x + 2y + z = 1$ más cercano al origen. [*Sugerencia*: Considere el cuadrado de la distancia.]
24. Encuentre la distancia mínima entre el punto (2, 3, 1) y el plano $x + y + z = 1$.
25. Encuentre todos los puntos sobre la superficie $xyz = 8$ que son los más cercanos al origen. Determine la distancia mínima.
26. Encuentre la distancia más corta entre las rectas cuyas ecuaciones paramétricas son
$$L_1: x = t, y = 4 - 2t, z = 1 + t,$$
$$L_2: x = 3 + 2s, y = 6 + 2s, z = 8 - 2s.$$
¿En qué puntos sobre las rectas ocurre el mínimo?
27. Determine el volumen máximo de una caja rectangular con lados paralelos a los planos de coordenadas que puede ser inscrito en el elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0.$$
28. El volumen de un elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, b > 0, c > 0$$
es $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Muestre que el elipsoide de mayor volumen que satisface $a + b + c =$ constante es una esfera.
29. El pentágono que se muestra en la FIGURA 13.8.7, formado por un triángulo isósceles sobrepuesto sobre un rectángulo, tiene un perímetro fijo P. Calcule x, y y θ de manera que el área del pentágono sea un máximo.

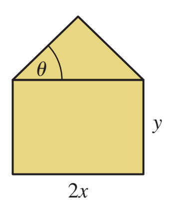


FIGURA 13.8.7 Pentágono del problema 29

30. Un pedazo de latón de 24 pulg de ancho se dobla de manera tal que su sección transversal es un trapezoide isósceles. Vea la FIGURA 13.8.8. Calcule x y θ de manera que el área de la sección transversal sea un máximo. ¿Cuál es el área máxima?

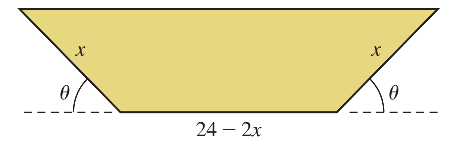


FIGURA 13.8.8 Sección transversal trapezoidal del problema 30

En los problemas 31-34, muestre que la función dada tiene un extremo absoluto pero que el teorema 13.8.2 no es aplicable.

31. $f(x, y) = 16 - x^{2/3} - y^{2/3}$
32. $f(x, y) = 1 - x^4y^2$
33. $f(x, y) = 5x^2 + y^4 - 8$
34. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

En los problemas 35-38, encuentre los extremos absolutos de la función continua dada sobre la región cerrada R definida por $x^2 + y^2 \leq 1$.

35. $f(x, y) = x + \sqrt{3}y$
36. $f(x, y) = xy$
37. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$
38. $f(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 4y + 1$
39. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = 4x - 6y$ sobre la región cerrada R definida por $\frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1$.
40. Encuentre los extremos absolutos de $f(x, y) = xy - 2x - y + 6$ sobre la región triangular cerrada R con vértices (0, 0), (0, 8) y (4, 0).
41. La función $f(x, y) = \operatorname{sen} xy$ es continua sobre la región rectangular cerrada R definida por $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$.
    a) Encuentre los puntos críticos en la región.
    b) Determine los puntos donde f tiene un extremo absoluto.
    c) Grafique la función sobre la región rectangular.

≡ Aplicaciones

42. Una función de ingresos es

$$R(x, y) = x(100 - 6x) + y(192 - 4y),$$

donde x y y denotan el número de artículos de dos mercancías vendidas. Dado que la función de costo correspondiente es

$$C(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 4xy - 8x + 20$$

encuentre la ganancia máxima, donde ganancia = ingresos − costo.

43. Se va a construir una caja rectangular cerrada de modo tal que su volumen corresponda a 60 pies^3. El costo del material para la parte superior y el fondo son, respectivamente, de 10 centavos por pie cuadrado y 20 centavos por pie cuadrado. El costo de los lados es de 2 centavos por pie cuadrado. Determine la función de costo $C(x, y)$, donde x y y son la longitud y el ancho de la caja, respectivamente. Calcule las dimensiones de la caja que producirán un costo mínimo.

13.9 Método de mínimos cuadrados

Introducción Al efectuar experimentos, con frecuencia tabulamos datos en la forma de pares ordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, con cada x_i distinta. Dados los datos, muchas veces resulta deseable poder extrapolar o predecir y a partir de x encontrando un modelo matemático, esto es, una función que aproxime o "ajuste" los datos. En otras palabras, deseamos una función $f(x)$ tal que

$$f(x_1) \approx y_1, \quad f(x_2) \approx y_2 \quad , \ldots, \quad f(x_n) \approx y_n.$$

Naturalmente, no queremos sólo cualquier función sino una que ajuste los datos lo más cercanamente posible. En la discusión que sigue confinaremos nuestra atención al problema de encontrar un polinomio lineal $f(x) = mx + b$ o una recta que "mejor se ajuste" a los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. El procedimiento para determinar la función lineal se conoce como el **método de mínimos cuadrados**.

EJEMPLO 1 Ajuste de los datos en una recta

Considere los datos (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5) que se muestran en la FIGURA 13.9.1*a*). Analizando la figura 13.9.1*b*) y observando que la recta $y = x + 1$ pasa por dos de los puntos dato, podríamos tomar esta recta como aquella que mejor ajusta los datos.

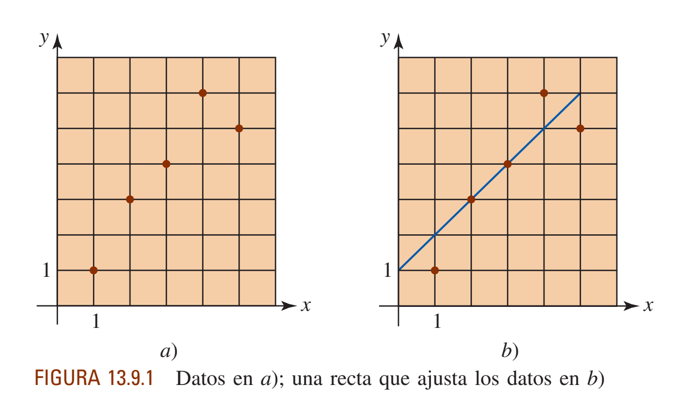


FIGURA 13.9.1 Datos en *a*); una recta que ajusta los datos en *b*) ■

Es evidente que necesitamos algo mejor que una adivinanza visual para determinar la función lineal $y = f(x)$ que de la del ejemplo 1. Requerimos un criterio que defina el concepto de "mejor ajuste" o, como algunas veces se denomina, la "bondad del ajuste".

Si tratamos de relacionar los puntos dato con la función $f(x) = mx + b$, entonces deseamos encontrar m y b que satisfagan el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_1 &= mx_1 + b \\ y_2 &= mx_2 + b \\ &\vdots \\ y_n &= mx_n + b. \end{aligned} \tag{1}$$

Desafortunadamente, (1) es un *sistema sobredeterminado*; esto es, el número de ecuaciones es mayor que el número de incógnitas. No esperamos que un sistema de este tipo tenga una solución a menos, desde luego, que todos los puntos dato se encuentren en su totalidad sobre la misma recta.

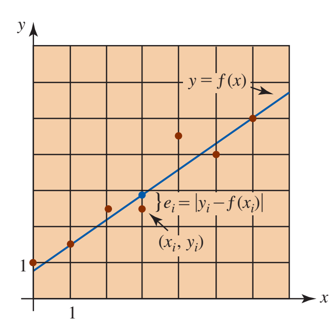


FIGURA 13.9.2 Error en la aproximación de y_i mediante $f(x_i)$

Recta de mínimos cuadrados Si los puntos dato son $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, entonces una manera de determinar qué tan bien la función lineal $f(x) = mx + b$ ajusta los datos consiste en medir las distancias verticales entre los puntos y la gráfica de f:

$$e_i = |y_i - f(x_i)|, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Podemos considerar a cada e_i como el error al aproximar el valor dato y_i por el valor de la función $f(x_i)$. Vea la FIGURA 13.9.2. De manera intuitiva, la función f ajustará mejor los datos si la suma de todas las e_i es un mínimo. En realidad, un enfoque más conveniente al problema es encontrar una función lineal f de manera que la *suma de los cuadrados* de todas las e_i sea un mínimo. Definimos la solución del sistema (1) como aquellos coeficientes m y b que minimizan la expresión

$$\begin{aligned} E &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2 \\ &= [y_1 - (mx_1 + b)]^2 + [y_2 - (mx_2 + b)]^2 + \cdots + [y_n - (mx_n + b)]^2 \end{aligned}$$

o

$$E = \sum_{i=1}^{n} [y_i - mx_i - b]^2. \tag{2}$$

La expresión E se denomina la **suma de los errores cuadráticos**. La recta $y = mx + b$ que minimiza la suma de los errores cuadráticos (2) se define como la **recta de mejor ajuste** y recibe el nombre de **recta de mínimos cuadrados** o **recta de regresión** para los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$.

El problema queda ahora de la siguiente manera: ¿cómo determinamos m y b para que (2) sea un mínimo? La respuesta puede encontrarse a partir de la prueba de las segundas parciales, teorema 13.8.2.

Si consideramos a (2) como una función de dos variables m y b, entonces para encontrar el valor mínimo de E igualamos las primeras derivadas parciales a cero:

$$\frac{\partial E}{\partial m} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0.$$

Las últimas dos condiciones producen a su vez

$$\begin{aligned} -2\sum_{i=1}^{n} x_i[y_i - mx_i - b] &= 0 \\ -2\sum_{i=1}^{n} [y_i - mx_i - b] &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Desarrollando estas sumas y utilizando $\sum_{i=1}^{n} b = nb$, encontramos que el sistema (3) es el mismo que

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)m + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b &= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)m + nb &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned} \tag{4}$$

Aunque hemos omitido detalles, los valores de m y b que satisfacen el sistema (4) producen el valor mínimo de E. La solución del sistema (4) produce

$$m = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \qquad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}. \tag{5}$$

EJEMPLO 2 Recta de mínimos cuadrados

Encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos del ejemplo 1. Calcule la suma de los errores cuadráticos E para esta recta y la recta $y = x + 1$.

Solución De acuerdo con los datos (1, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 5) identificamos $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$, $x_5 = 5$, $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 4$, $y_4 = 6$ y $y_5 = 5$. Con estos valores y $n = 5$, tenemos

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 68, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i = 15, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 19, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55.$$

La sustitución de estos valores en las fórmulas (5) produce $m = 1.1$ y $b = 0.5$. Entonces, la recta de mínimos cuadrados es $y = 1.1x + 0.5$. Para esta recta la suma de los errores cuadráticos es

$$E = [1 - f(1)]^2 + [3 - f(2)]^2 + [4 - f(3)]^2 + [6 - f(4)]^2 + [5 - f(5)]^2$$
$$= [1 - 1.6]^2 + [3 - 2.7]^2 + [4 - 3.8]^2 + [6 - 4.9]^2 + [5 - 6]^2 = 2.7.$$

Para la recta $y = x + 1$ que estimamos en el ejemplo 1 y que pasa también por dos de los puntos dato, encontramos que la suma de los errores cuadráticos es $E = 3.0$.

Con fines comparativos, la FIGURA 13.9.3 muestra los datos, la recta $y = x + 1$, y la recta de mínimos cuadrados $y = 1.1x + 0.5$. ■

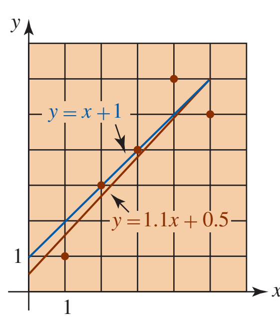


FIGURA 13.9.3 Recta de mínimos cuadrados (roja) del ejemplo 2

Podemos generalizar la técnica de mínimos cuadrados. Por ejemplo, podría interesarnos ajustar los datos dados a un polinomio cuadrático $f(x) = ax^2 + bx + c$ en vez de a un polinomio lineal.

Ejercicios 13.9 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-43.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-6, encuentre la recta de mínimos cuadrados para los datos que se indican.

1. (2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2)
2. (0, −1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)
3. (1, 1), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)
4. (0, 0), (2, 1.5), (3, 3), (4, 4.5), (5, 5)
5. (0, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 5), (4, 9), (5, 8), (6, 10)
6. (1, 2), (2, 2.5), (3, 1), (4, 1.5), (5, 2), (6, 3.2), (7, 5)

☰ Aplicaciones

7. En un experimento se encontró la correspondencia dada en la tabla para la temperatura T (en °C) y la viscosidad cinemática ν (en centistokes) de un aceite con cierto aditivo. Encuentre la recta de mínimos cuadrados $\nu = mT + b$. Utilícela para estimar la viscosidad del aceite en $T = 140$ y $T = 160$.

T	20	40	60	80	100	120
ν	220	200	180	170	150	135

8. En un experimento se encontró la correspondencia que se da en la tabla entre la temperatura T (en °C) y la resistencia eléctrica R (en miliohms). Determine la recta de mínimos cuadrados $R = mT + b$. Emplee esta recta para estimar la resistencia en $T = 700$.

T	400	450	500	550	600	650
R	0.47	0.90	2.0	3.7	7.5	15

☰ Problemas con calculadora/SAC

9. *a*) Un conjunto de puntos dato puede aproximarse mediante un *polinomio* de mínimos cuadrados de grado n. Aprenda la sintaxis del SAC que tenga a mano para obtener una recta de mínimos cuadrados (polinomio lineal), una cuadrática de mínimos cuadrados y una cúbica de mínimos cuadrados para ajustar los datos

   (−5.5, 0.8), (−3.3, 2.5), (−1.2, 3.8),
   (0.7, 5.2), (2.5, 5.6), (3.8, 6.5).

   b) Emplee un SAC para superponer las gráficas de los datos y la recta de mínimos cuadrados obtenida en el inciso *a*) sobre los mismos ejes de coordenadas. Repita para las gráficas de los datos y la cuadrática de mínimos cuadrados, y luego los datos y la cúbica de mínimos cuadrados.

10. Emplee los datos del censo de Estados Unidos (en millones) desde el año 1900 hasta el 2000

1900	1920	1940	1960	1980	2000
75.994575	105.710620	131.669275	179.321750	226.545805	281.421906

y una recta de mínimos cuadrados para predecir la población en ese país en el año 2020.

13.10 Multiplicadores de Lagrange

Introducción En los problemas 21-30 de los ejercicios 13.8 se le pidió encontrar el máximo o mínimo de una función sujeta a una condición o restricción secundaria dada. La condición secundaria se utilizó para eliminar una de las variables en la función de manera que fuera aplicable la prueba de las segundas derivadas parciales (teorema 13.8.2). En la presente discusión examinamos otro procedimiento para determinar lo que se denomina **extremos con restricciones** de una función.

Antes de definir ese concepto, vamos a considerar un ejemplo.

EJEMPLO 1 Extremos con restricciones

Determine geométricamente si la función $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ tiene un extremo cuando las variables x y y están restringidas por $x + y = 3$.

Solución Como advertimos en la FIGURA 13.10.1, la gráfica de $x + y = 3$ es un plano vertical que interseca el paraboloide dado por $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$. Es claro, de acuerdo con la figura, que la función tiene un *máximo con restricciones* para algunas x_1 y y_1 que satisfacen $0 < x_1 < 3$, $0 < y_1 < 3$ y $x_1 + y_1 = 3$. La tabla de valores numéricos que acompaña la figura también indicaría que este nuevo máximo es $f(1.5, 1.5) = 4.5$. Advierta que no podemos utilizar números como $x = 1.7$ y $y = 2.4$, ya que estos valores no satisfacen la restricción $x + y = 3$.

x	y	$f(x, y)$
0.5	2.5	2.5
1	2	4
1.25	1.75	4.375
1.5	1.5	4.5
1.75	1.25	4.375
2	1	4
2.5	0.5	2.5
3	0	0

FIGURA 13.10.1 Gráfica de la función y la restricción del ejemplo 1 ■

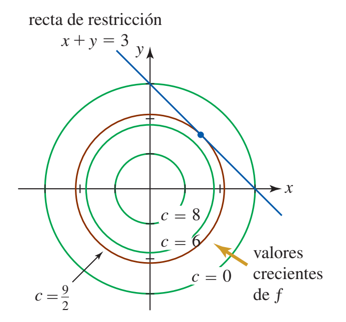


FIGURA 13.10.2 Curvas de nivel y recta de restricción

De manera alterna, podemos analizar el ejemplo 1 por medio de curvas de nivel. Como se ilustra en la FIGURA 13.10.2, valores de función crecientes de f corresponden a valores crecientes de c en las curvas de nivel $9 - x^2 - y^2 = c$. El máximo valor de f (esto es, c) sujeto a la restricción ocurre donde la curva de nivel correspondiente a $c = \frac{9}{2}$ interseca, o más precisamente es tangente a, la recta $x + y = 3$. Al resolver simultáneamente $x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$ y $x + y = 3$ encontramos que el punto de tangencia es $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Funciones de dos variables Para generalizar la discusión anterior, suponga que deseamos:

- Encontrar los extremos de una función $z = f(x, y)$ sujeta a una restricción dada por $g(x, y) = 0$.

Parece plausible de la FIGURA 13.10.3 que para encontrar, digamos, un máximo con restricciones de f, sólo necesitamos encontrar la curva de nivel más alta $f(x, y) = c$ que es tangente a la gráfica de la ecuación de restricción $g(x, y) = 0$. En este caso, recuerde que los gradientes ∇f y ∇g son perpendiculares a las curvas $f(x, y) = c$ y $g(x, y) = 0$, respectivamente. Por consiguiente, si $\nabla g \neq \mathbf{0}$ en un punto P de tangencia de las curvas, entonces ∇f y ∇g son paralelos a P; esto es, yacen a lo largo de una normal común. Por tanto, para algún escalar λ (la letra griega lambda minúscula) distinto de cero, debemos tener $\nabla f = \lambda \nabla g$. Enunciamos este resultado de manera formal.

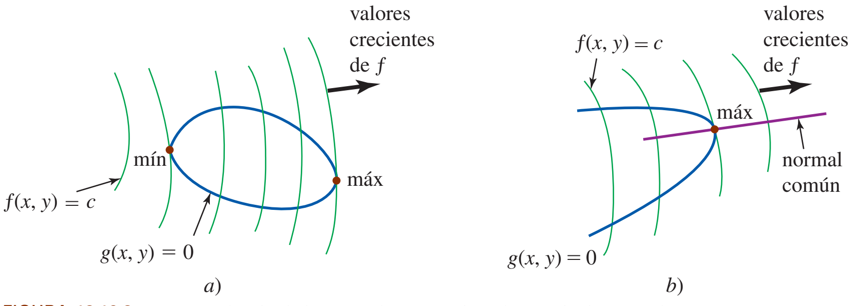


FIGURA 13.10.3 Curvas de nivel de f (verde); ecuación de restricción (azul)

Teorema 13.10.1 Teorema de Lagrange

Suponga que la función $z = f(x, y)$ tiene un extremo en el punto (x_0, y_0) sobre la gráfica de la ecuación restricción $g(x, y) = 0$. Si f y g tienen primeras derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene la gráfica de la ecuación de restricción y $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$.

Método de multiplicadores de Lagrange El número real λ para el cual $\nabla f = \lambda \nabla g$ recibe el nombre de **multiplicador de Lagrange**. Después de igualar componentes, la ecuación $\nabla f = \lambda \nabla g$ es equivalente a

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x_0, y_0), \qquad f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y).$$

Si f tiene un extremo con restricciones en el punto (x_0, y_0), entonces acabamos de ver que hay un número λ tal que

$$\begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= \lambda g_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) &= \lambda g_y(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Las ecuaciones en (1) sugieren el siguiente procedimiento, conocido como **método de los multiplicadores de Lagrange**, para determinar los extremos con restricciones.

Guías para el método de los multiplicadores de Lagrange

i) Para encontrar los extremos de $z = f(x, y)$ sujetos a la restricción $g(x, y) = 0$, resuelva el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) &= \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

ii) Entre las soluciones (x, y, λ) del sistema (2) estarán los puntos (x_i, y_i), donde f tiene un extremo. Cuando f tiene un máximo (mínimo), éste será el número más grande (o más pequeño) en la lista de los valores de la función $f(x_i, y_i)$.

EJEMPLO 2 Repaso del ejemplo 1

Emplee el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar el máximo de $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$ sujeto a $x + y = 3$.

Solución Con $g(x, y) = x + y - 3$ y $f_x = -2x$, $f_y = -2y$, $g_x = 1$, $g_y = 1$ el sistema en (2) es

$$\begin{aligned} -2x &= \lambda \\ -2y &= \lambda \\ x + y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Al igualar la primera y la segunda ecuaciones obtenemos $-2x = -2y$ o $x = y$. Al sustituir este resultado en la tercera ecuación, se encuentra que $2y - 3 = 0$ o $y = \frac{3}{2}$. Entonces, $x = y = \frac{3}{2}$ y el máximo con restricciones es $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$. ■

EJEMPLO 3 Empleo de los multiplicadores de Lagrange

Determine los extremos $f(x, y) = y^2 - 4x$ sujetos a $x^2 + y^2 = 9$.

Solución Si definimos $g(x, y) = x^2 + y^2 - 9$, entonces $f_x = -4$, $f_y = 2y$, $g_x = 2x$ y $g_y = 2y$. Por tanto, (2) se convierte en

$$\begin{aligned} -4 &= 2x\lambda \\ 2y &= 2y\lambda \\ x^2 + y^2 - 9 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

De la segunda de estas ecuaciones, $y(1 - \lambda) = 0$, vemos que $y = 0$ o $\lambda = 1$. Primero, si $y = 0$, la tercera ecuación en el sistema produce $x^2 = 9$ o $x = \pm 3$. Por consiguiente, $(-3, 0)$ y $(3, 0)$ son soluciones del sistema y son puntos en los cuales f *podría* tener un extremo. Continuando, si $\lambda = 1$, entonces la primera ecuación produce $x = -2$. Al sustituir este valor en $x^2 + y^2 - 9 = 0$ obtenemos $y^2 = 5$ o $y = \pm\sqrt{5}$. Dos o más soluciones del sistema son $\left(-2, -\sqrt{5}\right)$ y $\left(-2, \sqrt{5}\right)$. De la lista de valores de la función

$$f(-3, 0) = 12, \qquad f(3, 0) = -12, \qquad f\left(-2, -\sqrt{5}\right) = 13 \quad \text{y} \quad f\left(-2, \sqrt{5}\right) = 13$$

concluimos que f tiene un mínimo con restricciones de -12 en $(3, 0)$ y un máximo con restricciones de 13 en $\left(-2, -\sqrt{5}\right)$ y en $\left(-2, \sqrt{5}\right)$.

La FIGURA 13.10.4*a*) muestra la gráfica $f(x, y) = y^2 - 4x$ intersecando el cilindro definido por la ecuación de restricción $x^2 + y^2 = 9$. Los cuatro puntos que encontramos al resolver (3) yacen en el plano xy sobre el círculo de radio 3; los tres extremos con restricciones corresponden a los puntos $(3, 0, -12)$, $\left(-2, -\sqrt{5}, 13\right)$ y $\left(-2, \sqrt{5}, 13\right)$ en el espacio tridimensional sobre la curva de intersección de la superficie del cilindro circular. Alternativamente la figura 13.10.4*b*) muestra tres curvas de nivel de $y^2 - 4x = c$. Dos de las curvas de nivel son tangentes al círculo $x^2 + y^2 = 9$.

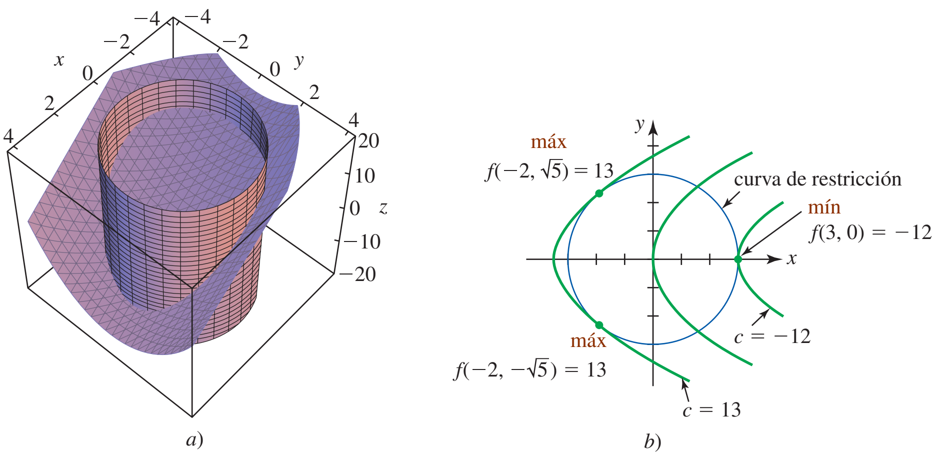


FIGURA 13.10.4 Intersección del cilindro y la superficie en *a*); curvas de nivel de f y ecuación de restricción en *b*) ■

Al aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange, en realidad no estamos interesados en determinar los valores de λ que satisfacen el sistema (2). ¿Notó en el ejemplo 1 que no nos molestamos por encontrar λ? En el ejemplo 3, empleamos el valor $\lambda = 1$ para que nos ayudara a encontrar $x = -2$, pero después lo ignoramos.

EJEMPLO 4 Costo mínimo

Un cilindro circular recto cerrado tendrá un volumen de 1 000 pies^3. La parte superior y el fondo del cilindro se construirán con metal que cuesta 2 dólares por pie cuadrado. El costado se formará con metal que cuesta 2.50 dólares por pie cuadrado. Determine el costo mínimo de fabricación.

Solución La función de costo es

costo del fondo y de la parte superior ↓ costo del costado ↓

$$\begin{aligned} C(r, h) &= 2(2\pi r^2) + 2.5(2\pi rh) \\ &= 4\pi r^2 + 5\pi rh. \end{aligned}$$

En este caso, de la restricción $1\,000 = \pi r^2 h$, podemos identificar $g(r, h) = \pi r^2 h - 1\,000$, y por ello las primeras derivadas parciales son $C_r = 8\pi r + 5\pi h$, $C_h = 5\pi r$, $g_r = 2\pi rh$ y $g_h = \pi r^2$. Debemos resolver entonces el sistema

$$\begin{aligned} 8\pi r + 5\pi h &= 2\pi rh\lambda \\ 5\pi r &= \pi r^2\lambda \\ \pi r^2 h - 1\,000 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Al multiplicar la primera ecuación por r, la segunda por $2h$ y restar, obtenemos

$$8\pi r^2 - 5\pi rh = 0 \qquad \text{o} \qquad \pi r(8r - 5h) = 0.$$

Puesto que $r = 0$ no satisface la ecuación de restricción, tenemos $r = \frac{5}{8}h$. La restricción nos da

$$h^3 = \frac{1\,000 \cdot 64}{25\pi} \qquad \text{o} \qquad h = \frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}.$$

Entonces, $r = 25/\sqrt[3]{25\pi}$ y la única solución de (4) es $\left(25/\sqrt[3]{25\pi}, 40/\sqrt[3]{25}\right)$.

El costo mínimo con restricciones es

$$\begin{aligned} C\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}, \frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}\right) &= 4\pi\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)^2 + 5\pi\left(\frac{25}{\sqrt[3]{25\pi}}\right)\left(\frac{40}{\sqrt[3]{25\pi}}\right) \\ &= 300\sqrt[3]{25\pi} \approx \$1\,284.75. \end{aligned}$$

■

Funciones de tres variables Para encontrar los extremos de una función de tres variables $w = f(x, y, z)$ sujeta a la restricción $g(x, y, z) = 0$, resolvemos un sistema de cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

EJEMPLO 5 Función de tres variables

Determine los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujetos a $2x - 2y - z = 5$.

Solución Con $g(x, y, z) = 2x - 2y - z - 5$, el sistema (5) es

$$\begin{aligned} 2x &= 2\lambda \\ 2y &= -2\lambda \\ 2z &= -\lambda \\ 2x - 2y - z - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Con $\lambda = x = -y = -2z$, la última ecuación produce $x = \frac{10}{9}$ y por ello $y = -\frac{10}{9}$, $z = -\frac{5}{9}$. De tal manera, un extremo con restricciones es $f\left(\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}, -\frac{5}{9}\right) = \frac{225}{81}$. ■

Dos restricciones Con el fin de optimizar una función $w = f(x, y, z)$ sujeta a *dos* restricciones, $g(x, y, z) = 0$ y $h(x, y, z) = 0$, debemos introducir un segundo multiplicador de Lagrange μ (la letra griega minúscula mu) y resolver el sistema

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= \lambda g_x(x, y, z) + \mu h_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) &= \lambda g_y(x, y, z) + \mu h_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) &= \lambda g_z(x, y, z) + \mu h_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) &= 0 \\ h(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

EJEMPLO 6 Dos restricciones

Encuentre el punto sobre la curva C de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ y el plano $x - y + 3z = 6$ que está más alejada del plano xy. Luego determine el punto sobre C que está más cercano al plano xy.

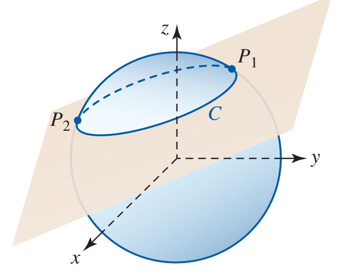


FIGURA 13.10.5 Intersección de una esfera y un plano en el ejemplo 6

Solución La FIGURA 13.10.5 sugiere que existen dos de tales puntos P_1 y P_2 con coordenadas z no negativas. La función f para la cual deseamos encontrar un máximo y un mínimo es simplemente la distancia desde cada uno de estos puntos al plano xy, esto es, $f(x, y, z) = z$.

Si tomamos $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ y $h(x, y, z) = x - y + 3z - 6$, entonces el sistema (6) es

$$\begin{aligned} 0 &= 2x\lambda + \mu \\ 0 &= 2y\lambda - \mu \\ 1 &= 2z\lambda + 3\mu \\ x^2 + y^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ x - y + 3z - 6 &= 0. \end{aligned}$$

Sumamos la primera y la segunda ecuaciones para obtener $2\lambda(y + x) = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces la primera ecuación implica $\mu = 0$, pero la tercera ecuación en el sistema conduce a la contradicción $0 = 1$. Ahora bien, si tomamos $y = -x$, las dos ecuaciones se vuelven

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 + z^2 - 9 &= 0 \\ x + x + 3z - 6 &= 0 \end{aligned} \qquad \text{o} \qquad \begin{aligned} 2x^2 + z^2 &= 9 \\ 2x + 3z &= 6. \end{aligned}$$

Al resolver el último sistema, obtenemos

$$x = \frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, \quad z = \frac{18}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{14}$$

y

$$x = \frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, \quad z = \frac{18}{11} + \frac{3}{11}\sqrt{14}.$$

Entonces, los puntos en C que están más alejado y más cercano al plano xy son, respectivamente,

$$P_1\left(\frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, -\frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, \frac{18}{11} + \frac{3}{11}\sqrt{14}\right)$$

y

$$P_2\left(\frac{6}{11} + \frac{9}{22}\sqrt{14}, -\frac{6}{11} - \frac{9}{22}\sqrt{14}, \frac{18}{11} - \frac{3}{11}\sqrt{14}\right).$$

Las coordenadas aproximadas de P_1 y P_2 son $(-0.99, 0.99, 2.66)$ y $(2.08, -2.08, 0.62)$. ■

Posdata: Un poco de historia **Joseph Louis Lagrange** nació en 1736 como Guiseppe Lodovico Lagrangia en Turín, en el reino de Sardinia, y murió en París en 1813. Lagrange fue el último de los once hijos de su madre y el único que vivió más allá de la infancia. En su adolescencia ya era profesor en la Escuela Real de Artillería en Turín. Invitado ahí gracias a los esfuerzos de Euler y D'Alembert, dedicó veinte productivos años en la corte de Federico el Grande, hasta la posterior muerte de éste en 1786. Luego, Luis XVI lo instaló en el Louvre, donde se dice que fue el favorito de María Antonieta. Deploró los excesos de la Revolución francesa, aunque ayudó al nuevo gobierno a establecer el sistema métrico. Fue el primer profesor de la Escuela Politécnica, donde el cálculo y la teoría de números fueron sus especialidades.



Lagrange

$\frac{\partial z}{\partial x}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Advierta que en el ejemplo 5 concluimos con las vagas palabras "un extremo con restricciones es". El método de los multiplicadores de Lagrange no tiene un indicador integrado que señale MÁX o MÍN cuando se encuentra un extremo. Además del procedimiento gráfico analizado al principio de esta sección, otra manera de que usted mismo se convenza respecto a la naturaleza del extremo es compararlo con los valores obtenidos al calcular la función dada en otros puntos que satisfagan la ecuación de restricción. De hecho, de esta manera encontramos que $\frac{225}{81}$ del ejemplo 5 es en realidad un *mínimo* con restricciones de la función f.

Ejercicios 13.10 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-43.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, dibuje las gráficas de las curvas de nivel de la función f dada y la ecuación de restricción que se indica. Determine si f tiene un extremo con restricciones.

1. $f(x, y) = x + 3y$, sujeta a $x^2 + y^2 = 1$

2. $f(x, y) = xy$, sujeta a $\frac{1}{2}x + y = 1, x \geq 0, y \geq 0$

En los problemas 3-20, utilice el método de los multiplicadores de Lagrange para encontrar los extremos con restricciones de la función dada.

3. Problema 1 **4.** Problema 2

5. $f(x, y) = xy$, sujeta a $x^2 + y^2 = 2$

6. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $2x + y = 5$

7. $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 5$, sujeta a $x - y = 1$

8. $f(x, y) = 4x^2 + 2y^2 + 10$, sujeta a $4x^2 + y^2 = 4$

9. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sujeta a $x^4 + y^4 = 1$

10. $f(x, y) = 8x^2 - 8xy + 2y^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 10$

11. $f(x, y) = x^3y$, sujeta a $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

12. $f(x, y) = xy^2$, sujeta a $x^2 + y^2 = 27$

13. $f(x, y, z) = x + 2y + z$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 30$

14. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $x + 2y + 3z = 4$

15. $f(x, y, z) = xyz$, sujeta a $x^2 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{9}z^2 = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$

16. $f(x, y, z) = xyz + 5$, sujeta a $x^3 + y^3 + z^3 = 24$

17. $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$, sujeta a $x + y + z = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$

18. $f(x, y, z) = 4x^2y^2z^2$, sujeta a $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x > 0, y > 0, z > 0$

19. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $2x + y + z = 1$, $-x + 2y - 3z = 4$

20. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, sujeta a $4x + z = 7$, $z^2 = x^2 + y^2$

21. Encuentre el área máxima de un triángulo rectángulo cuyo perímetro es 4.

22. Encuentre las dimensiones de una caja rectangular abierta con volumen máximo si su área superficial es igual a 75 cm^3. ¿Cuáles son las dimensiones si la caja es cerrada?

Aplicaciones

23. A un tanque cilíndrico recto se le superpone una tapa cónica en la forma que se ilustra en la FIGURA 13.10.6. El radio del tanque es de 3 m y su área superficial total corresponde a 81 πm^2. Encuentre las alturas x y y de manera que el volumen del tanque sea un máximo. [*Sugerencia*: El área superficial del cono es $3\pi\sqrt{9 + y^2}$.]

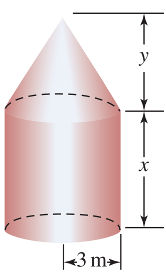


FIGURA 13.10.6 Cilindro con tapa cónica del problema 23

24. En negocios, un índice de utilidad U es una función que produce una medida de la satisfacción obtenida a partir de la compra de cantidades variables, x y y, de dos productos que se venden regularmente. Si $U(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$ es un índice de utilidad, encuentre sus extremos sujetos a $x + 6y = 18$.

25. El **proceso de Haber-Bosch*** produce amoniaco mediante una unión directa de nitrógeno e hidrógeno bajo condiciones de presión P y temperatura constantes:

$$N_2 + 3H_2 \xrightleftharpoons{\text{catalizador}} 2NH_3.$$

Las presiones parciales x, y y z del hidrógeno, nitrógeno y amoniaco satisfacen $x + y + z = P$ y la ley de equilibrio $z^2/xy^3 = k$, donde k es una constante. La cantidad máxima de amoniaco ocurre cuando se obtiene la presión parcial máxima de este mismo. Determine el valor máximo de z.

26. Si una especie de animales tiene n fuentes de alimento, el **índice de amplitud** de su nicho ecológico se define como

$$\frac{1}{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

donde x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, es la fracción de la dieta de los animales que proviene de la i-ésima fuente de alimentos. Por ejemplo, si la dieta de los pájaros consiste en 50% de insectos, 30% de gusanos y 20% de semillas, el índice de amplitud es

$$\frac{1}{(0.50)^2 + (0.30)^2 + (0.20)^2} = \frac{1}{0.25 + 0.09 + 0.04} = \frac{1}{0.38} \approx 2.63.$$

Advierta que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ y $0 \leq x_i \leq 1$ para toda i.

a) Para especies con tres fuentes alimenticias, demuestre que el índice de amplitud se maximiza si $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$.

b) Demuestre que el índice de amplitud con n fuentes se maximiza cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$.

*__Fritz Haber__ (1868-1934) fue un químico alemán. Por el invento de este proceso, Haber obtuvo el premio Nobel de Química en 1918. Carl Bosch, cuñado de Haber e ingeniero químico, fue quien hizo que este proceso fuera práctico a gran escala. Bosch obtuvo el premio Nobel de Química en 1931. Durante la Primera Guerra Mundial el gobierno alemán utilizó el proceso de Haber-Bosch para producir grandes cantidades de fertilizantes y explosivos. Haber fue posteriormente expulsado de Alemania por Adolfo Hitler y murió en el exilio.

Piense en ello

27. Dé una interpretación geométrica de los extremos en el problema 9.

28. Dé una interpretación geométrica de los extremos en el problema 14.

29. Dé una interpretación geométrica del extremo en el problema 19.

30. Dé una interpretación geométrica del extremo en el problema 20.

31. Encuentre el punto $P(x, y)$, $x > 0$, $y > 0$, sobre la superficie $xy^2 = 1$ que es más cercano al origen. Muestre que el segmento de recta del origen a P es perpendicular a la recta tangente en P.

32. Encuentre el valor máximo de $f(x, y, z) = \sqrt[3]{xyz}$ sobre el plano $x + y + z = k$.

33. Utilice el resultado del problema 32 para probar la desigualdad

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3}.$$

34. Encuentre el punto sobre la curva C de intersección del cilindro $x^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + 2z = 4$ que está más alejado del plano xz. Encuentre el punto sobre C que es más cercano al plano xz.

Revisión del capítulo 13

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-43.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-10, responda verdadero (V) o falso (F).

1. Si $\lim_{(x, y) \to (a, b)} f(x, y)$ tiene el mismo valor para un número infinito de aproximaciones (a, b), entonces el límite existe. _____

2. Los dominios de las funciones

$$f(x, y) = \sqrt{\ln(x^2 + y^2 - 16)} \quad \text{y} \quad g(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 16)$$

son los mismos. _____

3. La función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua en (0, 0). _____

4. La función $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^3$ es continua en todas partes. _____

5. Si $\partial z/\partial x = 0$, entonces z = constante. _____

6. Si $\nabla f = \mathbf{0}$, entonces f = constante. _____

7. ∇z es perpendicular a la gráfica de $z = f(x, y)$. _____

8. ∇f apunta en la dirección en la cual f aumenta con mayor rapidez. _____

9. Si f tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces $f_{xy} = f_{yx}$. _____

10. Si $f_x(x, y) = 0$ y $f_y(x, y) = 0$ en (a, b) entonces $f(a, b)$ es un extremo relativo. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. $\lim_{(x, y) \to (1, 1)} \dfrac{3x^2 + xy^2 - 3xy - 2y^3}{5x^2 - y^2} =$ __________.

2. $f(x, y) = \dfrac{xy^2 + 1}{x - y + 1}$ es continua excepto en los puntos __________.

3. Para $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ la curva de nivel que pasa por $(2, -4)$ es __________.

4. Si $p = g(\eta, \xi)$, $q = h(\eta, \xi)$, entonces $\dfrac{\partial}{\partial \xi} T(p, q) =$ __________.

5. Si $r = g(w)$, $s = h(w)$, entonces $\dfrac{d}{dw} F(r, s) =$ __________.

6. Si s es la distancia que un cuerpo demora en caer en el tiempo t, entonces la aceleración de la gravedad g puede obtenerse de $g = 2s/t^2$. Pequeños errores de Δs y Δt en las mediciones de s y t resultarán en un error aproximado en g de __________.

7. La derivada parcial $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x\,\partial z\,\partial y^2}$ en notación de subíndices es __________.

8. La derivada parcial f_{xyy} en notación ∂ es __________.

9. Si $f(x, y) = \displaystyle\int_x^y F(t)\,dt$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ ________ y $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ __________.

10. En (x_0, y_0, z_0) la función $F(x, y, z) = x + y + z$ aumenta más rápidamente en la dirección de __________.

11. Si $F(x, y, z) = f(x, y)g(y)h(z)$, entonces $F_{xyz} =$ __________.

12. Si $z = f(x, y)$ tiene derivadas parciales continuas de cualquier orden, escriba todas las posibles derivadas parciales de cuarto orden. __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-8, calcule la derivada indicada

1. $z = ye^{-x^3y}$; z_y
2. $z = \ln(\cos(uv))$; z_u
3. $f(r, \theta) = \sqrt{r^3 + \theta^2}$; $f_{r\theta}$
4. $f(x, y) = (2x + xy^2)^2$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
5. $z = \cosh(x^2y^3)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$
6. $z = (e^{x^2} + e^{-y^2})^2$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$
7. $F(s, t, v) = s^3t^5v^{-4}$; F_{stv}
8. $w = \dfrac{xy}{z} + \dfrac{xz}{y} + \dfrac{yz}{x}$; $\dfrac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^2\,\partial z}$

En los problemas 9 y 10, encuentre el gradiente de la función dada en el punto que se indica.

9. $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$; $(1, -1)$
10. $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - 3y^3}{z^4}$; $(1, 2, 1)$

En los problemas 11 y 12, determine la derivada direccional de la función dada en la dirección que se indica.

11. $f(x, y) = x^2y - y^2x$; $D_{\mathbf{u}} f$ en la dirección de $2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$
12. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; $D_{\mathbf{u}} f$ en la dirección de $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

En los problemas 13 y 14, dibuje el dominio de la función dada.

13. $f(x, y) = \sqrt{1 - (x + y)^2}$
14. $f(x, y) = \dfrac{1}{\ln(y - x)}$

En los problemas 15 y 16, determine Δz para la función dada.

15. $z = 2xy - y^2$
16. $z = x^2 - 4y^2 + 7x - 9y + 10$

En los problemas 17 y 18, encuentre la diferencial total de la función dada.

17. $z = \dfrac{x - 2y}{4x + 3y}$
18. $A = 2xy + 2yz + 2zx$

19. Determine las ecuaciones simétricas de la recta tangente de $\left(-\sqrt{5}, 1, 3\right)$ para la traza de $z = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ en el plano $x = -\sqrt{5}$.

20. Encuentre la pendiente de la recta tangente en (2, 3, 10) a la curva de intersección de la superficie $z = xy + x^2$ y el plano vertical que pasa por $P(2, 3)$ y $Q(4, 5)$ en la dirección de Q.

21. Considere la función $f(x, y) = x^2y^4$. En (1, 1) ¿cuál es:

a) la tasa de cambio de f en la dirección de $\mathbf{i}$?
b) la tasa de cambio de f en la dirección de $\mathbf{i} - \mathbf{j}$?
c) la tasa de cambio de f en la dirección de $\mathbf{j}$?

22. Sea $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

a) Si $x = 3 \operatorname{sen} 2t$, $y = 4 \cos 2t$, $z = 5t^3$, determine $\dfrac{dw}{dt}$.

b) Si $x = 3 \operatorname{sen}(2t/r)$, $y = 4 \cos(2r/t)$, $z = 5r^3t^3$, encuentre $\dfrac{\partial w}{\partial t}$.

23. Encuentre una ecuación del plano tangente a la gráfica de $z = \operatorname{sen} xy$ en $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

24. Determine si hay algunos puntos sobre la superficie $z^2 + xy - 2x - y^2 = 1$ en los cuales el plano tangente es paralelo a $z = 2$.

25. Encuentre una ecuación del plano tangente al cilindro $x^2 + y^2 = 25$ en $(3, 4, 6)$.

26. ¿En qué punto la derivada direccional de $f(x, y) = x^3 + 3xy + y^3 - 3x^2$ en la dirección de $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ es un mínimo?

27. Calcule las dimensiones de una caja rectangular con volumen máximo que está acotada en el primer octante por los planos de coordenadas y el plano $x + 2y + z = 6$. Vea la FIGURA 13.R.1.

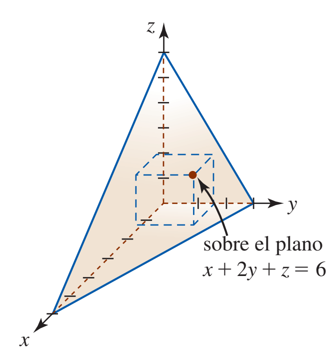


FIGURA 13.R.1 Caja y plano del problema 27

28. Un efecto de la teoría general de la relatividad de Einstein es que un objeto masivo, como una galaxia, puede actuar como una "lente gravitacional"; esto es, si la galaxia está ubicada entre un observador (en la Tierra) y una fuente luminosa (como un cuásar), entonces esa fuente luminosa aparece como un anillo que rodea la galaxia. Si la lente gravitacional es mucho más cercana a la fuente luminosa que al observador, entonces el radio angular θ del anillo (en radianes) se relaciona con la masa M de la lente y su distancia D desde el observador mediante

$$\theta = \left(\frac{GM}{c^2D}\right)^{1/2},$$

donde G es la constante gravitacional y c es la velocidad de la luz. Vea la FIGURA 13.R.2.

a) Resuelva para M en términos de θ y D.

b) Encuentre la diferencial total de M como una función de θ y D.

c) Si el radio angular θ puede medirse con un error no mayor a 2% y la distancia D a la lente puede estimarse con un error no mayor a 10%, ¿cuál es el error porcentual máximo aproximado en el cálculo de la masa M de la lente?

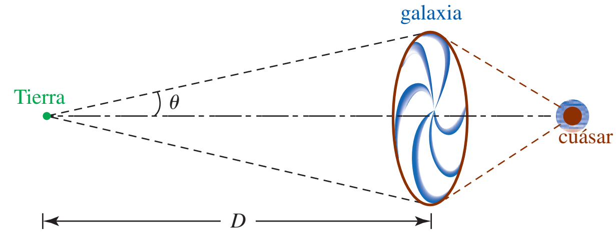


FIGURA 13.R.2 Galaxia del problema 28

29. La velocidad del péndulo cónico que se muestra en la FIGURA 13.R.3 está dada por $v = r\sqrt{g/y}$, donde $g = 980\ \text{cm/s}^2$. Si r disminuye de 20 a 19 cm y y aumenta de 25 a 26 cm, ¿cuál es el cambio aproximado en la velocidad del péndulo?

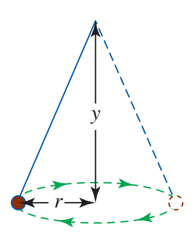


FIGURA 13.R.3 Péndulo cónico del problema 29

30. Encuentre la derivada direccional de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en (3, 4) en la dirección de *a*) $\nabla f(1, -2)$ y *b*) $\nabla f(3, 4)$.

31. Las llamadas temperaturas de estado estable dentro de un círculo de radio R están dadas por la **fórmula de la integral de Poisson**.

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta - \phi) + r^2} f(\phi)\, d\phi.$$

Diferenciando formalmente bajo el signo de la integral, demuestre que U satisface la ecuación diferencial parcial

$$r^2 U_{rr} + rU_r + U_{\theta\theta} = 0.$$

32. La **función de producción Cobb-Douglas** $z = f(x, y)$ se define mediante $z = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, donde A, α y β son constantes. El valor de z recibe el nombre de *salida eficiente* para las entradas x y y. Demuestre que

$$f_x = \frac{\alpha z}{x}, \qquad f_y = \frac{\beta z}{y}, \qquad f_{xx} = \frac{\alpha(\alpha - 1)z}{x^2},$$

$$f_{yy} = \frac{\beta(\beta - 1)z}{y^2} \qquad \text{y} \qquad f_{xy} = f_{yx} = \frac{\alpha\beta z}{xy}.$$

En los problemas 33-36, suponga que $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$. Si las derivadas parciales de orden superior dadas se evalúan en (a, b), determine, si es posible, si $f(a, b)$ es un extremo relativo.

33. $f_{xx} = 4, f_{yy} = 6, f_{xy} = 5$

34. $f_{xx} = 2, f_{yy} = 7, f_{xy} = 0$

35. $f_{xx} = -5, f_{yy} = -9, f_{xy} = 6$

36. $f_{xx} = -2, f_{yy} = -8, f_{xy} = 4$

37. Exprese el área A del triángulo recto como una función de la longitud L de su hipotenusa y uno de sus ángulos agudos θ.

38. En la FIGURA 13.R.4 exprese la altura h de la montaña como una función de los ángulos θ y ϕ.

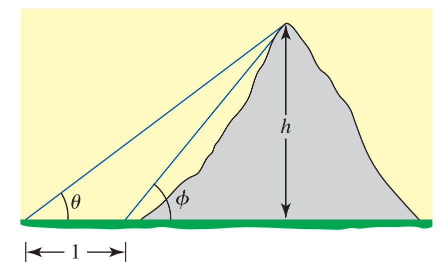


FIGURA 13.R.4 Montaña del problema 38

39. El pasillo de tabique que se muestra en la FIGURA 13.R.5 tiene un ancho uniforme z. Exprese el área A del pasillo en términos de x, y y z.

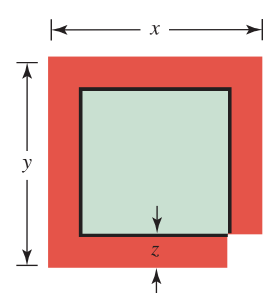


FIGURA 13.R.5 Pasillo del problema 39

40. Una caja abierta hecha de plástico tiene la forma de un paralelepípedo rectangular. Las dimensiones exteriores de la caja se dan en la FIGURA 13.R.6. Si el plástico es de $\frac{1}{2}$ cm de espesor, encuentre el volumen aproximado del plástico.

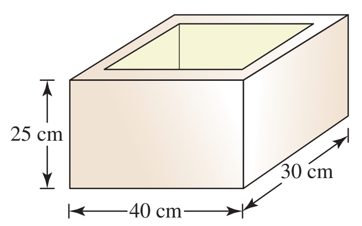


FIGURA 13.R.6 Caja abierta del problema 40

41. Una caja rectangular, que se muestra en la FIGURA 13.R.7, está inscrita en el cono $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \leq z \leq 4$. Exprese el volumen V de la caja en términos de x y y.

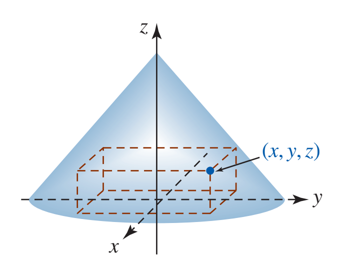


FIGURA 13.R.7 Caja inscrita del problema 41

42. La caja rectangular que se muestra en la FIGURA 13.R.8 tiene una cubierta y 12 compartimentos. La caja está hecha de un plástico pesado que cuesta 1.5 centavos por pulgada cuadrada. Encuentre una función que dé el costo C de construcción de la caja.

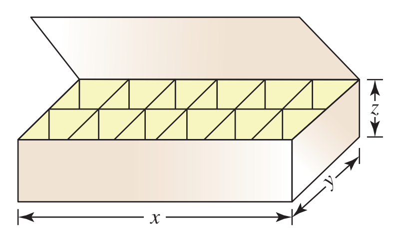
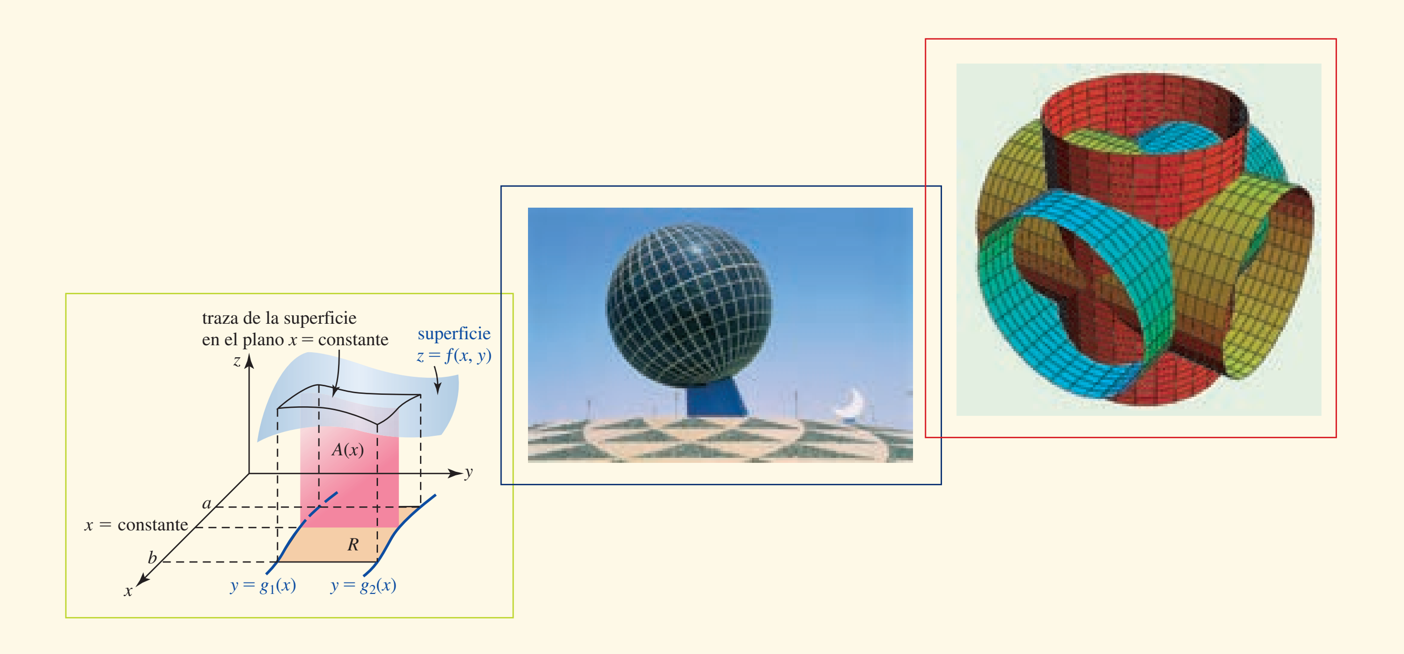


FIGURA 13.R.8 Caja rectangular del problema 42

Capítulo 14

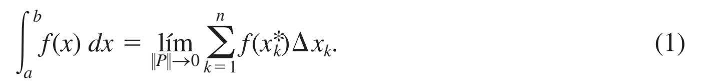
Integrales múltiples



En este capítulo Concluimos nuestro estudio del cálculo de funciones de múltiples variables con las definiciones y aplicaciones de integrales definidas en dos y tres dimensiones. Estas integrales se llaman de modo más común como la **integral doble** y la **integral triple**, respectivamente.

14.1 La integral doble

Introducción Recuerde de la sección 5.4 que la definición de la *integral definida* de una función de una sola variable está dada por el límite de una suma:



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k. \tag{1}$$

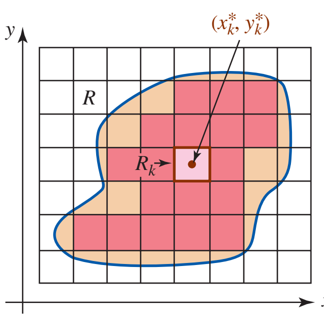
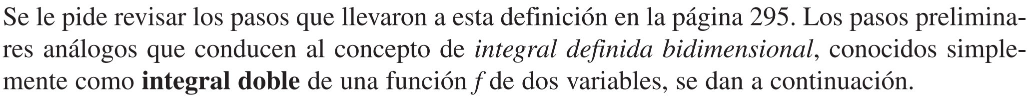


FIGURA 14.1.1 Punto muestra en R_k



Se le pide revisar los pasos que llevaron a esta definición en la página 295. Los pasos preliminares análogos que conducen al concepto de *integral definida bidimensional*, conocidos simplemente como **integral doble** de una función *f* de dos variables, se dan a continuación.

Sea $z = f(x, y)$ una función definida en una región cerrada y acotada R del plano xy. Considere los siguientes cuatro pasos:

- Por medio de una retícula de líneas verticales y horizontales paralelas a los ejes de coordenadas, forme una partición P de R en n subregiones rectangulares R_k de áreas ΔA_k que estén por completo sobre R. Son los rectángulos que se muestran en rojo claro en la FIGURA 14.1.1.
- Sea $\|P\|$ la norma de la partición o la longitud de la diagonal más grande de las n subregiones rectangulares R_k.
- Elija un punto muestra (x_k^*, y_k^*) en cada subregión R_k.
- Forme la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$.

Así, tenemos la siguiente definición.



Definición 14.1.1 La integral doble

Sea f una función de dos variables definida sobre una región cerrada R del plano xy. Entonces la **integral doble de *f* sobre *R***, denotada por $\iint_R f(x, y)\,dA$, se define como

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k. \tag{2}$$

Si el límite en (2) existe, afirmamos que f es **integrable sobre *R*** y que R es la **región de integración**. Para una partición P de R en subregiones R_k con (x_k^*, y_k^*) en R_k, una suma de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ se denomina **suma de Riemann**. La partición de R, donde las R_k yacen por completo en R, recibe el nombre de **partición interior** de R. La colección de rectángulos sombreados en las siguientes dos figuras ilustra una partición interna.

Nota: Cuando f es continua sobre R, el límite en (2) existe, esto es, f es necesariamente integrable sobre R.



EJEMPLO 1 Suma de Riemann

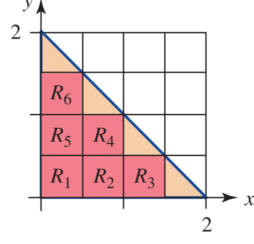


FIGURA 14.1.2 Región de integración R en el ejemplo 1

Considere la región de integración R en el primer cuadrante acotado por las gráficas de $x + y = 2$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (5 - x - 2y)\,dA$ utilizando una suma de Riemann, las R_k que se muestran en la FIGURA 14.1.2 y los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en el centro geométrico de cada R_k.

Solución De la figura 14.1.2 vemos que $\Delta A_k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $k = 1, 2, \ldots, 6$ y las (x_k^*, y_k^*) en las R_k para $k = 1, 2, \ldots, 6$, son a su vez, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)$. Por consiguiente, la suma de Riemman es

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k &= f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right)\frac{1}{4} \\ &= \frac{17}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{15}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{11}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{13}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{17}{16} + \frac{15}{16} + \frac{13}{16} + \frac{11}{16} + \frac{13}{16} + \frac{9}{16} = 4.875.\end{aligned}$$

■

Volumen Sabemos que cuando $f(x) \geq 0$ para toda x en $[a, b]$, entonces la integral definida (1) produce el área bajo la gráfica de f sobre el intervalo. De manera similar, si $f(x, y) \geq 0$ sobre R, entonces sobre R_k como se muestra en la FIGURA 14.1.3, el producto $f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ puede interpretarse como el volumen de un paralelepípedo, o prisma, rectangular, de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y área de la base ΔA_k. La suma de n volúmenes $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k$ es una aproximación al volumen V del sólido acotado entre la región R y la superficie $z = f(x, y)$. El límite de esta suma cuando $\|P\| \to 0$, si existe, producirá el **volumen** de este sólido; esto es, si f es no negativa sobre R, entonces

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA. \tag{3}$$

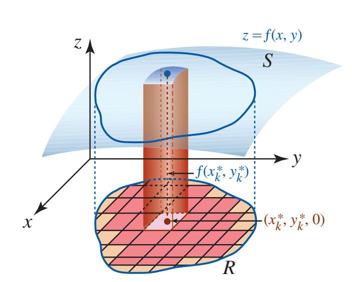


FIGURA 14.1.3 Se construye un paralelepípedo rectangular sobre cada R_k

Los paralelepípedos construidos en las seis R_k que se muestran en la figura 14.1.2 se ilustran en la FIGURA 14.1.4. Puesto que el integrando es no negativo sobre R, el valor de la suma de Riemann dada en el ejemplo 1 representa una aproximación al volumen del sólido acotado entre la región R y la superficie definida por la función $f(x, y) = 5 - x - 2y$.

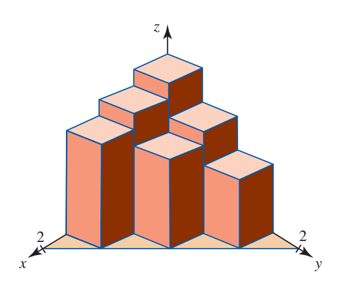


FIGURA 14.1.4 Paralelepípedos rectangulares sobre cada R_k en la figura 14.1.2

Área Cuando $f(x, y) = 1$ sobre R, entonces $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta A_k$ dará simplemente el **área** A de la región; esto es,

$$A = \iint_R dA. \tag{4}$$

Propiedades Las siguientes propiedades de la integral doble son similares a aquellas de la integral definida dadas en los teoremas 5.4.4 y 5.4.5.

Teorema 14.1.1 Propiedades

Sean f y g funciones de dos variables que son integrables sobre una región R del plano xy. Entonces

i) $\iint_R kf(x, y)\, dA = k\iint_R f(x, y)\, dA$, donde k es cualquier constante

ii) $\iint_R [f(x, y) \pm g(x, y)]\, dA = \iint_R f(x, y)\, dA \pm \iint_R g(x, y)\, dA$

iii) $\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_{R_1} f(x, y)\, dA + \iint_{R_2} f(x, y)\, dA$, donde R_1 y R_2 son subregiones que no se traslapan y $R = R_1 \cup R_2$

iv) $\iint_R f(x, y)\, dA \geq \iint_R g(x, y)\, dA$ si $f(x, y) \geq g(x, y)$ sobre R.

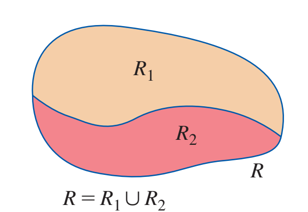


FIGURA 14.1.5 La región R es la unión de dos regiones

La parte *iii*) del teorema 14.1.1 es el equivalente bidimensional de la propiedad del intervalo aditivo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

(teorema 5.4.5). La FIGURA 14.1.5 ilustra la división de una región en subregiones R_1 y R_2 para las cuales $R = R_1 \cup R_2$. Las regiones R_1 y R_2 pueden no tener puntos en común excepto posiblemente en su frontera común. Además, el teorema 14.1.1*iii*) se extiende a cualquier número finito de subregiones que no se traslapan cuya unión es R. También se sigue del teorema 14.1.1*iv*) que $\iint_R f(x, y)\, dA > 0$ siempre que $f(x, y) > 0$ para todo (x, y) en R.

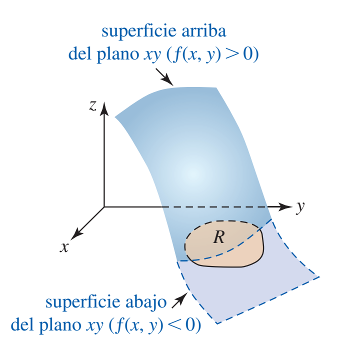


FIGURA 14.1.6 Sobre R la superficie está parcialmente por arriba y parcialmente por abajo del plano xy

Volumen neto Desde luego, no toda integral doble produce volumen. Para la superficie $z = f(x, y)$ que se muestra en la FIGURA 14.1.6, $\iint_R f(x, y)\, dA$ es un número real pero no es el volu-

men puesto que f es no negativa sobre R. Análogo al concepto del área neta que se discutió en la sección 5.4, podemos interpretar la integral doble como la suma del volumen acotado entre la gráfica de f y la región R siempre que $f(x, y) \geq 0$ y el negativo del volumen entre la gráfica de f y la región R siempre que $f(x, y) \leq 0$. En otras palabras, $\iint_R f(x, y)\, dA$ representa un **volumen neto** entre la gráfica de f y el plano xy sobre la región R.

Ejercicios 14.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

1. Considere la región R en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 16$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (x + 3y + 1)\, dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la FIGURA 14.1.7. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en el centro geométrico de cada R_k.

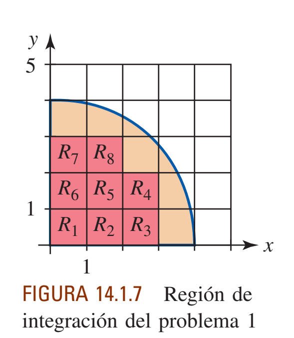


FIGURA 14.1.7 Región de integración del problema 1

2. Considere la región R en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x + y = 1$, $x + y = 3$, $y = 0$ y $x = 0$. Aproxime la integral doble $\iint_R (2x + 4y)\, dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la FIGURA 14.1.8. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en la esquina superior derecha de cada R_k.

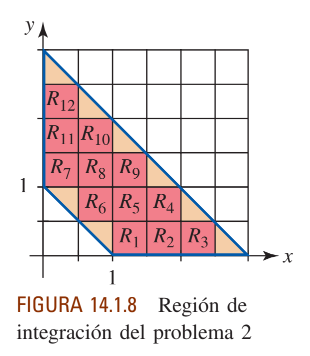


FIGURA 14.1.8 Región de integración del problema 2

3. Considere la región rectangular R que se muestra en la FIGURA 14.1.9. Aproxime la integral doble $\iint_R (x + y)\, dA$ utilizando una suma de Riemann y las R_k que se muestran en la figura. Elija los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) en

a) el centro geométrico de cada R_k y

b) la esquina superior izquierda de cada R_k.

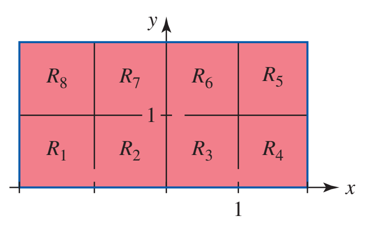


FIGURA 14.1.9 Región de integración del problema 3

4. Considere la región R acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 4$. Ponga una retícula rectangular sobre R correspondiente a las rectas $x = -2$, $x = -\frac{3}{2}$, $x = -1, \ldots, x = 2$, y $y = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $y = 1, \ldots, y = 4$. Aproxime la integral doble $\iint_R xy\, dA$ utilizando una suma de Riemann, donde los puntos muestra (x_k^*, y_k^*) se elijan en la esquina inferior derecha de cada rectángulo completo R_k en R.

En los problemas 5-8, evalúe $\iint_R 10\, dA$ sobre la región R dada. Emplee fórmulas geométricas.

5.

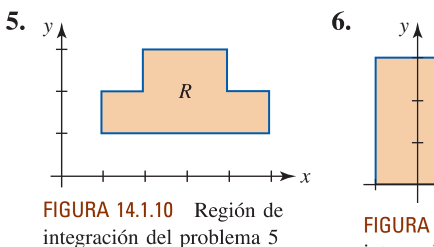


FIGURA 14.1.10 Región de integración del problema 5

6.

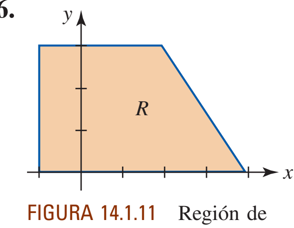


FIGURA 14.1.11 Región de integración del problema 6

7.

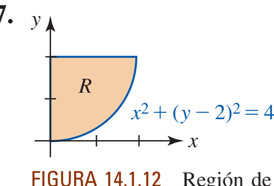


FIGURA 14.1.12 Región de integración del problema 7

8.

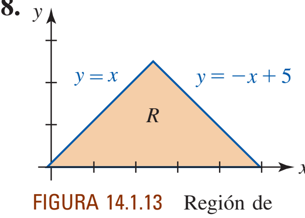


FIGURA 14.1.13 Región de integración del problema 8

9. Considere la región R acotada por el círculo $(x - 3)^2 + y^2 = 9$. ¿La integral doble $\iint_R (x + 5y)\, dA$ representa un volumen? Explique.

10. Considere la región R del segundo cuadrante que está acotada por las gráficas de $-2x + y = 6$, $x = 0$ y $y = 0$.

¿La integral doble $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$ representa un volumen? Explique.

En los problemas 11-16, suponga que $\iint_R x\, dA = 3$, $\iint_R y\, dA = 7$ y el área de R es 8. Evalúe la integral doble dada.

11. $\displaystyle\iint_R 10\, dA$

12. $\displaystyle\iint_R -5x\, dA$

13. $\displaystyle\iint_R (2x + 4y)\, dA$

14. $\displaystyle\iint_R (x - y)\, dA$

15. $\displaystyle\iint_R (3x + 7y + 1)\, dA$

16. $\displaystyle\iint_R y^2\, dA - \iint_R (2 + y)^2\, dA$

En los problemas 17 y 18, considere que R_1 y R_2 son regiones que no se traslapan tales que $R = R_1 \cup R_2$.

17. Si $\iint_{R_1} f(x, y)\, dA = 4$ y $\iint_{R_2} f(x, y)\, dA = 14$, ¿cuál es el valor de $\iint_R f(x, y)\, dA$?

18. Suponga que $\iint_R f(x, y)\, dA = 25$ y $\iint_{R_1} f(x, y)\, dA = 30$. ¿Cuál es el valor de $\iint_{R_2} f(x, y)\, dA$?

14.2 Integrales iteradas

Introducción De manera similar al proceso de la diferenciación parcial podemos definir la **integración parcial**. El concepto de la integración parcial es la clave para un método práctico de evaluación de una integral doble. Puesto que estaremos utilizando la integración indefinida y la definida, le recomendamos ampliamente un repaso del material de la sección 5.1, la sección 5.2 y el capítulo 7.

Integración parcial Si $F(x, y)$ es una función tal que su derivada parcial con respecto a y es una función f, esto es $F_y(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial de f con respecto a y** es

$$\int f(x, y)\, dy = F(x, y) + c_1(x), \tag{1}$$

donde la función $c_1(x)$ desempeña la parte de la "constante de integración". De manera similar, si $F(x, y)$ es una función tal que $F_x(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial de f con respecto a x** es

$$\int f(x, y)\, dx = F(x, y) + c_2(y). \tag{2}$$

En otras palabras, para evaluar la integral parcial $\int f(x, y)\, dy$ mantenemos x fija (como si fuera una constante), en tanto que en $\int f(x, y)\, dx$ mantenemos y fija.

EJEMPLO 1 Empleo de (1) y (2)

Evalúe:

a) $\displaystyle\int 6xy^2\, dy$ ***b)*** $\displaystyle\int 6xy^2\, dx.$

Solución

a) Al mantener a x fija,

$$\int 6xy^2\, dy = 6x \cdot \left(\frac{1}{3}y^3\right) + c_1(x) = 2xy^3 + c_1(x).$$

Comprobación: $\dfrac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + c_1(x)) = \dfrac{\partial}{\partial y}2xy^3 + \dfrac{\partial}{\partial y}c_1(x) = 2x(3y^2) + 0 = 6xy^2.$

b) Al mantener ahora y fija,

$$\int 6xy^2\, dx = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}x^2\right) \cdot y^2 + c_2(y) = 3x^2y^2 + c_2(y).$$

Usted debe verificar este resultado tomando su derivada parcial con respecto a x. ■

Integración parcial definida Al evaluar una integral definida podemos prescindir de las funciones $c_1(y)$ y $c_2(x)$ en (1) y (2). También en este caso, si $F(x, y)$ es una función tal que $F_y(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial definida con respecto a y** se define como

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy = F(x, y)\Big]_{g_1(x)}^{g_2(x)} = F(x, g_2(x)) - F(x, g_1(x)). \tag{3}$$

Si $F(x, y)$ es una función tal que $F_x(x, y) = f(x, y)$, entonces la **integral parcial definida con respecto a x** es

$$\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx = F(x, y)\Big]_{h_1(y)}^{h_2(y)} = F(h_2(y), y) - F(h_1(y), y). \tag{4}$$

Las funciones $g_1(x)$ y $g_2(x)$ en (3) y las funciones $h_1(y)$ y $h_2(y)$ en (4) se denominan los **límites de integración**. Desde luego los resultados en (3) y (4) se cumplen cuando los límites de integración son constantes.

EJEMPLO 2 Empleo de (3) y (4)

Evalúe:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy$ ***b***) $\displaystyle\int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx.$

Solución

a) Se deduce de (3) que

$$\int_1^2 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy = \Big[2xy^3 - 4x \ln|y|\Big]_1^2$$
$$= (16x - 4x \ln 2) - (2x - 4x \ln 1)$$
$$= 14x - 4x \ln 2.$$

b) De (4),

$$\int_{-1}^3 \left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx = \left(3x^2y^2 - 2\frac{x^2}{y}\right)\Big]_{-1}^3$$
$$= \left(27y^2 - \frac{18}{y}\right) - \left(3y^2 - \frac{2}{y}\right)$$
$$= 24y^2 - \frac{16}{y}.$$ ■

EJEMPLO 3 Empleo de (3)

Evalúe $\displaystyle\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen} xy\, dy.$

Solución Puesto que estamos tratando a x como constante, advertimos primero que la integral parcial de sen xy con respecto a y es $(-\cos xy)/x$. Para ver lo anterior, tenemos por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{x}\cos xy\right) = -\frac{1}{x}(-\operatorname{sen} xy)\frac{\partial}{\partial y}xy = -\frac{1}{x}(-\operatorname{sen} xy)\cdot x = \operatorname{sen} xy.$$

Por consiguiente, por (3) la integral parcial definida es

$$\int_{x^2}^{x} \operatorname{sen} xy\, dy = -\frac{\cos xy}{x}\Big]_{x^2}^{x} = \left(-\frac{\cos(x\cdot x)}{x}\right) - \left(-\frac{\cos(x\cdot x^2)}{x}\right) = -\frac{\cos x^2}{x} + \frac{\cos x^3}{x}.$$ ■

Antes de continuar necesitamos examinar algunas regiones especiales en el plano xy.

Regiones de tipo I y II La región que se ilustra en la FIGURA 14.2.1*a*),

$$R: a \le x \le b, \quad g_1(x) \le y \le g_2(x),$$

donde las funciones frontera g_1 y g_2 son continuas, se denomina **región tipo I**. En la figura 14.2.1*b*), la región

$$R: c \le y \le d, \quad h_1(y) \le x \le h_2(y),$$

donde h_1 y h_2 son continuas, se denomina **región tipo II**.

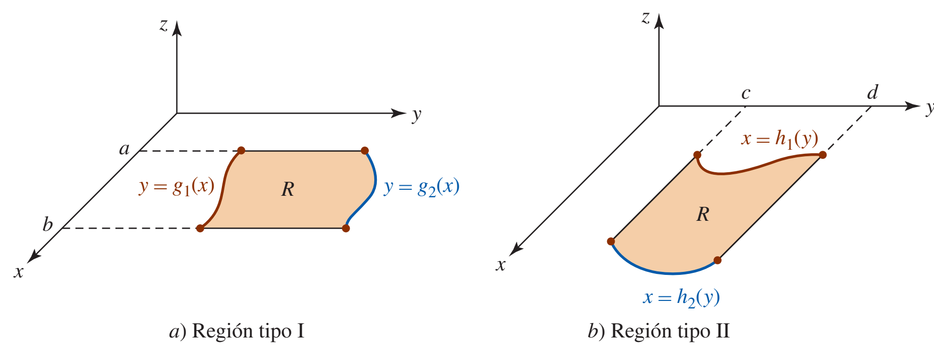


FIGURA 14.2.1 Regiones en el plano

Integrales iteradas Puesto que la integral parcial definida $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy$ es una función de x únicamente, podríamos, como alternativa, integrar la función resultante con respecto a x. Si f es continua sobre una región R de tipo I, definimos una **integral iterada de f** sobre la región mediante

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dy \right] dx. \tag{5}$$

La idea básica en (5) es realizar integraciones *repetidas* o *sucesivas*. El proceso de dos pasos empieza con una integración parcial definida que produce una función de x, la cual se integra después de la manera usual de $x = a$ a $x = b$. El resultado final de las dos integraciones será un número real. De manera similar, definimos una integral iterada de una función f continua sobre una región R tipo II por medio de

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx \right] dy. \tag{6}$$

En (5) y (6), R recibe el nombre de **región de integración**.

EJEMPLO 4 Integral iterada

Evalúe la integral iterada de $f(x, y) = 2xy$ sobre la región que se muestra en la FIGURA 14.2.2.

Solución La región es de tipo I y por ello de acuerdo con (5) tenemos

$$\int_{-1}^2 \int_x^{x^2+1} 2xy\,dy\,dx = \int_{-1}^2 \left[\int_x^{x^2+1} 2xy\,dy \right] dx = \int_{-1}^2 xy^2 \Big]_x^{x^2+1} dx$$

$$= \int_{-1}^2 [x(x^2 + 1)^2 - x^3]\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{6}(x^2 + 1)^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_{-1}^2 = \frac{63}{4}.$$

■

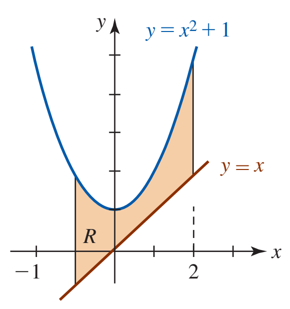


FIGURA 14.2.2 Región R del ejemplo 4

EJEMPLO 5 Integral iterada

Evalúe $\displaystyle\int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y)\,dx\,dy$.

Solución Al comparar la integral iterada con (6), vemos que la región de integración es de tipo II. Vea la FIGURA 14.2.3. Iniciamos integraciones sucesivas utilizando (4):

$$\int_0^4 \int_y^{2y} (8x + e^y)\,dx\,dy = \int_0^4 \left[\int_y^{2y} (8x + e^y)\,dx \right] dy = \int_0^4 (4x^2 + xe^y) \Big]_y^{2y} dy$$

$$= \int_0^4 [(16y^2 + 2ye^y) - (4y^2 + ye^y)]\,dy$$

$$= \int_0^4 (12y^2 + ye^y)\,dy \quad \leftarrow \text{integración por partes}$$

$$= \left[4y^3 + ye^y - e^y \right]_0^4 = 257 + 3e^4 \approx 420.79.$$

■

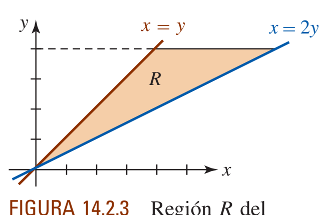


FIGURA 14.2.3 Región R del ejemplo 5

EJEMPLO 6 Integral iterada

Evalúe $\int_{-1}^{3}\int_{1}^{2}\left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy\,dx.$

Solución En el resultado del inciso *a*) del ejemplo 2, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3}\int_{1}^{2}\left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy\,dx &= \int_{-1}^{3}\left[\int_{1}^{2}\left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dy\right] dx\\ &= \int_{-1}^{3}(14x - 4x\ln 2)\,dx\\ &= (7x^2 - 2x^2\ln 2)\Big]_{-1}^{3} = 56 - 16\ln 2 \approx 44.91.\end{aligned}$$ ■

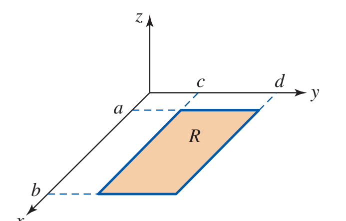


FIGURA 14.2.4 La región rectangular es tanto del tipo I como del tipo II

La inspección de la FIGURA 14.2.4 debe convencerlo de que una región rectangular R definida por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$ es simultáneamente del tipo I y del tipo II. Si f es continua sobre R, puede demostrarse que

$$\int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{c}^{d}\int_{a}^{b} f(x, y)\,dx\,dy. \qquad (7)$$

Usted debe verificar que

$$\int_{1}^{2}\int_{-1}^{3}\left(6xy^2 - 4\frac{x}{y}\right) dx\,dy$$

produce el mismo resultado que la integral iterada del ejemplo 6.

Una región rectangular no es la única región que puede ser tanto de tipo I como de tipo II. Como en (7), si f es continua sobre una región R que es simultáneamente del tipo I y del tipo II, entonces las dos integrales iteradas de f sobre R son iguales. Vea los problemas 47 y 48 de los ejercicios 14.2.

Ejercicios 14.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

En los problemas 1-10, evalúe la integral parcial dada.

1. $\int dy$
2. $\int (1 - 2y)\,dx$
3. $\int (6x^2y - 3x\sqrt{y})\,dx$
4. $\int (6x^2y - 3x\sqrt{y})\,dy$
5. $\int \frac{1}{x(y + 1)}\,dy$
6. $\int (1 + 10x - 5y^4)\,dx$
7. $\int (12y\cos 4x - 3\,\text{sen}\,y)\,dx$
8. $\int \sec^2 3xy\,dy$
9. $\int \frac{y}{\sqrt{2x + 3y}}\,dx$
10. $\int (2x + 5y)^6\,dy$

En los problemas 11-20, evalúe la integral parcial definida dada.

11. $\int_{-1}^{3} (6xy - 5e^y)\,dx$
12. $\int_{1}^{2} \tan xy\,dy$
13. $\int_{1}^{3x} x^3e^{xy}\,dy$
14. $\int_{\sqrt{y}}^{y^3} (8x^3y - 4xy^2)\,dx$
15. $\int_{0}^{2x} \frac{xy}{x^2 + y^2}\,dy$
16. $\int_{x^3}^{x} e^{2y/x}\,dy$
17. $\int_{\tan y}^{\sec y} (2x + \cos y)\,dx$
18. $\int_{\sqrt{y}}^{1} y\ln x\,dx$
19. $\int_{x}^{\pi/2} \cos x\,\text{sen}^3 y\,dy$
20. $\int_{1/2}^{1} y\cos^2 xy\,dx$

En los problemas 21-42, evalúe la integral iterada dada.

21. $\int_{1}^{2}\int_{-x}^{x^2} (8x - 10y + 2)\,dy\,dx$
22. $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{y} (x + y)^2\,dx\,dy$
23. $\int_{0}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} (2x - y)\,dx\,dy$
24. $\int_{0}^{\pi/4}\int_{0}^{\cos x} (1 + 4y\tan^2 x)\,dy\,dx$
25. $\int_{0}^{\pi}\int_{y}^{3y} \cos(2x + y)\,dx\,dy$
26. $\int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{x}} 2y\,\text{sen}\,\pi x^2\,dy\,dx$
27. $\int_{1}^{\ln 3}\int_{0}^{x} 6e^{x+2y}\,dy\,dx$
28. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{2y} e^{-y^2}\,dx\,dy$
29. $\int_{0}^{3}\int_{x+1}^{2x+1} \frac{1}{\sqrt{y - x}}\,dy\,dx$
30. $\int_{0}^{1}\int_{0}^{y} x(y^2 - x^2)^{3/2}\,dx\,dy$

31. $\int_1^9 \int_0^x \frac{1}{x^2+y^2}\,dy\,dx$

32. $\int_0^{1/2} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,dy$

33. $\int_1^e \int_1^y \frac{y}{x}\,dx\,dy$

34. $\int_1^4 \int_1^{\sqrt{x}} 2ye^{-x}\,dy\,dx$

35. $\int_0^6 \int_0^{\sqrt{25-y^2}/2} \frac{1}{\sqrt{(25-y^2)-x^2}}\,dx\,dy$

36. $\int_0^2 \int_{y^2}^{\sqrt{20-y^2}} y\,dx\,dy$

37. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_{\cos y}^{0} e^x \operatorname{sen} y\,dx\,dy$

38. $\int_0^1 \int_0^{y^{1/3}} 6x^2 \ln(y+1)\,dx\,dy$

39. $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^x (\cos x - \operatorname{sen} y)\,dy\,dx$

40. $\int_1^3 \int_0^{1/x} \frac{1}{x+1}\,dy\,dx$

41. $\int_{\pi/12}^{5\pi/12} \int_1^{\sqrt{2\operatorname{sen}2\theta}} r\,dr\,d\theta$

42. $\int_0^{\pi/3} \int_{3\cos\theta}^{1+\cos\theta} r\,dr\,d\theta$

En los problemas 43-46, dibuje la región de integración R para la integral iterada que se indica.

43. $\int_0^2 \int_1^{2x+1} f(x,y)\,dy\,dx$

44. $\int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx\,dy$

45. $\int_{-1}^3 \int_0^{\sqrt{16-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy$

46. $\int_{-1}^2 \int_{-x^2}^{x^2+1} f(x,y)\,dy\,dx$

En los problemas 47 y 48, verifique mediante un dibujo que la región tipo I es la misma que la región tipo II. Verifique que las integrales iteradas que se indican son iguales.

47. Tipo I: $\frac{1}{2}x \le y \le \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 4$

Tipo II: $y^2 \le x \le 2y, \quad 0 \le y \le 2$

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} x^2 y\,dy\,dx = \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} x^2 y\,dx\,dy$$

48. Tipo I: $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \le x \le 1$

Tipo II: $0 \le x \le \sqrt{1-y^2}, \quad -1 \le y \le 1$

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2x\,dy\,dx = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 2x\,dx\,dy$$

En los problemas 49-52, verifique la igualdad que se indica.

49. $\int_{-1}^2 \int_0^3 x^2\,dy\,dx = \int_0^3 \int_{-1}^2 x^2\,dx\,dy$

50. $\int_{-2}^2 \int_2^4 (2x+4y)\,dx\,dy = \int_2^4 \int_{-2}^2 (2x+4y)\,dy\,dx$

51. $\int_1^3 \int_0^{\pi} (3x^2y - 4\operatorname{sen} y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi} \int_1^3 (3x^2y - 4\operatorname{sen} y)\,dx\,dy$

52. $$\int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{8y}{x+1} - \frac{2x}{y^2+1}\right) dx\,dy = \int_0^2 \int_0^1 \left(\frac{8y}{x+1} - \frac{2x}{y^2+1}\right) dy\,dx$$

≡ Piense en ello

53. Si f y g son integrales, demuestre que

$$\int_c^d \int_a^b f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right).$$

54. Emplee el resultado del problema 53 para evaluar

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} xye^{-(2x^2+3y^2)}\,dx\,dy.$$

14.3 Evaluación de integrales dobles

Introducción Las integrales iteradas de la sección anterior proporcionan los medios para evaluar una integral doble $\iint_R f(x,y)\,dA$ sobre una región tipo I o tipo II o una región que puede expresarse como una unión de un número finito de estas regiones. El siguiente resultado se debe al matemático italiano **Guido Fubini** (1879-1943).

Teorema 14.3.1 Teorema de Fubini

Sea f continua sobre una región R.

i) Si R es una región de tipo I, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \qquad (1)$$

ii) Si R es una región de tipo II, entonces

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (2)$$

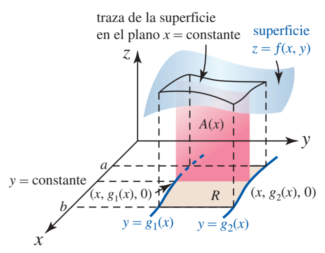


FIGURA 14.3.1 El área $A(x)$ del plano vertical es una integral definida de f

El teorema 14.3.1 es la contraparte de la integral doble del teorema 5.5.1, el teorema fundamental del cálculo. Si bien el teorema 14.3.1 es difícil de probar, podemos tener alguna idea intuitiva de su importancia al considerar volúmenes. Sea R una región de tipo I y $z = f(x, y)$ continua y no negativa sobre R. El área A del plano vertical que se muestra en la FIGURA 14.3.1 es el área bajo la traza de la superficie $z = f(x, y)$ en el plano $x =$ constante y en consecuencia está dado por la integral parcial

$$A(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy.$$

Al sumar todas estas áreas de $x = a$ a $x = b$, obtenemos el volumen V del sólido sobre R y debajo de la superficie:

$$V = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Sin embargo, como ya hemos visto en (3) de la sección 14.1, este volumen está también dado por la integral doble $V = \iint_R f(x, y)\, dA$. En consecuencia,

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

EJEMPLO 1 Integral doble

Evalúe la integral doble $\iint_R e^{x+3y}\, dA$ sobre la región R acotada por las gráficas de $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ y $y = -x + 5$.

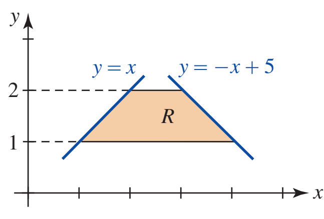
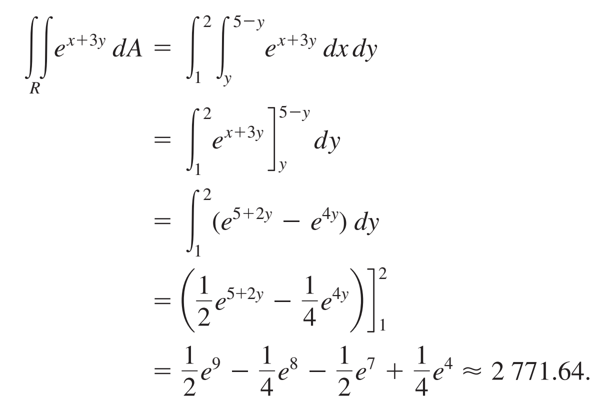


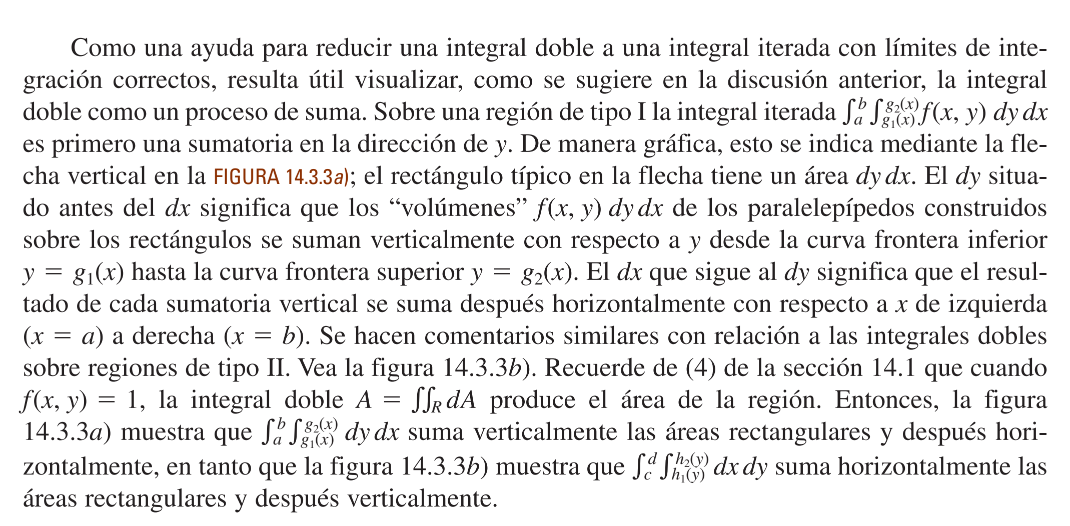
FIGURA 14.3.2 Región R del ejemplo 1

Solución Como se advierte en la FIGURA 14.3.2, R es una región de tipo II; por consiguiente, por (2) integramos primero con respecto a x desde la frontera izquierda $x = y$ hasta la frontera derecha $x = 5 - y$:



$$\begin{aligned}\iint_R e^{x+3y}\, dA &= \int_1^2 \int_y^{5-y} e^{x+3y}\, dx\, dy \\ &= \int_1^2 e^{x+3y}\Big]_y^{5-y} dy \\ &= \int_1^2 (e^{5+2y} - e^{4y})\, dy \\ &= \left(\frac{1}{2}e^{5+2y} - \frac{1}{4}e^{4y}\right)\Big]_1^2 \\ &= \frac{1}{2}e^9 - \frac{1}{4}e^8 - \frac{1}{2}e^7 + \frac{1}{4}e^4 \approx 2\,771.64.\end{aligned}$$

■



Como una ayuda para reducir una integral doble a una integral iterada con límites de integración correctos, resulta útil visualizar, como se sugiere en la discusión anterior, la integral doble como un proceso de suma. Sobre una región de tipo I la integral iterada $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx$ es primero una sumatoria en la dirección de y. De manera gráfica, esto se indica mediante la flecha vertical en la FIGURA 14.3.3*a*); el rectángulo típico en la flecha tiene un área $dy\, dx$. El dy situado antes del dx significa que los "volúmenes" $f(x, y)\, dy\, dx$ de los paralelepípedos construidos sobre los rectángulos se suman verticalmente con respecto a y desde la curva frontera inferior $y = g_1(x)$ hasta la curva frontera superior $y = g_2(x)$. El dx que sigue al dy significa que el resultado de cada sumatoria vertical se suma después horizontalmente con respecto a x de izquierda $(x = a)$ a derecha $(x = b)$. Se hacen comentarios similares con relación a las integrales dobles sobre regiones de tipo II. Vea la figura 14.3.3*b*). Recuerde de (4) de la sección 14.1 que cuando $f(x, y) = 1$, la integral doble $A = \iint_R dA$ produce el área de la región. Entonces, la figura 14.3.3*a*) muestra que $\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$ suma verticalmente las áreas rectangulares y después horizontalmente, en tanto que la figura 14.3.3*b*) muestra que $\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$ suma horizontalmente las áreas rectangulares y después verticalmente.

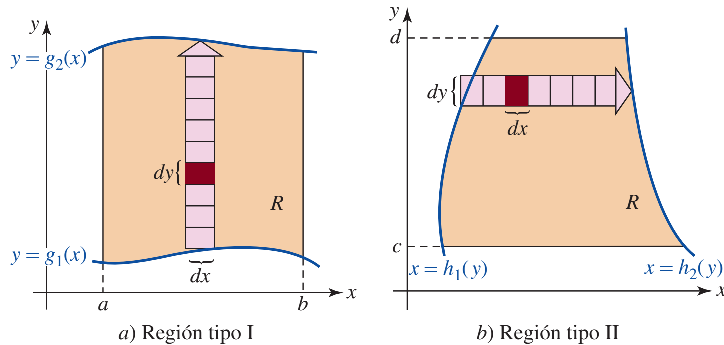
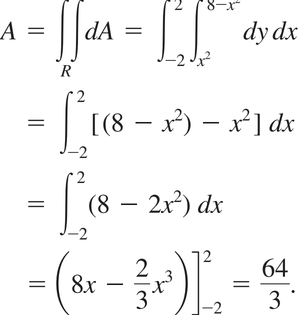


FIGURA 14.3.3 En *a*) la primera integración es con respecto a *y*; en *b*) la primera integración es con respecto a *x*

EJEMPLO 2 Área mediante integración doble

Emplee la integral doble para determinar el área de la región acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = 8 - x^2$.

Solución Las gráficas y sus puntos de intersección se muestran en la FIGURA 14.3.4. Puesto que R es evidentemente del tipo I, tenemos de (1)



$$A = \iint_R dA = \int_{-2}^{2}\int_{x^2}^{8-x^2} dy\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2} [(8 - x^2) - x^2]\,dx$$
$$= \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx$$
$$= \left(8x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}.$$

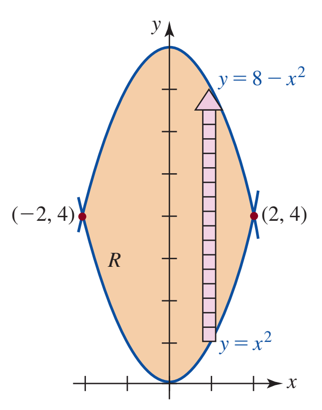


FIGURA 14.3.4 Región R del ejemplo 2



Nota: Usted debe reconocer

$$A = \iint_R dA = \int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\,dx = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]\,dx$$

como la fórmula (3) de la sección 6.2 para el área acotada entre dos gráficas sobre el intervalo $[a, b]$.

EJEMPLO 3 Volumen mediante doble integración

Utilice la integral doble para calcular el volumen V del sólido en el primer octante que está acotado por los planos de coordenadas y las gráficas del plano $z = 3 - x - y$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Solución De la FIGURA 14.3.5*a*) vemos que el volumen está dado por $V = \iint_R (3 - x - y)\,dA$. Puesto que la figura 14.3.5*b*) muestra que la región de integración R es tipo I, tenemos de (1),

$$V = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (3 - x - y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left(3y - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx$$
$$= \int_0^1 \left(3\sqrt{1 - x^2} - x\sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x^2\right) dx \quad \leftarrow \text{sustitución trigonométrica}$$
$$= \left[\frac{3}{2}\,\text{sen}^{-1}x + \frac{3}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{3}(1 - x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^3\right]_0^1$$
$$= \frac{3}{4}\pi - \frac{2}{3} \approx 1.69.$$

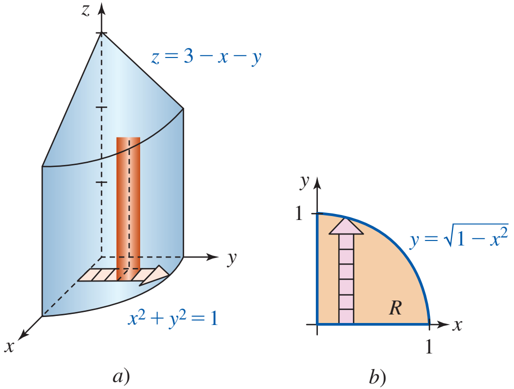


FIGURA 14.3.5 En el ejemplo 3, superficies en *a*); región de integración en *b*)

La reducción de una integral doble ya sea a las integrales iteradas (1) o (2) depende de *a*) el tipo de región y *b*) la función misma. Los siguientes dos ejemplos ilustran cada caso.

EJEMPLO 4 Integral doble

Evalúe $\iint_R (x + y)\, dA$ sobre la región acotada por las gráficas de $x = y^2$ y $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Solución La región, que se muestra en la FIGURA 14.3.6*a*), puede escribirse como la unión $R = R_1 \cup R_2$ de las dos regiones tipo I. Al resolver la ecuación $y^2 = 2y + 3$ o $(y + 1)(y - 3) = 0$ encontramos que los puntos de intersección de las dos gráficas son $(1, -1)$ y $(9, 3)$. Por tanto, de (1) y el teorema 14.1.1*iii*), tenemos

$$\begin{aligned}
\iint_R (x + y)\, dA &= \iint_{R_1} (x + y)\, dA + \iint_{R_2} (x + y)\, dA \\
&= \int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} (x + y)\, dy\, dx + \int_1^9 \int_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} (x + y)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg]_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx + \int_1^9 \left(xy + \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg]_{x/2-3/2}^{\sqrt{x}} dx \\
&= \int_0^1 2x^{3/2}\, dx + \int_1^9 \left(x^{3/2} + \frac{11}{4}x - \frac{5}{8}x^2 - \frac{9}{8}\right) dx \\
&= \frac{4}{5}x^{5/2}\Bigg]_0^1 + \left(\frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{11}{8}x^2 - \frac{5}{24}x^3 - \frac{9}{8}x\right)\Bigg]_1^9 \approx 46.93.
\end{aligned}$$

Solución alterna Al interpretar la región como una región individual de tipo II, vemos de la figura 14.3.6*b*) que

$$\begin{aligned}
\iint_R (x + y)\, dA &= \int_{-1}^3 \int_{y^2}^{2y+3} (x + y)\, dx\, dy \\
&= \int_{-1}^3 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right)\Bigg]_{y^2}^{2y+3} dy \\
&= \int_{-1}^3 \left(-\frac{1}{2}y^4 - y^3 + 4y^2 + 9y + \frac{9}{2}\right) dy \\
&= \left(-\frac{1}{10}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{4}{3}y^3 + \frac{9}{2}y^2 + \frac{9}{2}y\right)\Bigg]_{-1}^3 \approx 46.93.
\end{aligned}$$

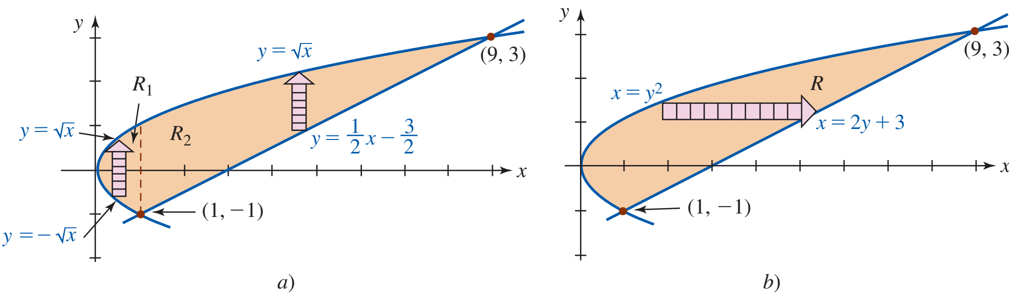


FIGURA 14.3.6 En el ejemplo 4, unión de dos regiones de tipo I en *a*); región de tipo II en *b*)

Advierta que la respuesta en el ejemplo 4 no representa el volumen del sólido sobre R y debajo del plano $z = x + y$. ¿Por qué no?

Inversión del orden de integración Como ilustra el ejemplo 4, un problema puede volverse más sencillo cuando el orden de integración se **cambia** o **invierte**. Además, algunas integrales iteradas que quizá sea imposible evaluar utilizando un orden de integración puedan, tal vez, evaluarse utilizando el orden de integración inverso.

EJEMPLO 5 Integral doble

Evalúe $\iint_R xe^{y^2}\,dA$ sobre la región R en el primer cuadrante acotado por las gráficas de $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$.

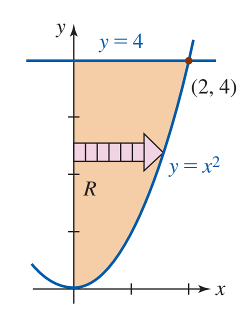
Solución Cuando se observa como una región de tipo I, tenemos de la FIGURA 14.3.7*a*), $0 \le x \le 2$, $x^2 \le y \le 4$, por lo que

$$\iint_R xe^{y^2}\,dA = \int_0^2 \int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy\,dx.$$

La dificultad aquí es que la integral parcial definida $\int_{x^2}^4 xe^{y^2}\,dy$ no puede evaluarse debido a que e^{y^2} no tiene una antiderivada como función elemental con respecto a y. Sin embargo, como vemos en la figura 14.3.7*b*), podemos interpretar la misma región como una de tipo II definida por $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le \sqrt{y}$. Por consiguiente, de (2),

$$\begin{aligned}\iint_R xe^{y^2}\,dA &= \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} xe^{y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}x^2e^{y^2}\Big]_0^{\sqrt{y}}\,dy \\ &= \int_0^4 \frac{1}{2}ye^{y^2}\,dy \\ &= \frac{1}{4}e^{y^2}\Big]_0^4 = \frac{1}{4}(e^{16} - 1).\end{aligned}$$

a) Región tipo I



b) Región tipo II

FIGURA 14.3.7 Región de integración del ejemplo 5

NOTAS DESDE EL AULA

i) Como se mencionó después del ejemplo 1, es posible definir la integral doble en términos de un doble límite de una doble suma tal como

$$\sum_i \sum_j f(x_i^*, y_j^*)\Delta y_j \Delta x_i \qquad \text{o} \qquad \sum_j \sum_i f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j.$$

No daremos los detalles.

ii) Se le sugiere aprovechar las simetrías para minimizar su trabajo cuando calcule áreas y volúmenes mediante integración doble. En el caso de volúmenes, asegúrese de que *tanto* la región R *como* la superficie sobre la región posean simetrías correspondientes. Vea el problema 19 en los ejercicios 14.3.

iii) Antes de intentar evaluar la integral doble, trate *siempre* de dibujar una imagen exacta de la región R de integración.

Ejercicios 14.3 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

En los problemas 1-10, evalúe la integral doble sobre la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Elija el orden de integración más conveniente.

1. $\iint_R x^3y^2\,dA;\quad y = x, y = 0, x = 1$

2. $\iint_R (x + 1)\,dA;\quad y = x, x + y = 4, x = 0$

3. $\iint_R (2x + 4y + 1)\,dA;\quad y = x^2, y = x^3$

4. $\iint_R xe^y\,dA;$ R la misma que en el problema 1

5. $\iint_R 2xy\,dA;\quad y = x^3, y = 8, x = 0$

6. $\iint_R \dfrac{x}{\sqrt{y}}\,dA;\quad y = x^2 + 1, y = 3 - x^2$

7. $\iint_R \dfrac{y}{1 + xy}\,dA;\quad y = 0, y = 1, x = 0, x = 1$

8. $\iint_R \operatorname{sen}\dfrac{\pi x}{y}\,dA;\quad x = y^2, x = 0, y = 1, y = 2$

9. $\iint_R \sqrt{x^2 + 1}\,dA;\quad x = y, x = -y, x = \sqrt{3}$

10. $\iint_R x\,dA;\quad y = \tan^{-1}x, y = 0, x = 1$

En los problemas 11 y 12, evalúe $\iint_R (x + y)\,dA$ para la región dada R.

11.

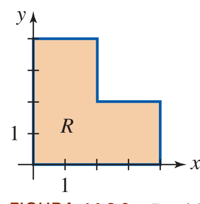


FIGURA 14.3.8 Región de integración del problema 11

12.

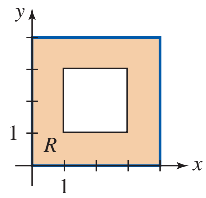


FIGURA 14.3.9 Región de integración del problema 12

En los problemas 13-18, emplee la integral doble para calcular el área de la región R que está acotada por las gráficas de las ecuaciones que se indican.

13. $y = -x, y = 2x - x^2$

14. $x = y^2, x = 2 - y^2$

15. $y = e^x, y = \ln x, x = 1, x = 4$

16. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, x + y = 4$

17. $y = -2x + 3, y = x^3, x = -2$

18. $y = -x^2 + 3x, y = -2x + 4, y = 0, 0 \le x \le 2$

19. Considere el sólido acotado por las gráficas de $x^2 + y^2 = 4, z = 4 - y$ y $z = 0$ que se muestran en la FIGURA 14.3.10. Elija y evalúe la integral correcta que represente al volumen V del sólido.

a) $4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\,dy\,dx$

b) $2\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4 - y)\,dy\,dx$

c) $2\int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} (4 - y)\,dx\,dy$

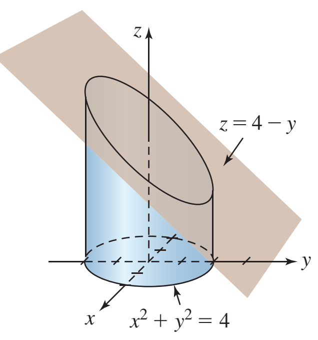


FIGURA 14.3.10 Sólido del problema 19

20. El sólido acotado por los cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ y $y^2 + z^2 = r^2$ recibe el nombre de **bicilindro**. Un octavo del sólido se muestra en la FIGURA 14.3.11. Elija y evalúe la integral correcta correspondiente al volumen V del bicilindro.

a) $4\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} (r^2 - y^2)^{1/2}\,dy\,dx$

b) $8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-y^2}} (r^2 - y^2)^{1/2}\,dx\,dy$

c) $8\int_0^r\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} (r^2 - x^2)^{1/2}\,dy\,dx$

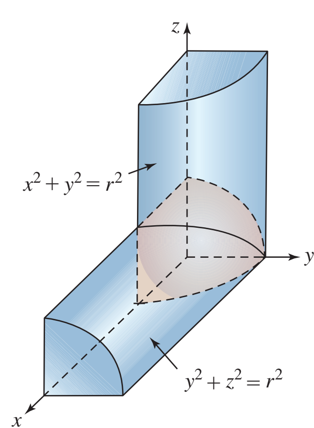


FIGURA 14.3.11 Sólido del problema 20

En los problemas 21-30, determine el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones indicadas.

21. $2x + y + z = 6, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

22. $z = 4 - y^2, x = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

23. $x^2 + y^2 = 4, x - y + 2z = 4, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

24. $y = x^2, y + z = 3, z = 0$

25. $z = 1 + x^2 + y^2, 3x + y = 3, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

26. $z = x + y, x^2 + y^2 = 9, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

27. $yz = 6, x = 0, x = 5, y = 1, y = 6, z = 0$

28. $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2, z = 0$

29. $z = 4 - y^2, x^2 + y^2 = 2x, z = 0$

30. $z = 1 - x^2, z = 1 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$, primer octante

Si $f_2(x, y) \geq f_1(x, y)$ para todo (x, y) en una región R, entonces el volumen del sólido acotado por las dos superficies sobre R es

$$V = \iint_R [f_2(x, y) - f_1(x, y)]\, dA.$$

En los problemas 31-34, determine el volumen acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

31. $x + 2y + z = 4, z = x + y, x = 0, y = 0$, primer octante

32. $z = x^2 + y^2, z = 9$

33. $z = x^2, z = -x + 2, x = 0, y = 0, y = 5$, primer octante

34. $2z = 4 - x^2 - y^2, z = 2 - y$

En los problemas 35-40, invierta el orden de integración.

35. $\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x, y)\, dx\, dy$ **36.** $\int_{-5}^5 \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y)\, dx\, dy$

37. $\int_0^3 \int_1^{e^x} f(x, y)\, dy\, dx$ **38.** $\int_0^2 \int_{y/2}^{3-y} f(x, y)\, dx\, dy$

39. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt[3]{x}} f(x, y)\, dy\, dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x, y)\, dy\, dx$

40. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\, dy + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y)\, dx\, dy$

En los problemas 41-46, evalúe la integral iterada que se indica invirtiendo el orden de integración.

41. $\int_0^1 \int_x^1 x^2\sqrt{1 + y^4}\, dy\, dx$ **42.** $\int_0^1 \int_{2y}^2 e^{-y/x}\, dx\, dy$

43. $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\, dx\, dy$ **44.** $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy\, dx$

45. $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{1 + y^4}\, dy\, dx$ **46.** $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{x^3 + 1}\, dx\, dy$

El **valor promedio** f_{pro} de una función continua $z = f(x, y)$ sobre una región R en el plano xy se define como

$$f_{pro} = \frac{1}{A}\iint_R f(x, y)\, dA, \qquad (3)$$

donde A es el área de R. En los problemas 47 y 48, determine f_{pro} para la función y la región R dadas.

47. $f(x, y) = xy$; R definida mediante $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$

48. $f(x, y) = 9 - x^2 - 3y^2$; R acotada mediante la elipse $x^2 + 3y^2 = 9$

≡ Piense en ello

49. De (3) podemos escribir $\iint_R f(x, y)\, dA = f_{pro} \cdot A$, donde A es el área de R. Discuta acerca de la interpretación geométrica de este resultado en el caso $f(x, y) > 0$ sobre R.

50. Sea R una región rectangular acotada por las rectas $x = a$, $x = b$, $y = c$ y $y = d$, donde $a < b$, $c < d$.

a) Muestre que

$$\iint_R \cos 2\pi(x + y)\, dA = \frac{1}{4\pi^2}(S_1S_2 - C_1C_2)$$

$$\iint_R \operatorname{sen} 2\pi(x + y)\, dA = -\frac{1}{4\pi^2}(C_1S_2 + S_1C_2),$$

donde

$$S_1 = \operatorname{sen} 2\pi b - \operatorname{sen} 2\pi a, \quad S_2 = \operatorname{sen} 2\pi d - \operatorname{sen} 2\pi c$$
$$C_1 = \cos 2\pi b - \cos 2\pi a, \quad C_2 = \cos 2\pi d - \cos 2\pi c.$$

b) Muestre que si al menos uno de los dos lados perpendiculares de R tiene una longitud entera, entonces

$$\iint_R \cos 2\pi(x + y)\, dA = 0 \quad \text{y} \quad \iint_R \operatorname{sen} 2\pi(x + y)\, dA = 0.$$

c) Inversamente, muestre que si

$$\iint_R \cos 2\pi(x + y)\, dA = 0 \quad \text{y} \quad \iint_R \operatorname{sen} 2\pi(x + y)\, dA = 0,$$

entonces al menos uno de los dos lados perpendiculares de R debe tener longitud entera. [*Sugerencia*: Considere $0 = (S_1S_2 - C_1C_2)^2 + (C_1S_2 + S_1C_2)^2$.]

51. Sea R una región rectangular que se ha dividido en n subregiones rectangulares $R_1, R_2, \ldots, R_n$ que no se traslapan y cuyos lados son todos paralelos a los lados horizontal y vertical de R. Vea la FIGURA 14.3.12. Suponga que cada rectángulo interior tiene la propiedad de que uno de sus dos lados perpendiculares tiene longitud entera. Muestre que R tiene la misma propiedad. [*Sugerencia*: Recurra al problema 50 y al teorema 14.1.1*iii*).]

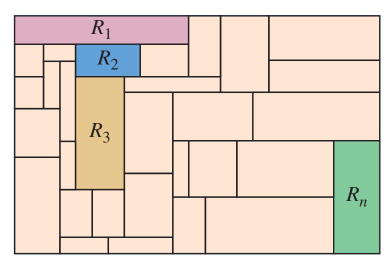


FIGURA 14.3.12 Región rectangular del problema 51

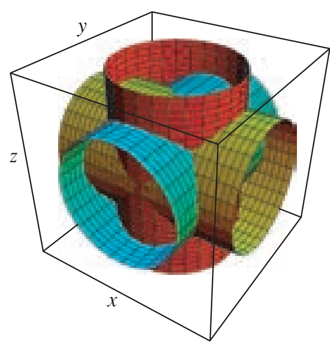
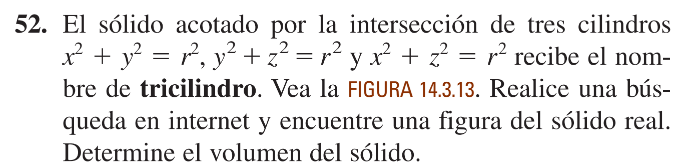


FIGURA 14.3.13 Tres cilindros del mismo radio se intersecan en ángulos rectos en el problema 52

≡ Proyectos



52. El sólido acotado por la intersección de tres cilindros $x^2 + y^2 = r^2$, $y^2 + z^2 = r^2$ y $x^2 + z^2 = r^2$ recibe el nombre de **tricilindro**. Vea la FIGURA 14.3.13. Realice una búsqueda en internet y encuentre una figura del sólido real. Determine el volumen del sólido.

14.4 Centro de masa y momentos

Introducción En la sección 6.10 vimos que si ρ es una densidad (masa por área unitaria), entonces la masa de una mancha de materia, o lámina, bidimensional que coincide con una región acotada por las gráficas de $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho \Delta A_k = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho f(x_k^*)\Delta x_k = \int_a^b \rho f(x)\, dx. \tag{1}$$

La densidad ρ en (1) puede ser una función de x; cuando $\rho =$ constante se dice que la lámina es homogénea.

Veremos después que si la densidad de ρ es una función de dos variables, entonces la masa m de una lámina está dada por una integral doble.

Láminas con densidad variable: centro de masa Si una lámina que corresponde a una región R en el plano xy tiene una densidad variable $\rho(x, y)$ (unidades de masa por área unitaria), donde ρ es no negativa y continua sobre R, entonces de manera análoga a (1) definimos su **masa** m por la integral doble

$$m = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(x_k^*, y_k^*)\Delta A_k \quad \text{o} \quad m = \iint_R \rho(x, y)\, dA. \tag{2}$$

Como en la sección 6.10, definimos las coordenadas del **centro de masa** de la lámina por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}, \tag{3}$$

donde

$$M_y = \iint_R x\rho(x, y)\, dA \quad \text{y} \quad M_x = \iint_R y\rho(x, y)\, dA \tag{4}$$

son los **momentos** de la lámina alrededor de los ejes y y x, respectivamente. El centro de masa es el punto donde consideramos que se concentra toda la masa de la lámina. Si $\rho(x, y)$ es una constante, se dice que la lámina será homogénea y su centro de masa recibe el nombre de **centroide** de la lámina.

EJEMPLO 1 Centro de masa

Una lámina tiene la forma de la región R en el primer cuadrante que está acotado por las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$. Determine su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = y$.

Solución De la FIGURA 14.4.1 vemos que

$$m = \iint_R y\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y\,dy\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}y^2\Big]_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)\,dx \quad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$$

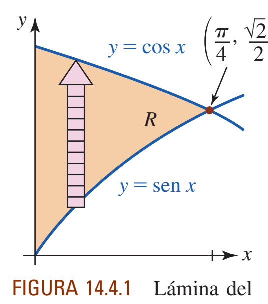


FIGURA 14.4.1 Lámina del ejemplo 1

Ahora,

$$M_y = \iint_R xy\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} xy\,dy\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2}xy^2\Big]_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} x\cos 2x\,dx \quad \leftarrow \text{integración por partes}$$
$$= \left(\frac{1}{4}x\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8}\cos 2x\right)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{16}(\pi - 2).$$

De manera similar,

$$M_x = \iint_R y^2\,dA = \int_0^{\pi/4}\int_{\operatorname{sen} x}^{\cos x} y^2\,dy\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}(\cos^3 x - \operatorname{sen}^3 x)\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/4}[\cos x(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen} x(1 - \cos^2 x)]\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\left(\operatorname{sen} x - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x + \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x\right)\Big]_0^{\pi/4} = \frac{1}{18}(5\sqrt{2} - 4).$$

Por consiguiente, de (3), las coordenadas del centro de masa de la lámina son

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{1}{16}(\pi - 2)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(\pi - 2),$$
$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{18}(5\sqrt{2} - 4)}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{9}(10\sqrt{2} - 8).$$

Las coordenadas aproximadas del centro de masa son (0.29, 068). ■

EJEMPLO 2 Centro de masa

Una lámina tiene la forma de la región R acotada por la gráfica de la elipse $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$, $0 \le y \le 4$ y $y = 0$. Encuentre su centro de masa si la densidad es $\rho(x, y) = |x|y$.

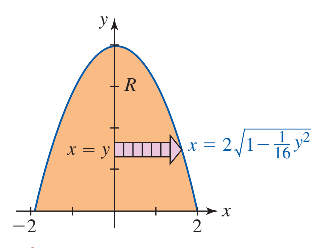


FIGURA 14.4.2 Lámina en el ejemplo 2

Solución De la FIGURA 14.4.2 vemos que la región es simétrica con respecto al eje y. Además, puesto que $\rho(-x, y) = \rho(x, y)$, la densidad ρ es simétrica alrededor de este eje. De esta manera,

la coordenada y del centro de masa debe estar sobre el eje de simetría, y por ello tenemos $\bar{x} = 0$. Utilizando simetría, la masa de la lámina es

$$\begin{aligned} m = \iint_R |x|y\, dA &= 2\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} xy\, dx\, dy \\ &= \int_0^4 x^2 y \Big]_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} dy \\ &= 4\int_0^4 \left(y - \frac{1}{16}y^3\right) dy \\ &= 4\left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{64}y^4\right)\Big]_0^4 = 16. \end{aligned}$$

De modo similar,

$$M_x = \iint_R |x|y^2\, dA = 2\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{1-y^2/16}} xy^2\, dx\, dy = \frac{512}{15}.$$

De (3)

$$\bar{y} = \frac{\frac{512}{15}}{16} = \frac{32}{15}.$$

Las coordenadas del centro de masa son $\left(0, \frac{32}{15}\right)$. ■

No concluimos del ejemplo 2 que el centro de masa debe estar siempre sobre un eje de simetría de una lámina. Tenga en mente que la función de densidad $\rho(x, y)$ también debe ser simétrica con respecto a ese eje.

Momentos de inercia Las integrales M_x y M_y en (4) reciben el nombre de **primeros momentos** de una lámina alrededor del eje x y el eje y, respectivamente. Los llamados **segundos momentos** de una lámina o **momento de inercia** en torno a los ejes x y y son, a su vez, definidos por las integrales dobles

$$I_x = \iint_R y^2\rho(x, y)\, dA \qquad \text{e} \qquad I_y = \iint_R x^2\rho(x, y)\, dA. \tag{5}$$

Un momento de inercia es el equivalente rotacional de la masa. Para el movimiento traslacional, la energía cinética está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde m es la masa y v es la velocidad lineal. La energía cinética de una partícula de masa m que rota a una distancia r del eje es $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$, donde $I = mr^2$ es su momento de inercia alrededor del eje de rotación y ω es su velocidad angular.

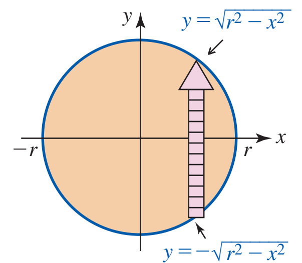


FIGURA 14.4.3 Disco del ejemplo 3

EJEMPLO 3 Momento de inercia

Encuentre el momento de inercia alrededor del eje y del delgado disco homogéneo de masa m que se presenta en la FIGURA 14.4.3.

Solución Puesto que el disco es homogéneo, su densidad es la constante $\rho(x, y) = m/\pi r^2$. Por consiguiente, de (5),

$$\begin{aligned} I_y = \iint_R x^2\rho(x, y)\, dA &= \iint_R x^2\left(\frac{m}{\pi r^2}\right) dA \\ &= \frac{m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} x^2\, dy\, dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2m}{\pi r^2}\int_{-r}^{r} x^2\sqrt{r^2 - x^2}\,dx \qquad \leftarrow \text{sustitución trigonométrica}$$

$$= \frac{2mr^2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \qquad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}$$

$$= \frac{mr^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2\theta\,d\theta \qquad \leftarrow \text{fórmula de mitad de ángulo}$$

$$= \frac{mr^2}{4\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}mr^2. \qquad \blacksquare$$

Radio de giro El radio de giro de una lámina de masa m y el momento de inercia I alrededor de un eje se definen por medio de

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}. \tag{6}$$

Puesto que (6) implica que $I = mR_g^2$, el radio de giro se interpreta como la distancia radial que la lámina, considerada como una masa puntual, puede girar alrededor del eje sin cambiar la inercia rotacional del cuerpo. En el ejemplo 3, el radio de giro es $R_g = \sqrt{I_y/m} = \sqrt{(\frac{1}{4}mr^2)/m} = \frac{1}{2}r$.

Ejercicios 14.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

En los problemas 1-10, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

1. $x = 0, x = 4, y = 0, y = 3; \quad \rho(x, y) = xy$
2. $x = 0, y = 0, 2x + y = 4; \quad \rho(x, y) = x^2$
3. $y = x, x + y = 6, y = 0; \quad \rho(x, y) = 2y$
4. $y = |x|, y = 3; \quad \rho(x, y) = x^2 + y^2$
5. $y = x^2, x = 1, y = 0; \quad \rho(x, y) = x + y$
6. $x = y^2, x = 4; \quad \rho(x, y) = y + 5$
7. $y = 1 - x^2, y = 0;$ densidad ρ en un punto P directamente proporcional a la distancia desde el eje x.
8. $y = \operatorname{sen} x, 0 \le x \le \pi, y = 0;$ densidad ρ en el punto P directamente proporcional a la distancia desde el eje y.
9. $y = e^x, x = 0, x = 1, y = 0; \quad \rho(x, y) = y^3$
10. $y = \sqrt{9 - x^2}, y = 0; \quad \rho(x, y) = x^2$

En los problemas 11-14, determine el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

11. $x = y - y^2, x = 0; \quad \rho(x, y) = 2x$
12. $y = x^2, y = \sqrt{x}; \quad \rho(x, y) = x^2$
13. $y = \cos x, -\pi/2 \le x \le \pi/2, y = 0;$ $\rho(x, y) = k$ (constante)
14. $y = \sqrt{4 - x^2}, x = 0, y = 0,$ primer cuadrante; $\rho(x, y) = y$

En los problemas 15-18, encuentre el momento de inercia alrededor del eje y de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

15. $y = x^2, x = 0, y = 4,$ primer cuadrante; $\quad \rho(x, y) = y$
16. $y = x^2, y = \sqrt{x}; \quad \rho(x, y) = x^2$
17. $y = x, y = 0, y = 1, x = 3; \quad \rho(x, y) = 4x + 3y$
18. Misma R y densidad que en el problema 7.

En los problemas 19 y 20, encuentre el radio de giro alrededor del eje indicado de la lámina que tiene la forma y densidad dadas.

19. $x = \sqrt{a^2 - y^2}, x = 0; \quad \rho(x, y) = x;$ eje y
20. $x + y = a, a > 0, x = 0, y = 0; \rho(x, y) = k$ (constante); eje x.
21. Una lámina tiene la forma de la región acotada por la gráfica de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. Si la densidad es $\rho(x, y) = 1$, encuentre:
    a) el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina,
    b) el momento de inercia alrededor del eje y de la lámina,
    c) el radio de giro alrededor del eje x [*Sugerencia*: El área de la elipse es πab.],
    d) el radio de giro alrededor del eje y.
22. La sección transversal de un perfil aerodinámico experimental es la lámina que se muestra en la FIGURA 14.4.4. El arco ABC es elíptico, en tanto que los dos arcos AD y CD son parabólicos. Encuentre el momento de inercia alrededor del eje x de la lámina bajo la suposición de que la densidad es $\rho(x, y) = 1$.

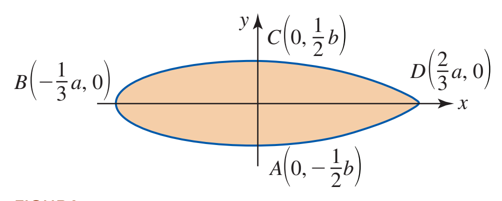


FIGURA 14.4.4 Perfil aerodinámico del problema 22

En los problemas 23-26, encuentre el momento de inercia polar I_0 de la lámina que tiene la forma y la densidad dadas. El **momento de inercia polar** de una lámina con respecto al origen se define como

$$I_0 = \iint_R (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dA = I_x + I_y.$$

23. $x + y = a, a > 0, x = 0, y = 0$; $\rho(x, y) = k$ (constante)

24. $y = x^2, y = \sqrt{x}$; $\rho(x, y) = x^2$ [*Sugerencia*: Vea los problemas 12 y 16.]

25. $x = y^2 + 2, x = 6 - y^2$; densidad ρ en un punto P inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a partir del origen.

26. $y = x, y = 0, y = 3, x = 4$; $\rho(x, y) = k$ (constante)

27. Encuentre el radio de giro del problema 23.

28. Demuestre que el momento de inercia polar con respecto al origen alrededor del centro de una delgada placa rectangular homogénea de masa m, con ancho w y longitud l es $I_0 = \frac{1}{12}m(l^2 + w^2)$.

14.5 Integrales dobles en coordenadas polares

Introducción Suponga que R es una región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares $r = g_1(\theta)$, $r = g_2(\theta)$ y los rayos $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, y que f es una función de r y θ que es continua sobre R. Con el fin de definir la integral doble de f sobre R, empleamos rayos y círculos concéntricos para dividir la región en una retícula de “rectángulos polares” o subregiones R_k. Vea la FIGURA 14.5.1*a*) y *b*). El área ΔA_k de una subregión típica R_k, que se muestra en la figura 14.5.1*c*), es la diferencia de áreas de dos sectores circulares:

$$\Delta A_k = \frac{1}{2}r_{k+1}^2\Delta\theta_k - \frac{1}{2}r_k^2\Delta\theta_k = \frac{1}{2}(r_{k+1}^2 - r_k^2)\Delta\theta_k$$
$$= \frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)(r_{k+1} - r_k)\Delta\theta_k = r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k,$$

donde $\Delta r_k = r_{k+1} - r_k$ y r_k^* denotan el radio promedio $\frac{1}{2}(r_{k+1} + r_k)$.

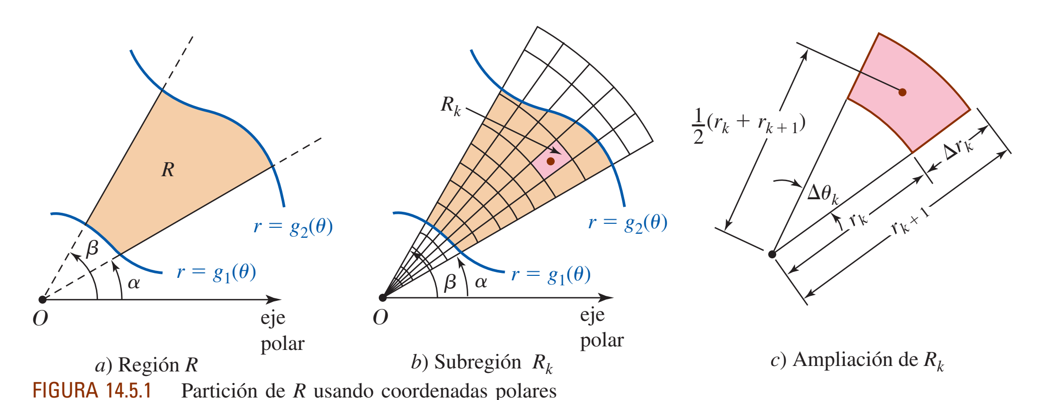


FIGURA 14.5.1 Partición de R usando coordenadas polares

Eligiendo un punto muestra (r_k^*, θ_k^*) en cada R_k, la integral doble de f sobre R es

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(r_k^*, \theta_k^*)r_k^*\Delta r_k\Delta\theta_k = \iint_R f(r, \theta)\, dA.$$

La integral doble se evalúa entonces por medio de la integral iterada

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r\, dr\, d\theta. \tag{1}$$

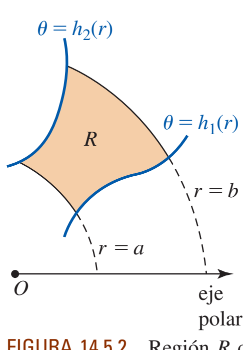


FIGURA 14.5.2 Región R de integración en (2)

Por otro lado, si la región R es como se indica en la FIGURA 14.5.2, la integral doble de f sobre R es entonces

$$\iint_R f(r, \theta)\, dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r, \theta) r\, d\theta\, dr. \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Centro de masa

Encuentre el centro de masa de la lámina que corresponde a la región acotada por la curva llamada pétalo de rosa $r = 2 \text{ sen } 2\theta$ en el primer cuadrante si la densidad en el punto P en la lámina es directamente proporcional a la distancia desde el origen polar.

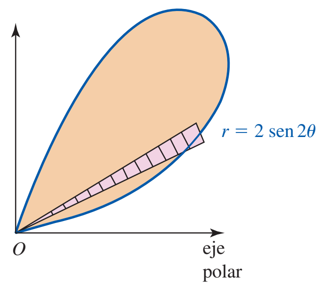


FIGURA 14.5.3 Lámina del ejemplo 1

Solución Al variar θ de 0 a $\pi/2$, obtenemos la gráfica de la FIGURA 14.5.3. En este caso, la distancia desde el origen polar es $d(0, P) = |r|$. Por consiguiente, la densidad de la lámina es $\rho(r, \theta) = k|r|$, donde k es una constante de proporcionalidad. De (2) de la sección 14.4, tenemos

$$\begin{aligned} m &= \iint_R k|r|\,dA = k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2 \text{ sen } 2\theta} (r)r\,dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2} \frac{1}{3}r^3\Big]_0^{2 \text{ sen } 2\theta} d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3 2\theta\,d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2 2\theta \text{ sen } 2\theta\,d\theta \qquad \leftarrow \text{identidad trigonométrica} \\ &= \frac{8}{3}k\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 2\theta)\text{sen } 2\theta\,d\theta \\ &= \frac{8}{3}k\left[-\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{6}\cos^3 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{9}k. \end{aligned}$$

Puesto que $x = r\cos\theta$, podemos escribir el primer momento $M_y = k\iint_R x|r|\,dA$ como

$$\begin{aligned} M_y &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2 \text{ sen } 2\theta} r^3\cos\theta\,dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}r^4\cos\theta\Big]_0^{2 \text{ sen } 2\theta} d\theta \\ &= 4k\int_0^{\pi/2} (\text{sen } 2\theta)^4\cos\theta\,d\theta \qquad \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble} \\ &= 4k\int_0^{\pi/2} (2 \text{ sen } \theta\cos\theta)^4\cos\theta\,d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\theta\cos^5\theta\,d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4\theta(1 - \text{sen}^2\theta)^2\cos\theta\,d\theta \\ &= 64k\int_0^{\pi/2} (\text{sen}^4\theta - 2\,\text{sen}^6\theta + \text{sen}^8\theta)\cos\theta\,d\theta \\ &= 64k\left(\frac{1}{5}\text{sen}^5\theta - \frac{2}{7}\text{sen}^7\theta + \frac{1}{9}\text{sen}^9\theta\right)\Big]_0^{\pi/2} = \frac{512}{315}k. \end{aligned}$$

De manera similar, utilizando $y = r \text{ sen } \theta$, encontramos

$$M_x = k\int_0^{\pi/2}\int_0^{2 \text{ sen } 2\theta} r^3 \text{ sen } \theta\,dr\,d\theta = \frac{512}{315}k.$$

Aquí las coordenadas rectangulares del centro de masa son

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{\frac{512}{315}k}{\frac{16}{9}k} = \frac{32}{35}.$$

■

En el ejemplo 1 podríamos haber señalado el hecho de que $M_x = M_y$ y, consecuentemente, $\bar{x} = \bar{y}$ a partir de que la lámina y la función de densidad son simétricas alrededor del rayo $\theta = \pi/4$.

Cambio de variables: coordenadas rectangulares a polares En algunos casos una integral doble $\iint_R f(x, y)\, dA$ que es difícil o incluso imposible de evaluar utilizando coordenadas rectangulares puede evaluarse fácilmente cuando se recurre a un cambio de variables. Si suponemos que f es continua sobre la región R, y si R puede describirse en coordenadas polares como $0 \le g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r\, dr\, d\theta. \tag{3}$$

La ecuación (3) es particularmente útil cuando f contiene la expresión $x^2 + y^2$, puesto que, en coordenadas polares, no podemos escribir

$$x^2 + y^2 = r^2 \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = r.$$

EJEMPLO 2 Cambio de variables

Use coordenadas polares para evaluar

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8 - x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\, dy\, dx.$$

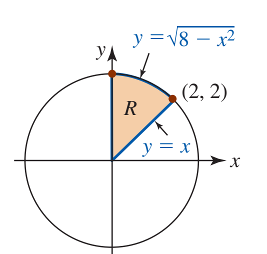


FIGURA 14.5.4 Región R de integración del ejemplo 2

Solución A partir de $x \le y \le \sqrt{8 - x^2}$, $0 \le x \le 2$, hemos dibujado la región R de integración en la FIGURA 14.5.4. Puesto que $x^2 + y^2 = r^2$, la descripción polar de la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$ es $r = \sqrt{8}$. En consecuencia, en coordenadas polares, la región de R está dada por $0 \le r \le \sqrt{8}$, $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$. De acuerdo con $1/(5 + x^2 + y^2) = 1/(5 + r^2)$, la integral original se convierte en

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8 - x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\, dy\, dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2} (2r\, dr)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(5 + r^2) \Big]_0^{\sqrt{8}} d\theta \\
&= \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5) \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \\
&= \frac{1}{2}(\ln 13 - \ln 5)\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \ln \frac{13}{5}.
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 3 Volumen

Encuentre el volumen del sólido que está bajo el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y sobre la región acotada por la gráfica de la circunferencia $x^2 + y^2 - y = 0$.

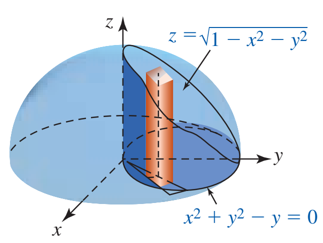


FIGURA 14.5.5 Sólido dentro de un hemisferio del ejemplo 3

Solución De la FIGURA 14.5.5 vemos que

$$V = \iint_R \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA.$$

En coordenadas polares las ecuaciones del hemisferio y la circunferencia se vuelven, respectivamente, $z = \sqrt{1 - r^2}$ y $r = \operatorname{sen} \theta$. Ahora, usando simetría tenemos

$$\begin{aligned}
V = \iint_R \sqrt{1 - r^2}\, dA &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\operatorname{sen} \theta} (1 - r^2)^{1/2} r\, dr\, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}\right]_0^{\operatorname{sen} \theta} d\theta
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \left[1 - (1 - \text{sen}^2\,\theta)^{3/2}\right] d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \left[1 - (\cos^2\theta)^{3/2}\right] d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} \left[1 - (1 - \text{sen}^2\,\theta)\cos\theta\right] d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\left(\theta - \text{sen}\,\theta + \frac{1}{3}\text{sen}^3\,\theta\right)\Bigg]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}\pi - \frac{4}{9} \approx 0.60.$$ ■

Área Advierta que en (1) si $f(r, \theta) = 1$, entonces el **área** de la región R en la figura 14.5.1*a*) está dada por

$$A = \iint_R dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} r\, dr\, d\theta. \qquad (4)$$

La misma observación se cumple para (2) y la figura 14.5.2 cuando $f(r, \theta) = 1$.

$\iint_R$ **NOTAS DESDE EL AULA**

Se le pide reexaminar el ejemplo 3. La gráfica de la circunferencia $r = \text{sen}\,\theta$ se obtiene al variar θ de 0 a π. Sin embargo, efectúe la integración iterada

$$V = \int_0^\pi \int_0^{\text{sen}\,\theta} (1 - r^2)^{1/2}\, r\, dr\, d\theta$$

y vea si obtiene la respuesta *incorrecta* $\pi/3$. ¿Dónde está el error?

Ejercicios 14.5

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-44.

Fundamentos

En los problemas 1-4, emplee la integral doble en coordenadas polares para calcular el área de la región acotada por las gráficas de las ecuaciones polares que se indican.

1. $r = 3 + 3\,\text{sen}\,\theta$

2. $r = 2 + \cos\theta$

3. $r = 2\,\text{sen}\,\theta$, $r = 1$, área común

4. $r = 8\,\text{sen}\,4\theta$, un pétalo

En los problemas 5-10, encuentre el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

5. Un pétalo de $r = 5\cos 3\theta$, $z = 0$, $z = 4$

6. $x^2 + y^2 = 4$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $z = 0$

7. Entre $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 9$, $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, $z = 0$

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$

9. $r = 1 + \cos\theta$, $z = y$, $z = 0$, primer octante

10. $r = \cos\theta$, $z = 2 + x^2 + y^2$, $z = 0$

En los problemas 11-16, encuentre el centro de masa de la lámina que tiene la forma y densidad dadas.

11. $r = 1$, $r = 3$, $x = 0$, $y = 0$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

12. $r = \cos\theta$; densidad ρ en el punto P directamente proporcional a la distancia desde el origen.

13. $y = \sqrt{3}x$, $y = 0$, $x = 3$; $\rho(r, \theta) = r^2$

14. $r = 4\cos 2\theta$, pétalo sobre el eje polar; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

15. Fuera de $r = 2$ y y dentro de $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primer cuadrante; densidad ρ en el punto P inversamente proporcional a la distancia desde el origen.

16. $r = 2 + 2\cos\theta$, $y = 0$, primero y segundo cuadrantes; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas 17-20, encuentre el momento de inercia indicado de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

17. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante); I_x

18. $r = a;\ \rho(r, \theta) = \dfrac{1}{1 + r^4};\ I_x$

19. Fuera de $r = a$ y dentro de $r = 2a\cos\theta$; densidad ρ en un punto P inversamente proporcional al cubo de la distancia desde el origen; I_y

20. Fuera de $r = 1$ y dentro de $r = 2\,\text{sen}\,2\theta$, primer cuadrante; $\rho(r, \theta) = \sec^2\theta$; I_y

En los problemas 21-24, determine el **momento polar de inercia** $I_0 = \iint_R r^2\rho(r, \theta)\,dA = I_x + I_y$ de la lámina que tiene la forma y densidad indicadas.

21. $r = a$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante). [*Sugerencia*: Use el problema 17 y el hecho de que $I_x = I_y$.]

22. $r = \theta,\ 0 \le \theta \le \pi,\ y = 0$; densidad ρ en un punto P proporcional a la distancia desde el origen.

23. $r\theta = 1,\ \frac{1}{3} \le \theta \le 1,\ r = 1,\ r = 3,\ y = 0$; densidad ρ en un punto P inversamente proporcional a la distancia desde el origen. [*Sugerencia*: Integre primero con respecto a θ.]

24. $r = 2a\cos\theta$; $\rho(r, \theta) = k$ (constante)

En los problemas 25-32, evalúe la integral iterada que se indica cambiando a coordenadas polares.

25. $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

26. $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{2}/2}\int_{y}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$

27. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$

28. $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\sqrt{\pi-x^2}} \text{sen}\,(x^2 + y^2)\,dy\,dx$

29. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dy\,dx + \int_{1}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2}{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

30. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{2y-y^2}} (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy$

31. $\displaystyle\int_{-5}^{5}\int_{0}^{\sqrt{25-x^2}} (4x + 3y)\,dy\,dx$

32. $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}\,dx\,dy$

33. La integral impropia $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ es importante en la teoría de probabilidad, estadística y otras áreas de las matemáticas aplicadas. Si I denota la integral, entonces debido a que la variable de integración es una variable sustituta tenemos

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \qquad \text{e} \qquad I = \int_0^\infty e^{-y^2}dy.$$

En vista del problema 53 de los ejercicios 14.2 se tiene

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Emplee coordenadas polares para evaluar la última integral. Calcule el valor de I.

34. Evalúe $\iint_R (x + y)\,dA$ sobre la región que se muestra en la FIGURA 14.5.6.

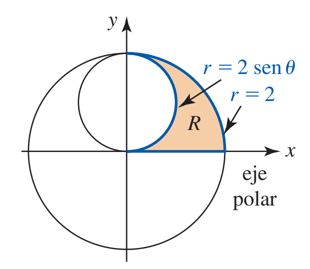


FIGURA 14.5.6 Región R del problema 34

≡ Aplicaciones

35. El tanque de hidrógeno líquido en el transbordador espacial tiene la forma de un cilindro circular recto con una tapa semielipsoidal en cada extremo. El radio de la parte cilíndrica del tanque es de 4.2 m. Determine el volumen del tanque que se muestra en la FIGURA 14.5.7.

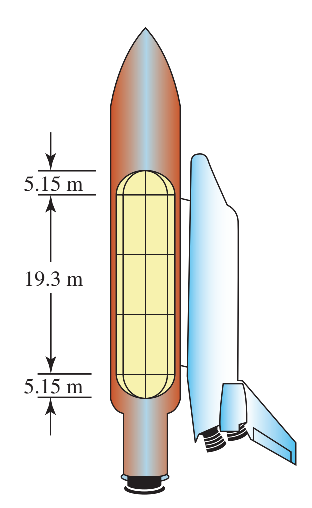


FIGURA 14.5.7 Transbordador espacial del problema 35

36. En algunos estudios de la diseminación de enfermedades de plantas, el número de infecciones por área unitaria como una función de la distancia desde la planta fuente infectada se describe por medio de una fórmula del tipo

$$I(r) = a(r + c)^{-b},$$

donde $I(r)$ es el número de infecciones por unidad de área a una distancia radial r de la planta fuente infectada, y a, b y c son parámetros (positivos) que dependen de la enfermedad.

a) Deduzca una fórmula para el número total de infecciones dentro de un círculo de radio R centrado en la planta fuente infectada; esto es, evalúe $\iint_C I(r)\,dA$, donde C es una región circular de radio R centrada en el origen. Suponga que el parámetro b no es 1 o 2.

b) Muestre que si $b > 2$, entonces el resultado en el inciso *a*) tiende a un límite finito cuando $R \to \infty$.

c) Para la roya del maíz común, el número de infecciones por metro cuadrado se modela como

$$I(r) = 68.585(r + 0.248)^{-2.351},$$

donde r se mide en metros. Encuentre el número total de infecciones.

37. Las densidades de población urbana decaen exponencialmente con la distancia desde el distrito comercial central (DCC); esto es,

$$D(r) = D_0 e^{-r/d},$$

donde $D(r)$ es la densidad de población a una distancia radial r desde el DCC, D_0 es la densidad en el centro y d es un parámetro.

a) Utilizando la fórmula $P = \iint_C D(r)\,dA$, encuentre una expresión para la población total que vive dentro de una región circular C de radio R del DCC.

b) Empleando

$$\frac{\iint_C rD(r)\,dA}{\iint_C D(r)\,dA}$$

determine una expresión para los viajes promedio (distancia recorrida) al DCC de la gente que vive dentro de la región C.

c) Utilizando los resultados de los incisos *a*) y *b*), encuentre la población total y los viajes promedio cuando $R \to \infty$.

38. Se argumenta que el costo, en términos de tiempo, dinero o esfuerzo, de colectar o distribuir material a o desde una localidad es proporcional a la integral $\iint_R r\,dA$, donde R es la región que se cubre y r denota la distancia al sitio de colección/distribución. Suponga, por ejemplo, que un quitanieves se envía a limpiar un área de estacionamiento circular de diámetro D. Muestre que quitar la nieve y acumularla en el perímetro es aproximadamente 70% más costoso que acumular toda la nieve en el centro del estacionamiento. [*Sugerencia*: Establezca por separado la integral para cada caso, empleando una ecuación de coordenadas polares para el círculo con el sitio de colección en el origen.]

14.6 Área de la superficie

Introducción En la sección 6.5 vimos que la longitud de un arco de la gráfica $y = f(x)$ desde $x = a$ a $x = b$ está dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{1}$$

El problema en tres dimensiones, que es la contraparte del problema de la longitud de arco, es encontrar el área $A(S)$ de la porción de la superficie dada por la función $z = f(x, y)$ que tiene primeras derivadas parciales continuas sobre una región cerrada R en el plano xy. Una superficie S de este tipo se dice que es **continua**.

Construcción de una integral Suponga, como se muestra en la FIGURA 14.6.1*a*), que una partición interior P de R se forma utilizando líneas paralelas a los ejes x y y. La partición P consiste entonces de n elementos rectangulares R_k de área $\Delta A_k = \Delta x_k \Delta y_k$ que yacen por completo dentro de R. Deje que $(x_k, y_k, 0)$ denote cualquier punto en un elemento R_k. Como se advierte en la figura 14.6.1*a*), al proyectar los lados de R_k hacia arriba, determinamos dos cantidades: una porción del parche S_k de la superficie y una porción de T_k de un plano tangente en $(x_k, y_k, f(x_k, y_k))$. Parece razonable suponer que cuando R_k es pequeño, el área ΔT_k de T_k es aproximadamente la misma que el área ΔS_k del parche S_k.

Para determinar el área de T_k vamos a elegir $(x_k, y_k, 0)$ en una esquina de R_k como se muestra en la figura 14.6.1*b*). Los vectores indicados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, los cuales forman dos lados de T_k, están dados por

$$\mathbf{u} = \Delta x_k \mathbf{i} + f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \mathbf{k} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \Delta y_k \mathbf{j} + f_y(x_k, y_k)\Delta y_k \mathbf{k},$$

donde $f_x(x_k, y_k)$ y $f_y(x_k, y_k)$ son las pendientes de las rectas que contienen a $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, respectivamente. En este caso de (10) de la sección 11.4 sabemos que $\Delta T_k = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \Delta x_k & 0 & f_x(x_k, y_k)\Delta x_k \\ 0 & \Delta y_k & f_y(x_k, y_k)\Delta y_k \end{vmatrix} \\ &= [-f_x(x_k, y_k)\mathbf{i} - f_y(x_k, y_k)\mathbf{j} + \mathbf{k}]\,\Delta x_k \Delta y_k. \end{aligned}$$

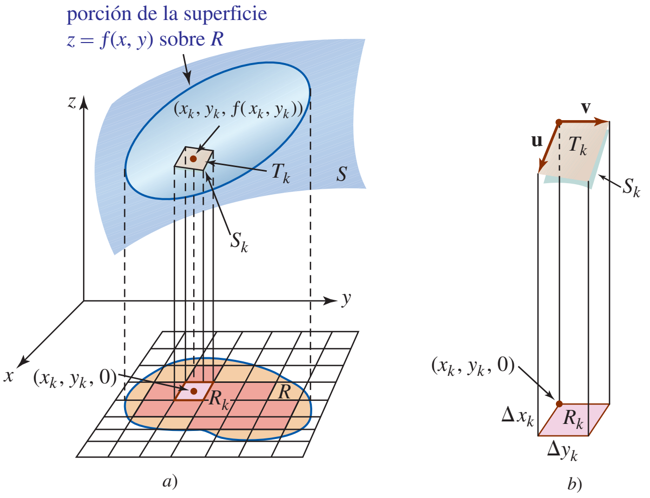


FIGURA 14.6.1 Superficie en *a*); ampliación de R_k, S_k y T_k en *b*)

En otras palabras,

$$\Delta T_k = |\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{[f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2 + 1}\, \Delta x_k \Delta y_k.$$

En consecuencia, el área $A(S)$ es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f_x(x_k, y_k)]^2 + [f_y(x_k, y_k)]^2}\, \Delta x_k \Delta y_k.$$

Al tomar el límite de la suma anterior cuando $\|P\| \to 0$ se llega a la siguiente definición.

Definición 14.6.1 Área de la superficie

Sea f una función para la cual las primeras derivadas parciales f_x y f_y son continuas sobre una región cerrada R. Entonces el **área de la superficie** sobre R está dada por

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA. \qquad (2)$$

Nota: Podría haberse adivinado la forma (2) extendiendo naturalmente la estructura de una variable de (1) a dos variables.

EJEMPLO 1 Empleo de (2)

Determine el área de la superficie de la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está sobre el plano xy y dentro del cilindro $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < b < a$.

Solución Si se define $z = f(x, y)$ por $f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, entonces

$$f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{y} \quad f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}$$

y por ello

$$1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2 = \frac{a^2}{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Por consiguiente, (2) es

$$A(S) = \iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

donde R se indica en la FIGURA 14.6.2. Para evaluar esta integral doble, cambiamos a coordenadas polares. El círculo $x^2 + y^2 = b^2$ se convierte en $r = b, 0 \leq \theta \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} A(S) &= a\int_0^{2\pi}\int_0^b (a^2 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi} -(a^2 - r^2)^{-1/2}\Big]_0^b d\theta \\ &= a\big(a - \sqrt{a^2 - b^2}\big)\int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi a\big(a - \sqrt{a^2 - b^2}\big). \end{aligned}$$ ■

z
y
R
x
$x^2 + y^2 = b^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

FIGURA 14.6.2 Superficie del ejemplo 1

EJEMPLO 2 Empleo de (2)

Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que están dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Solución El área de superficie en cuestión consiste en las dos regiones sombreadas y oscuras de la superficie (arriba y debajo del plano xy) en la FIGURA 14.6.3. Como en el ejemplo 1, (2) se simplifica en

$$A(S) = 2\iint_R \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dA,$$

donde R es la región acotada por la gráfica de $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. El factor adicional de (2) en la integral surge del uso de la simetría. En este caso, en coordenadas polares la frontera de R es simplemente $r = 2\cos\theta$. De tal modo,

$$\begin{aligned} A(S) &= 4\int_0^{\pi}\int_0^{2\cos\theta} (4 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta \\ &= 8(\pi - 2) \approx 9.13. \end{aligned}$$ ■

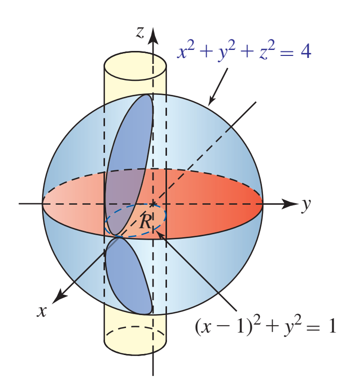


FIGURA 14.6.3 Superficie del ejemplo 2

Diferencial del área de la superficie La función

$$dS = \sqrt{1 + [f_x(x, y)]^2 + [f_y(x, y)]^2}\, dA \tag{3}$$

recibe el nombre de **diferencial del área de la superficie**. Emplearemos esta función en las secciones 15.6 y 15.9.

Ejercicios 14.6

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-45.

Fundamentos

1. Encuentre el área de la superficie de aquella porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está acotada por los planos de coordenadas en el primer octante.
2. Determine el área de la superficie de aquella porción del plano $2x + 3y + 4z = 12$ que está arriba de la región en el primer cuadrante acotada por la gráfica $r = \operatorname{sen} 2\theta$.
3. Determine el área de la superficie de aquella porción del cilindro $x^2 + z^2 = 16$ que está sobre la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 5$.
4. Encuentre el área de la superficie de aquella porción del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está debajo del plano $z = 2$.
5. Determine el área de la superficie de aquella porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ que está arriba del plano xy.
6. Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ que están dentro del cono $z^2 = x^2 + y^2$.
7. Encuentre el área de la superficie de aquella porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ que está arriba de la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas $x = 0$, $y = 0$, $4x^2 + y^2 = 25$. [*Sugerencia*: Integre primero con respecto a x.]
8. Encuentre el área de la superficie de aquella porción de la gráfica de $z = x^2 - y^2$ que está en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.
9. Encuentre el área de la superficie de las porciones de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$.
10. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cono $z^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ que están dentro del cilindro $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Vea la FIGURA 14.6.4.

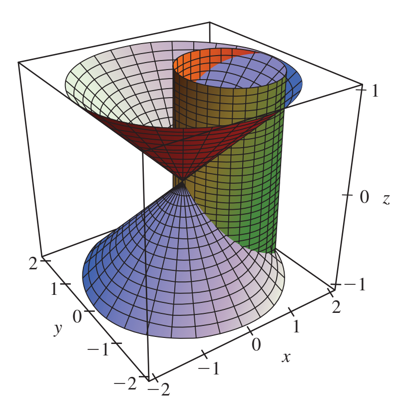


FIGURA 14.6.4 Cono de intersección y cilindro del problema 10

11. Encuentre el área de la superficie de las porciones del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$. [*Sugerencia*: Vea la figura 14.3.11.]

12. Emplee el resultado dado en el ejemplo 1 para demostrar que el área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$. [*Sugerencia*: Considere el límite cuando $b \to a$.]

13. Determine el área de la superficie de aquella porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que está acotada entre $y = c_1$ y $y = c_2$, $0 < c_1 < c_2 < a$. [*Sugerencia*: Emplee coordenadas polares en el plano xz.]

14. Demuestre que el área que se encontró en el problema 13 es la misma que el área de la superficie del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ entre $y = c_1$ y $y = c_2$.

≡ Piense en ello

15. Como se ilustra en la FIGURA 14.6.5, una esfera de radio 1 tiene su centro sobre la superficie de una esfera de radio $a > 1$. Determine el área de la superficie de esa porción de la esfera mayor que es cortada por la esfera más pequeña.

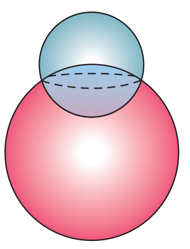


FIGURA 14.6.5 Esferas de intersección del problema 15

16. Sobre la superficie de un globo o, más precisamente, sobre la superficie de la Tierra, las fronteras de los estados de Colorado y Wyoming son ambas "rectángulos esféricos". (En este problema suponemos que la Tierra es una esfera perfecta.) Colorado está acotado por las líneas de longitud 102 °O y 109 °O y las líneas de latitud 37 °N y 41 °N. Wyoming está acotado por las longitudes 104 °O y 111 °O y las latitudes 41 °N y 45 °N. Vea la FIGURA 14.6.6.

a) Sin calcular explícitamente sus áreas, determine cuál de los estados es más grande y explique por qué.

b) ¿En qué porcentaje Wyoming es más grande (o más pequeño) que Colorado? [*Sugerencia*: Suponga que el radio de la Tierra es R. Proyecte un rectángulo esférico en el hemisferio norte que sea determinado por las latitudes θ_1 y θ_2 y las longitudes ϕ_1 y ϕ_2 sobre el plano xy.]

c) Un libro de referencia indica que las áreas de los estados mencionados son 104 247 mi^2 y 97 914 mi^2. ¿Cómo se compara esta respuesta con su respuesta en el inciso *b*)?

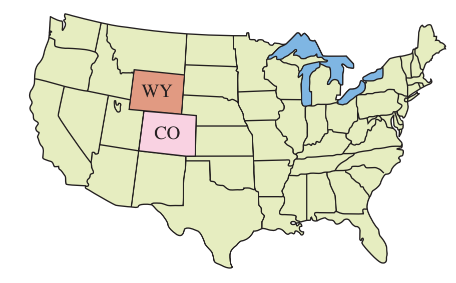


FIGURA 14.6.6 Dos rectángulos esféricos del problema 16

14.7 La integral triple

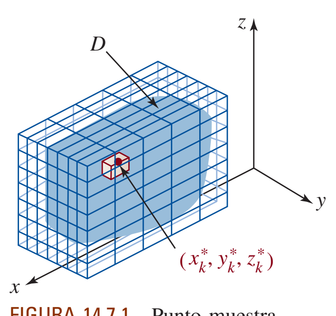


FIGURA 14.7.1 Punto muestra en D_k

Introducción Los pasos que conducen a la definición de la *integral definida tridimensional*, o **integral triple**, $\iiint_D f(x, y, z)\, dV$ son bastante similares a los de la integral doble.

Sea $w = f(x, y, z)$ definida sobre una región cerrada y acotada D del espacio tridimensional.

- Por medio de una retícula tridimensional de planos verticales y horizontales paralelos a los planos de coordenadas, forme una partición P de D en n subregiones (cajas) D_k de volúmenes ΔV_k que se encuentre por completo dentro de D. Vea la FIGURA 14.7.1.
- Considere que $\|P\|$ es la norma de la partición o longitud de la diagonal más larga de la caja D_k.
- Elija un punto muestra (x_k^*, y_k^*, z_k^*) en cada subregión D_k.
- Forme la suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$.

Una suma de la forma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k$, donde (x_k^*, y_k^*, z_k^*) es un punto arbitrario dentro de cada D_k y ΔV_k denota el volumen de cada D_k, recibe el nombre de **suma de Riemann**. El tipo de partición utilizado, donde todos los D_k yacen por completo dentro de D, se denomina **partición interior** de D.

Definición 14.7.1 La integral triple

Sea f una función de tres variables definida sobre una región cerrada D del espacio tridimensional. Entonces la **integral triple de f sobre D**, denotada por medio de $\iiint_D f(x, y, z)\, dV$, se define como

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*, y_k^*, z_k^*\right) \Delta V_k. \tag{1}$$

Como en nuestras discusiones anteriores sobre la integral, cuando f es continua sobre D, entonces el límite en (1) existe; esto es, f es **integrable** sobre D. Las propiedades de integración básicas de una integral triple son las mismas que aquellas de la integral doble dadas en el teorema 14.1.1.

Evaluación mediante integrales iteradas Si la región D está acotada por arriba por la gráfica de $z = g_2(x, y)$ y acotada por abajo por la gráfica de $z = g_1(x, y)$, entonces es posible demostrar que la integral triple (1) puede expresarse como una integral doble de la integral parcial $\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$; esto es,

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz \right] dA, \tag{2}$$

donde R es la proyección ortogonal de D sobre el plano xy. En particular, si R es una región de tipo I definida por:

$$R\colon a \le x \le b,\ h_1(x) \le y \le h_2(x),$$

entonces, como se ilustra en la FIGURA 14.7.2, la integral triple de f sobre D puede escribirse como una integral iterada:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx. \tag{3}$$

Para evaluar la integral iterada en (3) empezamos evaluando la integral definida parcial

$$\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

en la cual x y y se mantienen fijas.

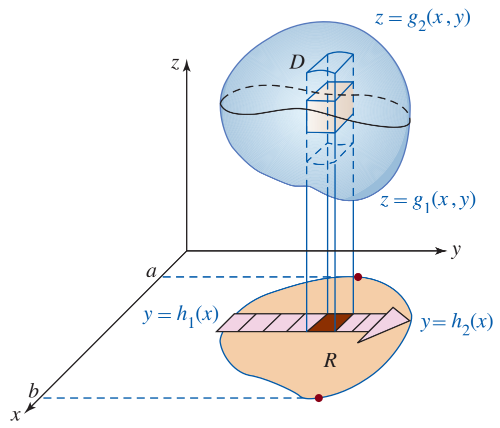


FIGURA 14.7.2 Región tipo I en el plano xy

Por otro lado, si R es una región de tipo II:

$$R\colon c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y),$$

entonces (2) se convierte en

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy. \tag{4}$$

En una integral doble hay sólo dos posibles órdenes de integración: $dy\,dx$ y $dx\,dy$. Las integrales triples en (3) y (4) ilustran dos de *seis* posibles órdenes de integración:

$$\begin{matrix} dz\,dy\,dx & dz\,dx\,dy & dy\,dx\,dz \\ dx\,dy\,dz & dx\,dz\,dy & dy\,dz\,dx. \end{matrix}$$

Las dos últimas diferenciales nos indican el plano de coordenadas en el cual se localiza la región R. Por ejemplo, la integral iterada correspondiente al orden de integración $dx\,dz\,dy$ tendría la forma

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{g_1(y,\,z)}^{g_2(y,\,z)} f(x, y, z)\,dx\,dz\,dy.$$

La interpretación geométrica de esta integral y la región R de integración en el plano yz se muestran en la FIGURA 14.7.3.

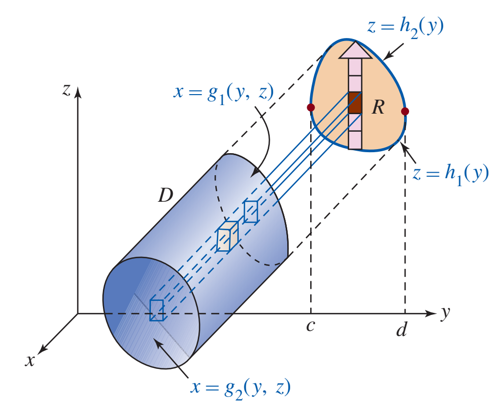


FIGURA 14.7.3 Región tipo I en el plano yz

Aplicaciones A continuación se listan algunas de las aplicaciones estándar de la integral triple.

Volumen: Si $f(x, y, z) = 1$, entonces el **volumen** del sólido D es

$$V = \iiint_D dV.$$

Masa: Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad (masa por volumen unitario), entonces la **masa** del sólido D está dada por

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z)\,dV.$$

Primeros momentos: Los **primeros momentos** del sólido alrededor de los planos de coordenadas indicados por los subíndices están dados por

$$M_{xy} = \iiint_D z\rho(x, y, z)\,dV, \quad M_{xz} = \iiint_D y\rho(x, y, z)\,dV, \quad M_{yz} = \iiint_D x\rho(x, y, z)\,dV.$$

Centro de masa: Las coordenadas del **centro de masa** de D están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Centroide: Si $\rho(x, y, z) =$ constante, el centro de masa de D recibe el nombre de **centroide** del sólido.

Segundos momentos: Los **segundos momentos**, o **momentos de inercia**, de D alrededor de los ejes de coordenadas indicados por los subíndices están dados por

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dV, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2)\rho(x, y, z)\,dV, \quad I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\,dV.$$

Radio de giro: Como en la sección 14.4, si I es un momento de inercia del sólido en torno a un eje dado, entonces el **radio de giro** es

$$R_g = \sqrt{\frac{I}{m}}.$$

EJEMPLO 1 Volumen

Encuentre el volumen del sólido en el primer octante acotado por las gráficas de $z = 1 - y^2$, $y = 2x$ y $x = 3$.

Solución Como se indica en la FIGURA 14.7.4*a*), la primera integración con respecto a z será de 0 a $1 - y^2$. Además, de la figura 14.7.4*b*) vemos que la proyección del sólido D sobre el plano xy es una región de tipo II. Por consiguiente, a continuación integramos, con respecto a x, de $y/2$ a 3. La última integración es con respecto a y de 0 a 1. De tal manera,

$$\begin{aligned} V = \iiint_D dV &= \int_0^1 \int_{y/2}^3 \int_0^{1-y^2} dz\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \int_{y/2}^3 (1 - y^2)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 (x - xy^2)\Big]_{y/2}^3 dy \\ &= \int_0^1 \left(3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3\right) dy \\ &= \left(3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4\right)\Big]_0^1 = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

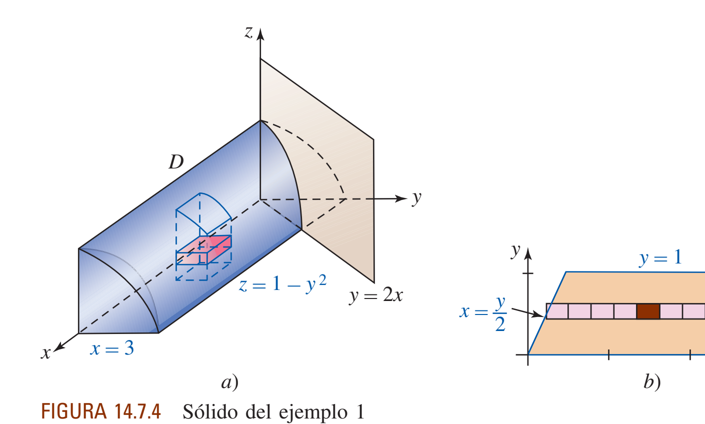


FIGURA 14.7.4 Sólido del ejemplo 1

El lector debe observar que el volumen en el ejemplo 1 podría haberse obtenido con la misma facilidad por medio de una integral doble.

EJEMPLO 2 Volumen

Calcule la integral triple que produce el volumen del sólido que tiene la forma determinada por el cono de un manto $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ y el paraboloide $x = 6 - y^2 - z^2$.

Solución Al sustituir $y^2 + z^2 = x^2$ en $y^2 + z^2 = 6 - x$, encontramos que $x^2 = 6 - x$ o $(x + 3)(x - 2) = 0$. Así, las dos superficies se intersecan en el plano $x = 2$. La proyección sobre el plano yz de la curva de intersección es $y^2 + z^2 = 4$. Al utilizar simetría y referirnos a la FIGURA 14.7.5*a*) y *b*), vemos que

$$V = \iiint_D dV = 4\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx\,dz\,dy.$$

Si bien la evaluación de esta integral es directa, sin duda resulta "descuidada". Regresaremos a esta integral en la siguiente sección después de haber examinado integrales triples en otros sistemas de coordenadas.

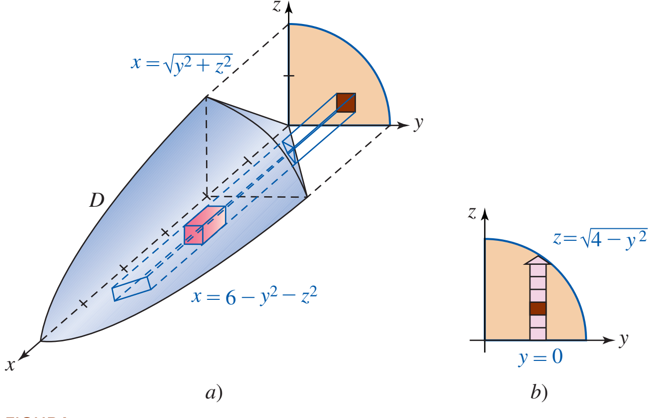


FIGURA 14.7.5 Sólido del ejemplo 2 ■

EJEMPLO 3 Centro de masa

Un sólido tiene la forma determinada por las gráficas del cilindro $|x| + |y| = 1$ y los planos $z = 2$ y $z = 4$. Encuentre su centro de masa si la densidad está dada por $\rho(x, y, z) = kz$, con k una constante.

Solución El sólido y su proyección ortogonal sobre una región R del tipo I en el plano xy se ilustran en la FIGURA 14.7.6*a*). La ecuación $|x| + |y| = 1$ es equivalente a cuatro rectas:

$$x + y = 1, x > 0, y > 0; \qquad x - y = 1, x > 0, y < 0;$$
$$-x + y = 1, x < 0, y > 0; \qquad -x - y = 1, x < 0, y < 0.$$

Puesto que la función de densidad $\rho(x, y, z) = kz$ es simétrica sobre R, concluimos que el centro de masa yace sobre el eje z; esto es, necesitamos calcular sólo m y M_{xy}. De la simetría y la figura 14.7.6*b*) se concluye que

$$\begin{aligned} m &= 4\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 kz\,dz\,dy\,dx = 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{2}z^2\Big]_2^4 dy\,dx \\ &= 24k\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx \\ &= 24k\int_0^1 (1 - x)\,dx \\ &= 24k\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big]_0^1 = 12k, \\ M_{xy} &= 4\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 kz^2\,dz\,dy\,dx = 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\frac{1}{3}z^3\Big]_2^4 dy\,dx \\ &= \frac{224}{3}k\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx = \frac{112}{3}k. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{112}{3}k}{12k} = \frac{28}{9}.$$

Las coordenadas del centro de masa son entonces $\left(0, 0, \frac{28}{9}\right)$.

FIGURA 14.7.6 Sólido del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Repaso del ejemplo 3

Determine el momento de inercia del sólido del ejemplo 3 alrededor del eje z. Encuentre el radio de giro.

Solución Sabemos que $I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)kz\, dV$. Con simetría podemos escribir esta integral triple como

$$\begin{aligned}
I_z &= 4k\int_0^1\int_0^{1-x}\int_2^4 (x^2 + y^2)z\, dz\, dy\, dx \\
&= 4k\int_0^1\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\frac{1}{2}z^2\Big]_2^4 dy\, dx \\
&= 24k\int_0^1\int_0^{1-x} (x^2 + y^2)\, dy\, dx \\
&= 24k\int_0^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)\Big]_0^{1-x} dx \\
&= 24k\int_0^1 \left[x^2 - x^3 + \frac{1}{3}(1-x)^3\right] dx \\
&= 24k\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{12}(1-x)^4\right]_0^1 = 4k.
\end{aligned}$$

Del ejemplo 3 es claro que $m = 12k$ y por ello se deduce que el radio de giro es

$$R_g = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{4k}{12k}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}.$$

El último ejemplo ilustra cómo cambiar el orden de integración en una integral triple.

EJEMPLO 5 Cambio del orden de integración

Cambie el orden de integración en

$$\int_0^6\int_0^{4-2x/3}\int_0^{3-x/2-3y/4} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

a $dy\, dx\, dz$.

Solución Como se observa en la FIGURA 14.7.7*a*), la región D es el sólido en el primer octante acotado por los tres planos de coordenadas y el plano $2x + 3y + 4z = 12$. Con referencia a la figura 14.7.7*b*) y la tabla incluida, concluimos que

$$\int_0^6\int_0^{4-2x/3}\int_0^{3-x/2-3y/4} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx = \int_0^3\int_0^{6-2z}\int_0^{4-2x/3-4z/3} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz.$$

Orden de integración	Primera integración	Segunda integración	Tercera integración
$dz\,dy\,dx$	0 a $3 - x/2 - 3y/4$	0 a $4 - 2x/3$	0 a 6
$dy\,dx\,dz$	0 a $4 - 2x/3 - 4z/3$	0 a $6 - 2z$	0 a 3

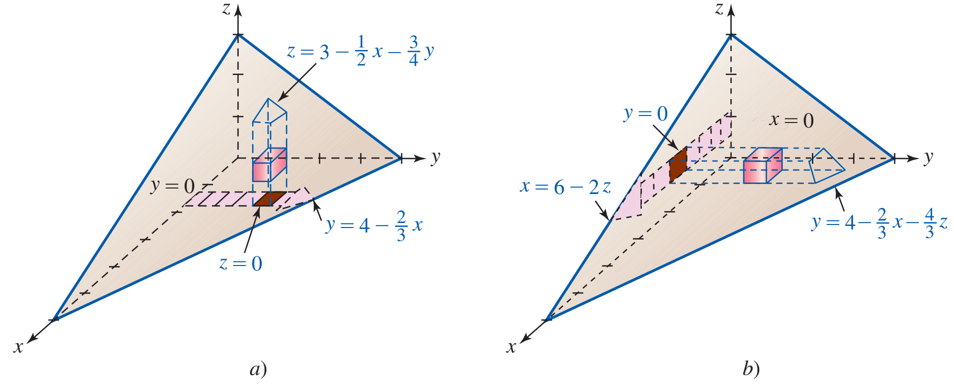


FIGURA 14.7.7 Cambio de integración de $dz\,dy\,dx$ a $dy\,dx\,dz$ en el ejemplo 5 ■

Ejercicios 14.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-45.

Fundamentos

En los problemas 1-8, evalúe la integral iterada que se indica.

1. $\int_2^4 \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 (x + y + z)\,dx\,dy\,dz$

2. $\int_1^3 \int_1^x \int_2^{xy} 24xy\,dz\,dy\,dx$

3. $\int_0^6 \int_0^{6-x} \int_0^{6-x-z} dy\,dz\,dx$

4. $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{\sqrt{y}} 4x^2z^3\,dz\,dy\,dx$

5. $\int_0^{\pi/2} \int_0^{y^2} \int_0^y \cos\left(\frac{x}{y}\right) dz\,dx\,dy$

6. $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{y}}^2 \int_0^{e^{x^2}} x\,dz\,dx\,dy$

7. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\,dz\,dx\,dy$

8. $\int_0^4 \int_0^{1/2} \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}\,dy\,dx\,dz$

9. Evalúe $\iiint_D z\,dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por las gráficas de $y = x$, $y = x - 2$, $y = 1$, $y = 3$, $z = 0$ y $z = 5$.

10. Evalúe $\iiint_D (x^2 + y^2)\,dV$, donde D es la región acotada por las gráficas de $y = x^2$, $z = 4 - y$ y $z = 0$.

En los problemas 11 y 12, cambie el orden de integración indicado en cada uno de los otros cinco órdenes.

11. $\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_{x+2y}^4 f(x, y, z)\,dz\,dx\,dy$

12. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{36-9x^2}/2} \int_1^3 f(x, y, z)\,dz\,dy\,dx$

En los problemas 13 y 14, considere el sólido dado en la figura. Plantee, pero no evalúe, las integrales que producen el volumen V del sólido utilizando los órdenes de integración indicados.

13.

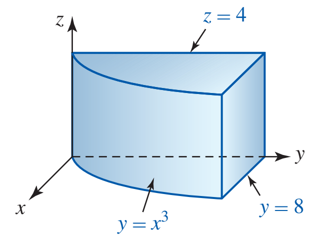


FIGURA 14.7.8 Sólido del problema 13

a) $dz\,dy\,dx$
b) $dx\,dz\,dy$
c) $dy\,dx\,dz$

14.

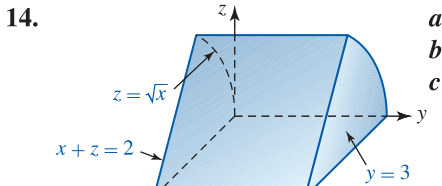


FIGURA 14.7.9 Sólido del problema 14

a) $dx\,dz\,dy$
b) $dy\,dx\,dz$
c) $dz\,dx\,dy$ [*Sugerencia*: Esto requerirá dos integrales.]

En los problemas 15-20, dibuje la región D cuyo volumen V está dado por la integral iterada.

15. $\int_0^4 \int_0^3 \int_0^{2-2z/3} dx\,dz\,dy$

16. $4\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} \int_4^{\sqrt{25-x^2-y^2}} dz\,dx\,dy$

17. $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^5 dz\,dy\,dx$

18. $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz\,dy\,dx$

19. $\int_0^2 \int_0^{2-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dz\,dy$

20. $\int_1^3 \int_0^{1/x} \int_0^3 dy\,dz\,dx$

En los problemas 21-24, encuentre el volumen V del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones dadas.

21. $x = y^2$, $4 - x = y^2$, $z = 0$, $z = 3$

22. $x^2 + y^2 = 4$, $z = x + y$, los planos de coordenadas, el primer octante.

23. $y = x^2 + z^2, y = 8 - x^2 - z^2$

24. $x = 2, y = x, y = 0, z = x^2 + y^2, z = 0$

25. Encuentre el centro de masa del sólido dado en la figura 14.7.8 si la densidad ρ en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

26. Encuentre el centroide del sólido de la figura 14.7.9 si la densidad ρ es constante.

27. Determine el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $x^2 + z^2 = 4$, $y = 0$ y $y = 3$ si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xz.

28. Encuentre el centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $y = x^2$, $y = x$, $z = y + 2$ y $z = 0$ si la densidad ρ en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

En los problemas 29 y 30, plantee, pero no evalúe, las integrales iteradas que producen la masa m del sólido que tiene la forma y densidad indicadas.

29. $x^2 + y^2 = 1, z + y = 8, z - 2y = 2;$
$\rho(x, y, z) = x + y + 4$

30. $x^2 + y^2 - z^2 = 1, z = -1, z = 2; \rho(x, y, z) = z^2$ [*Sugerencia*: No use $dz\, dy\, dx$.]

31. Calcule el momento de inercia del sólido de la figura 14.7.8 alrededor del eje y si la densidad ρ es como se indica en el problema 25. Determine el radio de giro.

32. Calcule el momento de inercia del sólido de la figura 14.7.9 alrededor del eje x si la densidad ρ es constante. Determine el radio de giro.

33. Calcule el momento de inercia alrededor del eje z del sólido en el primer octante que está acotado por los planos de coordenadas y la gráfica $x + y + z = 1$ si la densidad ρ es constante.

34. Determine el momento de inercia alrededor del eje y del sólido acotado por las gráficas $z = y, z = 4 - y, z = 1, z = 0, x = 2$ y $x = 0$ si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano yz.

En los problemas 35 y 36, plantee, pero no evalúe, la integral iterada que produce el momento de inercia indicado del sólido que tiene la forma y densidad que se señalan.

35. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 5$; densidad ρ en un punto P directamente proporcional a la distancia desde el origen; I_z

36. $x^2 + z^2 = 1, y^2 + z^2 = 1$; densidad ρ en el punto P directamente proporcional a la distancia desde el plano yz; I_y

14.8 Integrales triples en otros sistemas de coordenadas

Introducción A partir de la geometría de una región en el espacio tridimensional, la evaluación de una integral triple sobre la región puede a menudo facilitarse al utilizar un nuevo sistema de coordenadas.

Coordenadas cilíndricas El sistema de coordenadas cilíndricas combina la descripción polar de un punto en el plano con la descripción rectangular de la componente z de un punto en el espacio. Como se advierte en la FIGURA 14.8.1*a*), las coordenadas cilíndricas de un punto P se denotan mediante la triada ordenada (r, θ, z). La palabra *cilíndricas* surge del hecho de que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de los planos $z =$ constante, $\theta =$ constante, con un cilindro $r =$ constante. Vea la figura 14.8.1*b*).

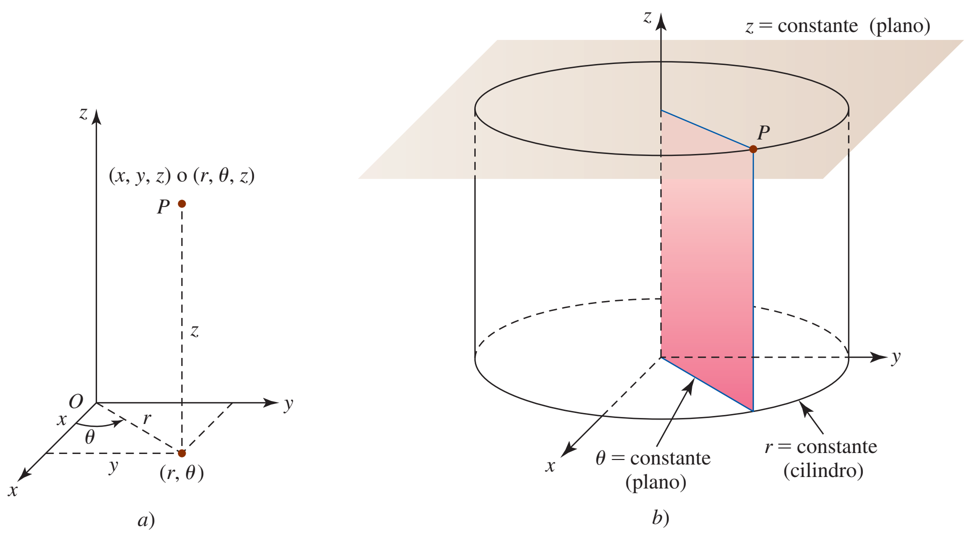


FIGURA 14.8.1 Coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio tridimensional

Coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares De la figura 14.8.1*a*) también vemos que las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto se obtienen de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) mediante las ecuaciones.

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z. \tag{1}$$

EJEMPLO 1 Centro de masa

Convierta $(8, \pi/3, 7)$ en coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

Solución De (1),

$$x = 8\cos\frac{\pi}{3} = 8\left(\frac{1}{2}\right) = 4$$

$$y = 8\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3} = 8\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

$$z = 7.$$

Entonces, $(8, \pi/3, 7)$ es equivalente a $(4, 4\sqrt{3}, 7)$ en coordenadas rectangulares. ■

Coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas Para convertir las coordenadas rectangulares (x, y, z) de un punto en coordenadas cilíndricas (r, θ, z), usamos

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}, \qquad z = z. \tag{2}$$

EJEMPLO 2 Centro de masa

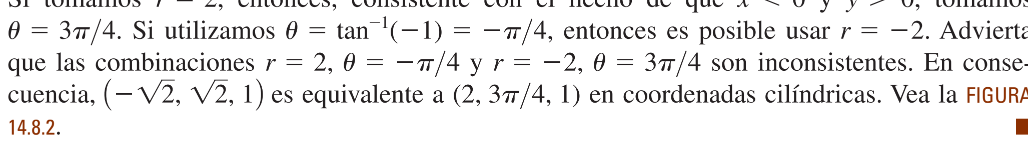
Convierta $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$ en coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas.

Solución De (2) vemos que

$$r^2 = \left(-\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

$$z = 1.$$


Si tomamos $r = 2$, entonces, consistente con el hecho de que $x < 0$ y $y > 0$, tomamos $\theta = 3\pi/4$. Si utilizamos $\theta = \tan^{-1}(-1) = -\pi/4$, entonces es posible usar $r = -2$. Advierta que las combinaciones $r = 2$, $\theta = -\pi/4$ y $r = -2$, $\theta = 3\pi/4$ son inconsistentes. En consecuencia, $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1\right)$ es equivalente a $(2, 3\pi/4, 1)$ en coordenadas cilíndricas. Vea la FIGURA 14.8.2. ■

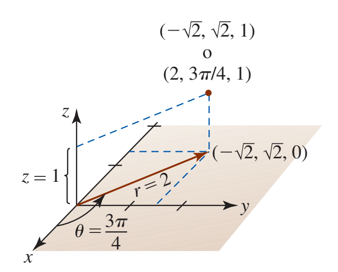


FIGURA 14.8.2. Conversión de coordenadas rectangulares en coordenadas cilíndricas en el ejemplo 2

Integrales triples en coordenadas cilíndricas Recuerde de la sección 14.5 que el área de un "rectángulo polar" es $\Delta A = r^*\Delta r\Delta\theta$, donde r^* es el radio promedio. De la FIGURA 14.8.3*a*) vemos que el volumen de una "cuña cilíndrica" es simplemente

$$\Delta V = (\text{área de la base}) \cdot (\text{altura}) = r^*\Delta r\Delta\theta\Delta z.$$

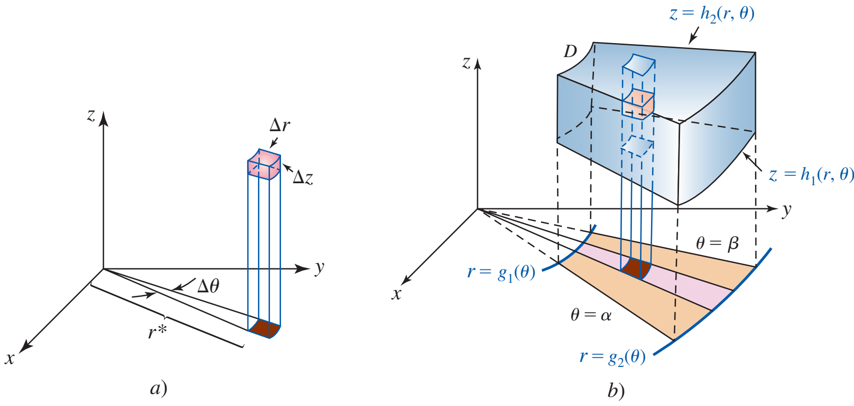


FIGURA 14.8.3 Cuña cilíndrica en *a*); región en el espacio tridimensional en *b*)

Entonces, si $f(r, \theta, z)$ es una función continua sobre la región D, como se ilustra en la figura 14.8.3*b*), la integral triple de F sobre D está dada por

$$\iiint_D f(r, \theta, z)\, dV = \iint_R \left[\int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, dz \right] dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(r,\theta)}^{h_2(r,\theta)} f(r, \theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta.$$

EJEMPLO 3 Centro de masa

Un sólido en el primer octante tiene la forma determinada por la gráfica del cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$ y $y = 0$. Determine el centro de masa si la densidad está dada por $\rho(r, \theta, z) = r$.

Solución En vista de (2), la ecuación del cono es $z = r$. Por consiguiente, vemos de la FIGURA 14.8.4 que

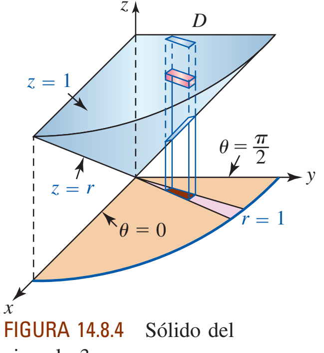


FIGURA 14.8.4 Sólido del ejemplo 3

$$m = \iiint_D r\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r(r\, dz\, dr\, d\theta)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^2 z \Big]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 - r^3)\, dr\, d\theta = \frac{1}{24}\pi,$$

$$M_{xy} = \iiint_D zr\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 zr^2\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{1}{2} z^2 r^2 \Big]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^2 - r^4)\, dr\, d\theta = \frac{1}{30}\pi.$$

Empleando $y = r \operatorname{sen} \theta$ y $x = r \cos \theta$, tenemos también que

$$M_{xz} = \iiint_D r^2 \operatorname{sen} \theta\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 \operatorname{sen} \theta\, dz\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r^3 z \operatorname{sen} \theta \Big]_r^1 dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^1 (r^3 - r^4) \operatorname{sen} \theta\, dr\, d\theta = \frac{1}{20},$$

$$M_{yz} = \iiint_D r^2 \cos \theta\, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \int_r^1 r^3 \cos \theta\, dz\, dr\, d\theta = \frac{1}{20}.$$

Por consiguiente,

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38,$$

$$\bar{y} = \frac{M_{xz}}{m} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{6}{5\pi} \approx 0.38,$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{\frac{1}{30}\pi}{\frac{1}{24}\pi} = \frac{4}{5} = 0.8.$$

El centro de masa tiene las coordenadas aproximadas (0.38, 0.38, 0.8). ■

EJEMPLO 4 Centro de masa

Evalúe la integral de volumen

$$V = 4\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{6-y^2-z^2} dx\,dz\,dy$$

del ejemplo 2 en la sección 14.7.

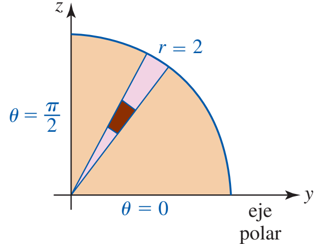


FIGURA 14.8.5 Versión polar de la figura 14.7.5*b*)

Solución Si introducimos coordenadas polares en el plano yz mediante $y = r\cos\theta$, $z = r\,\text{sen}\,\theta$, entonces las coordenadas cilíndricas de un punto en el espacio tridimensional son (r, θ, x). La descripción polar de la figura 14.7.5*b*) está dada en la FIGURA 14.8.5. En este caso, puesto que $y^2 + z^2 = r^2$, tenemos

$$x = \sqrt{y^2+z^2} = r \qquad \text{y} \qquad x = 6 - y^2 - z^2 = 6 - r^2.$$

Por consiguiente, la integral se transforma en

$$V = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2\int_r^{6-r^2} r\,dx\,dr\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 rx\Big]_r^{6-r^2} dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (6r - r^3 - r^2)\,dr\,d\theta$$

$$= 4\int_0^{\pi/2}\left(3r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3\right)\Big]_0^2 d\theta$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{32}{3}\pi.$$ ■

Coordenadas esféricas Como se ve en la FIGURA 14.8.6*a*), las **coordenadas esféricas** de un punto P están dadas por la triada ordenada (ρ, ϕ, θ), donde ρ es la distancia del origen a P, ϕ es el ángulo entre el eje z positivo y el vector $\overrightarrow{OP}$, y θ es el ángulo medido desde el eje x positivo hasta la proyección del vector $\overrightarrow{OQ}$ de $\overrightarrow{OP}$. El ángulo θ es el mismo ángulo que en coordenadas polares y cilíndricas. La figura 14.8.6*b*) muestra que un punto P en el espacio está determinado por la intersección de un cono ϕ = constante, un plano θ = constante y una esfera ρ = constante; de ahí surge el nombre de coordenadas "esféricas".

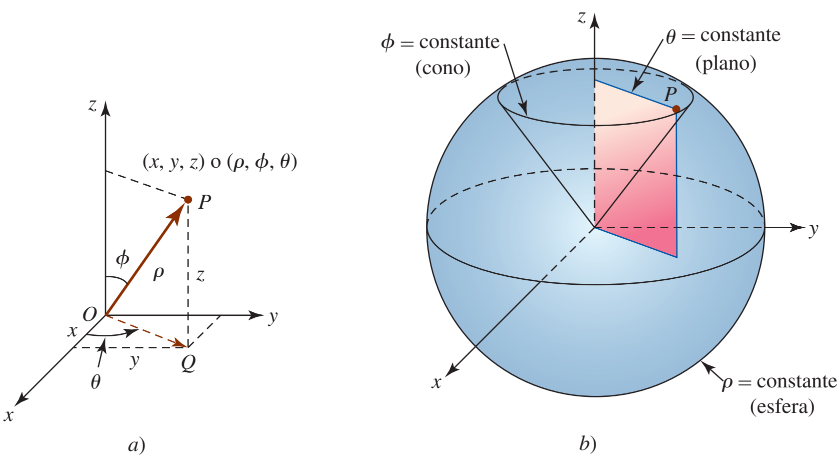


FIGURA 14.8.6 Coordenadas esféricas de un punto en el espacio tridimensional

Coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares y cilíndricas Para transformar coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) a coordenadas rectangulares (x, y, z), observamos de la figura 14.8.6*a*) que

$$x = |\overrightarrow{OQ}|\cos\theta, \quad y = |\overrightarrow{OQ}|\,\text{sen}\,\theta, \quad z = |\overrightarrow{OP}|\cos\phi.$$

Puesto que $|\overrightarrow{OQ}| = \rho\,\text{sen}\,\phi$ y $|\overrightarrow{OP}| = \rho$, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$x = \rho\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, \quad y = \rho\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \quad z = \rho\cos\phi. \tag{3}$$

Suele tomarse $\rho \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$. Además, puesto que $|\overrightarrow{OQ}| = \rho \text{ sen } \phi = r$, las fórmulas

$$r = \rho \text{ sen } \phi, \quad \theta = \theta, \quad z = \rho \cos \phi \tag{4}$$

nos permiten transformar las coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) en coordenadas cilíndricas (r, θ, z). ■

EJEMPLO 5 Centro de masa

Convierta las coordenadas esféricas $(6, \pi/4, \pi/3)$ en

a) coordenadas rectangulares y ***b***) coordenadas cilíndricas.

Solución

a) Identificando $\rho = 6$, $\phi = \pi/4$ y $\theta = \pi/3$, encontramos de (3) que

$$x = 6 \text{ sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$$y = 6 \text{ sen}\frac{\pi}{4}\text{ sen}\frac{\pi}{3} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

$$z = 6 \cos\frac{\pi}{4} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}.$$

Las coordenadas rectangulares del punto son $\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{6}, 3\sqrt{2}\right)$.

b) De (4) obtenemos

$$r = 6 \text{ sen}\frac{\pi}{4} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$z = 6 \cos\frac{\pi}{4} = 6\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{2}.$$

De tal modo, las coordenadas cilíndricas del punto son $\left(3\sqrt{2}, \pi/3, 3\sqrt{2}\right)$. ■

Coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas Para convertir las coordenadas rectangulares (x, y, z) en coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ), usamos

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{5}$$

Integrales triples en coordenadas esféricas Como se observa en la FIGURA 14.8.7, el volumen de una "cuña esférica" está dado por la aproximación

$$\Delta V \approx \rho^2 \text{ sen } \phi\, \Delta\rho\, \Delta\phi\, \Delta\theta.$$

De tal modo, en una integral triple de una función continua en coordenadas esféricas $f(\rho, \phi, \theta)$, la diferencial de volumen dV es

$$dV = \rho^2 \text{ sen } \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

Por consiguiente, una integral triple común en coordenadas esféricas tiene la forma

$$\iiint_D f(\rho, \phi, \theta)\, dV = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} \int_{h_1(\phi, \theta)}^{h_2(\phi, \theta)} f(\rho, \phi, \theta)\, \rho^2 \text{ sen } \phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

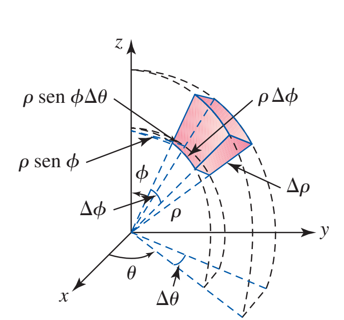


FIGURA 14.8.7 Cuña esférica

EJEMPLO 6 Centro de masa

Emplee coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido del ejemplo 3.

Solución Empleando (3),

$$z = 1 \text{ se vuelve } \rho\cos\phi = 1 \text{ o } \rho = \sec\phi,$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ se vuelve } \phi = \pi/4.$$

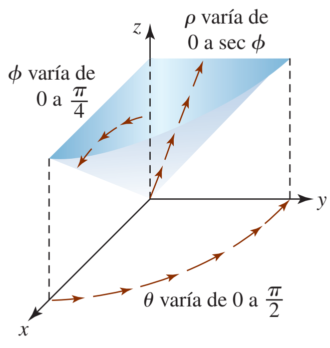


FIGURA 14.8.8 Sólido del ejemplo 3

Como se indica en la FIGURA 14.8.8, $V = \iiint_D dV$ escrita como una integral iterada es

$$V = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{3}\rho^3\Big]_0^{\sec\phi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \sec^3\phi \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/4} \tan\phi \sec^2\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\tan^2\phi\Big]_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{1}{12}\pi.$$

■

EJEMPLO 7 Centro de masa

Determine el momento de inercia en torno al eje z del sólido homogéneo acotado entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $a < b$.

Utilizamos un símbolo diferente para la densidad para evitar la confusión con el símbolo ρ de coordenadas esféricas.

Solución Si $\delta(\rho, \phi, \theta) = k$ es la densidad, entonces

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) k\, dV.$$

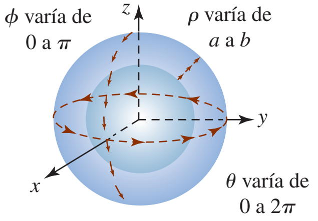


FIGURA 14.8.9 Límites de integración del ejemplo 7

De (3) encontramos $x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi$, y de la primera ecuación en (5) vemos que las ecuaciones de las esferas son simplemente $\rho = a$ y $\rho = b$. Vea la FIGURA 14.8.9. Consecuentemente, en coordenadas esféricas la integral anterior se vuelve

$$I_z = k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi(\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta)$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^b \rho^4 \operatorname{sen}^3\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{5}\rho^5 \operatorname{sen}^3\phi\Big]_a^b d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}k(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\phi) \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{5}k(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi} \left(-\cos\phi + \frac{1}{3}\cos^3\phi\right)\Big]_0^{\pi} d\theta$$

$$= \frac{4}{15}k(b^5 - a^5)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{8}{15}\pi k(b^5 - a^5).$$

■

$\iiint_D$ NOTAS DESDE EL AULA

Las coordenadas esféricas se usan en la navegación. Si consideramos a la Tierra como una esfera de radio fijo centrada en el origen, entonces un punto P puede ubicarse especificando dos ángulos θ y ϕ. Como se muestra en la FIGURA 14.8.10, cuando ϕ se mantiene constante, la curva resultante se denomina **paralela**. Los valores fijos de θ producen curvas llamadas **círculos grandes**. La mitad de uno de estos círculos grandes que une los polos norte y sur recibe el nombre de **meridiano**. La intersección de una paralela y un meridiano produce la posición de un punto P. Si $0° \leq \phi \leq 180°$ y $-180° \leq \theta \leq 180°$, se dice que los ángulos $90° - \phi$ y θ son, respectivamente, la **latitud** y **longitud** de P. El **meridiano primo** corresponde a una longitud de 0°. La latitud del ecuador es 0°; las latitudes de los polos norte y sur son, a su vez, +90° (o 90° norte) y −90° (o 90° sur).

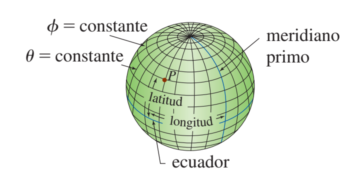


FIGURA 14.8.10 Latitudes y longitudes

Ejercicios 14.8 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-45.

Fundamentos

En los problemas 1-6, convierta el punto dado de coordenadas cilíndricas a coordenadas rectangulares.

1. $(10, 3\pi/4, 5)$ **2.** $(2, 5\pi/6, -3)$

3. $(\sqrt{3}, \pi/3, -4)$ **4.** $(4, 7\pi/4, 0)$

5. $(5, \pi/2, 1)$ **6.** $(10, 5\pi/3, 2)$

En los problemas 7-12, convierta el punto dado de coordenadas rectangulares a coordenadas cilíndricas.

7. $(1, -1, -9)$ **8.** $(2\sqrt{3}, 2, 17)$

9. $(-\sqrt{2}, \sqrt{6}, 2)$ **10.** $(1, 2, 7)$

11. $(0, -4, 0)$ **12.** $(\sqrt{7}, -\sqrt{7}, 3)$

En los problemas 13-16, convierta la ecuación dada a coordenadas cilíndricas.

13. $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ **14.** $x + y - z = 1$

15. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ **16.** $x^2 + z^2 = 16$

En los problemas 17-20, convierta la ecuación dada a coordenadas rectangulares.

17. $z = r^2$ **18.** $z = 2r \operatorname{sen} \theta$

19. $r = 5 \sec \theta$ **20.** $\theta = \pi/6$

En los problemas 21-24, use una integral triple y coordenadas cilíndricas para determinar el volumen del sólido que está acotado por las gráficas de las ecuaciones que se indican.

21. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0$

22. $z = 10 - x^2 - y^2, z = 1$

23. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 25, z = 0$

24. $y = x^2 + z^2, 2y = x^2 + z^2 + 4$

En los problemas 25-28, emplee una integral triple y coordenadas cilíndricas para determinar la cantidad indicada.

25. El centroide del sólido homogéneo acotado por el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$.

26. El centro de masa del sólido acotado por las gráficas de $y^2 + z^2 = 16$, $x = 0$ y $x = 5$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano yz.

27. El momento de inercia en torno al eje z del sólido acotado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ y por abajo por el plano $z = 2$, donde la densidad en un punto P es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el eje z.

28. El momento de inercia alrededor del eje x del sólido acotado por el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 1$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el eje z.

En los problemas 29-34, convierta el punto dado de coordenadas esféricas a

a) coordenadas rectangulares y

b) coordenadas cilíndricas.

29. $(\frac{2}{3}, \pi/2, \pi/6)$ **30.** $(5, 5\pi/4, 2\pi/3)$

31. $(8, \pi/4, 3\pi/4)$ **32.** $(\frac{1}{3}, 5\pi/3, \pi/6)$

33. $(4, 3\pi/4, 0)$ **34.** $(1, 11\pi/6, \pi)$

En los problemas 35-40, convierta los puntos dados de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas.

35. $(-5, -5, 0)$ **36.** $(1, -\sqrt{3}, 1)$

37. $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}, 1)$ **38.** $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, 0, -\frac{1}{2})$

39. $(3, -3, 3\sqrt{2})$ **40.** $(1, 1, -\sqrt{6})$

En los problemas 41-44, convierta la ecuación dada a coordenadas esféricas.

41. $x^2 + y^2 + z^2 = 64$ **42.** $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$

43. $z^2 = 3x^2 + 3y^2$ **44.** $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$

En los problemas 45-48, convierta la ecuación dada a coordenadas rectangulares.

45. $\rho = 10$ **46.** $\phi = \pi/3$

47. $\rho = 2 \sec \phi$ **48.** $\rho \operatorname{sen}^2 \phi = \cos \phi$

En los problemas 49-52, emplee una integral triple y coordenadas esféricas para determinar el volumen del sólido que está acotado por las gráficas de las ecuaciones que se indican:

49. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 = 9$

50. $x^2 + y^2 + z^2 = 4, y = x, y = \sqrt{3}x, z = 0$, primer octante

51. $z^2 = 3x^2 + 3y^2, x = 0, y = 0, z = 2$, primer octante

52. En el interior por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y en el exterior por $z^2 = x^2 + y^2$

En los problemas 53-56, emplee una integral triple y coordenadas esféricas para encontrar la cantidad indicada.

53. El centroide del sólido homogéneo acotado por el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

54. El centro de masa del sólido acotado por el hemisferio $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ y el plano $z = 0$, donde la densidad en el punto P es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

55. La masa del sólido acotado por arriba por el hemisferio $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y por debajo por el plano $z = 4$, donde la densidad en un punto P es inversamente proporcional a la distancia desde el origen [*Sugerencia*: Exprese el límite ϕ superior de integración como un coseno inverso.]

56. El momento de inercia en torno al eje z del sólido acotado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, donde la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el origen.

14.9 Cambio de variables en integrales múltiples

Introducción En muchos casos resulta conveniente efectuar una sustitución, o cambio de variable, en una integral para evaluarla. La idea en el teorema 5.5.3 puede refrasearse como sigue: si f es continua y $x = g(u)$ tiene una derivada continua y $dx = g'(u)\,du$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,g'(u)\,du, \tag{1}$$

Si la función g es uno a uno, entonces tiene una inversa y por ello $c = g^{-1}(a)$ y $d = g^{-1}(b)$.

donde los límites y de integración de c y d están definidos por $a = g(c)$ y $b = g(d)$. Hay tres aspectos que deben subrayarse en (1). Para cambiar la variable en una integral definida reemplazamos x donde aparece en el integrando por $g(u)$, cambiamos el intervalo de integración $[a, b]$ sobre el eje x al intervalo correspondiente $[c, d]$ sobre el eje u, y sustituimos dx por una función múltiplo (a saber, la derivada de g) de du. Si escribimos $J(u) = g'(u)$, entonces (1) tiene la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(u))\,J(u)\,du. \tag{2}$$

Por ejemplo, empleando $x = 2$ sen θ, $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, tenemos

$$\underset{\text{límites de } x}{\int_0^2} \overbrace{\sqrt{4 - x^2}}^{f(x)}\,dx = \underset{\text{límites de } \theta}{\int_0^{\pi/2}} \overbrace{2\cos\theta}^{f(2 \text{ sen } \theta)}\,\overbrace{(2\cos\theta)}^{J(\theta)}\,d\theta = 4\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\,d\theta = \pi.$$

Integrales dobles Aunque el cambio de variables en una integral múltiple no es directo como el procedimiento en (1), se mantendrá la idea básica que se ilustra en (2). Para cambiar variables en una integral doble necesitamos dos ecuaciones, tales como

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v). \tag{3}$$

Para que haya analogía con (2), esperamos que un cambio de variables en una integral doble tome la forma

$$\iint_R f(x, y)\,dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v))J(u, v)\,dA', \tag{4}$$

donde S es la región en el plano uv correspondiente a la región R en el plano xy, y $J(u, v)$ es alguna función que depende de las derivadas parciales de las ecuaciones en (3). El símbolo dA' en el lado derecho de (4) representa ya sea a $du\,dv$ o $dv\,du$.

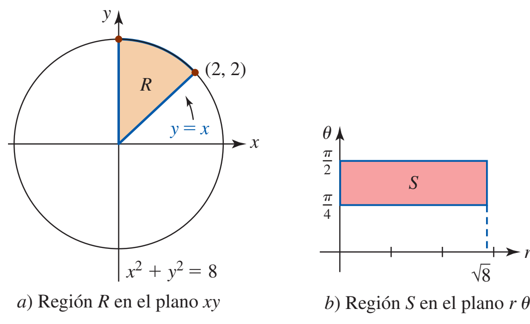
En la sección 14.5 discutimos brevemente cómo cambiar una integral doble $\iint_R f(x, y)\,dA$ de coordenadas rectangulares a coordenadas polares. Recuerde que en el ejemplo 2 de esa sección las sustituciones

$$x = r\cos\theta \qquad \text{y} \qquad y = r \text{ sen } \theta \tag{5}$$

llevaron a

$$\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5 + x^2 + y^2}\,dy\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{8}} \frac{1}{5 + r^2}\,r\,dr\,d\theta. \tag{6}$$

Como advertimos en la FIGURA 14.9.1, la introducción de coordenadas polares cambia la región original de integración R en el plano xy a una más conveniente *región rectangular* de integración S en el plano $r\theta$. Notamos también que al comparar (4) con (6), podemos identificar $J(r, \theta) = r$ y $dA' = dr\,d\theta$.



a) Región *R* en el plano *xy* *b*) Región *S* en el plano *r θ*

FIGURA 14.9.1 Regiones en dos planos diferentes

Las ecuaciones de cambio de variable en (3) definen una **transformación** o **mapeo** *T* del plano *uv* al plano *xy*:

$$T(u, v) = (x, y).$$

Un punto (x_0, y_0) en el plano *xy* está determinado a partir de $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$ y se dice que es una **imagen** de (u_0, v_0), esto es, $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$.

EJEMPLO 1 Transformación de una región

Encuentre la imagen de la región *S* que se muestra en la FIGURA 14.9.2*a*), bajo la transformación $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$.

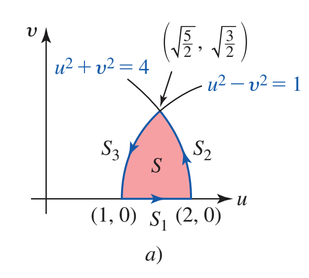
Solución Empezamos determinando las imágenes de los lados de *S* que hemos indicado mediante S_1, S_2 y S_3.

S_1: En el lado $v = 0$ de manera que $x = u^2$, $y = u^2$. Al eliminar *u* se produce entonces $y = x$. En este caso, imagine que el movimiento es a lo largo de la frontera de (1, 0) a (2, 0) (esto es, $1 \leq u \leq 2$). Las ecuaciones $x = u^2$ y $y = u^2$ indican entonces que *x* varía de $x = 1$ a $x = 4$ y *y* varía simultáneamente de $y = 1$ a $y = 4$. En otras palabras, en el plano *xy* la imagen de S_1 es el segmento de recta $y = x$ de (1, 1) a (4, 4).

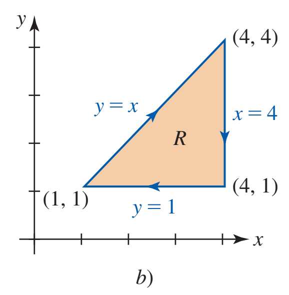
S_2: En esta frontera $u^2 + v^2 = 4$ y también $x = 4$. En este caso, conforme nos movemos del punto (2, 0) a $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, la ecuación restante $y = u^2 - v^2$ indica que *y* varía de $y = 2^2 - 0^2 = 4$ a $y = \left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 = 1$. En este caso la imagen de S_2 es el segmento de recta vertical $x = 4$ que empieza en (4, 4) y desciende hasta (4, 1).

S_3: Puesto que $u^2 - v^2 = 1$, obtenemos $y = 1$. Sin embargo, a medida que nos movemos sobre esta frontera desde $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ hasta (1, 0), la ecuación $x = u^2 + v^2$ indica que *x* varía de $x = 4$ a $x = 1$. La imagen de S_3 es el segmento de recta horizontal $y = 1$ que empieza en (4, 1) y termina en (1, 1).

La imagen de *S* es la región *R* dada en la figura 14.9.2*b*). ■



a)



b)

FIGURA 14.9.2 La imagen de *S* es *R*

Observe en el ejemplo 1 que recorrimos la frontera de *S* en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, y la frontera de *R* se recorre en la dirección de las manecillas. Afirmamos que la transformación de la frontera de *S* ha *inducido* una orientación en la frontera de *R*.

Aunque una prueba de la fórmula del cambio de variables en una integral múltiple está más allá del nivel de este texto, señalaremos *algunas* de las suposiciones subyacentes que se hacen alrededor de las ecuaciones (3) y las regiones *R* y *S*:

- Las funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ tienen primeras derivadas parciales continuas sobre *S*.
- La transformación es uno a uno.
- Cada una de las regiones *R* y *S* consiste en una curva cerrada simple continua por secciones y su interior.
- El determinante de segundo orden

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \tag{7}$$

no es cero y no cambia de signo sobre *S*.

Jacobiano Se dice que una transformación T es **uno a uno** si cada punto (x_0, y_0) en R es la imagen bajo T del punto único (u_0, v_0) en S. Dicho de otro modo, ningún par de puntos en S tiene la misma imagen en R. Con la restricción de que $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, las ecuaciones en (5) definen una transformación uno a uno desde el plano $r\theta$ hasta el plano xy. El determinante en (7) se denomina **determinante jacobiano**, o simplemente **jacobiano**, de la transformación T y es la clave para el cambio de variables en una integral múltiple. El jacobiano de la transformación definida por las ecuaciones en (3) se denota por medio del símbolo

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}.$$

FIGURA 14.9.3 Transformaciones entre regiones

De manera similar a la noción de una función uno a uno introducida en la sección 1.5, una transformación uno a uno T tiene una **transformación inversa** T^{-1} tal que

$$T^{-1}(x_0, y_0) = (u_0, v_0).$$

Esto es, (u_0, v_0) es la imagen bajo T^{-1} de (x_0, y_0). Vea la FIGURA 14.9.3. Si es posible resolver en (3) para u y v en términos de x y y, entonces la transformación inversa se define mediante el par de ecuaciones

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{8}$$

El jacobiano de la transformación inversa T^{-1} es

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{9}$$

y se relaciona con el jacobiano (7) de la transformación T por medio de

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1. \tag{10}$$

EJEMPLO 2 Jacobiano

El jacobiano de la transformación $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ es

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = r.$$ ■

Dirigiremos ahora nuestra atención al punto principal de esta discusión: cómo cambiar variables en una integral múltiple. La idea que se expresa en (4) es válida; la función $J(u, v)$ viene a ser el valor absoluto del jacobiano; esto es, $J(u, v) = |\partial(x, y)/\partial(u, v)|$. De acuerdo con las suposiciones planteadas antes, tenemos el siguiente resultado para las integrales dobles.

Teorema 14.9.1 Cambio de variables en una integral doble

Si $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ es una transformación que mapea una región S en el plano uv hacia la región R en el plano xy y f es una función continua sobre R, entonces

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| dA'. \tag{11}$$

La fórmula (3) de la sección 14.5 para cambiar una integral doble a coordenadas polares es sólo un caso especial de (11) con

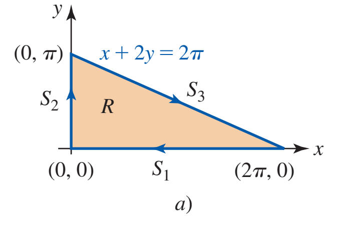
$$\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| = |r| = r$$

puesto que $r \geq 0$. En (6), entonces, tenemos $J(r, \theta) = |\partial(x, y)/\partial(r, \theta)| = r$.

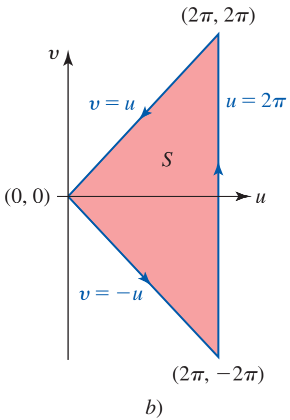
Un cambio de variables en una integral múltiple puede utilizarse para una simplificación del integrando o para una simplificación de la región de integración. El cambio de variables real utilizado muchas veces se inspira en función de la estructura del integrando $f(x, y)$ o por las ecuaciones que definen la región R. Como consecuencia, la transformación se define mediante ecuaciones de la forma dada en (8); esto es, estamos tratando con la transformación inversa. Los siguientes dos ejemplos ilustran estas ideas.

EJEMPLO 3 Cambio de variables

Evalúe $\int_R \operatorname{sen}(x + 2y)\cos(x - 2y)\, dA$ sobre la región R que se muestra en la FIGURA 14.9.4*a*).



a)



b)

FIGURA 14.9.4 Regiones R y S del ejemplo 3

Solución La dificultad al evaluar esta integral doble es claramente el integrando. La presencia de los términos $x + 2y$ y $x - 2y$ nos lleva a definir el cambio de variables

$$u = x + 2y \qquad \text{y} \qquad v = x - 2y.$$

Estas ecuaciones mapearán R sobre la región S en el plano uv. Como en el ejemplo 1, transformamos los lados de la región.

S_1: $y = 0$ implica $u = x$ y $v = x$ o $v = u$. A medida que nos movemos de $(2\pi, 0)$ a $(0, 0)$ vemos que los puntos imagen correspondientes en el plano uv yacen sobre el segmento de recta $v = u$ de $(2\pi, 2\pi)$ a $(0, 0)$.

S_2: $x = 0$ implica $u = 2y$ y $v = -2y$ o $v = -u$. A medida que nos movemos de $(0, 0)$ a $(0, \pi)$, los puntos imagen correspondientes en el plano uv yacen sobre el segmento de recta $v = -u$ de $(0, 0)$ a $(2\pi, -2\pi)$.

S_3: $x + 2y = 2\pi$ implica $u = 2\pi$. Conforme nos movemos de $(0, \pi)$ a $(2\pi, 0)$, la ecuación $v = x - 2y$ muestra que v varía de $v = -2\pi$ a $v = 2\pi$. De tal modo, la imagen de S_3 es el segmento de recta vertical $u = 2\pi$ que empieza en $(2\pi, -2\pi)$ y se extiende hasta $(2\pi, 2\pi)$. Vea la figura 14.9.4*b*).

Ahora, al resolver las ecuaciones $u = x + 2y$, $v = x - 2y$ para x y y en términos de u y v, obtenemos

$$x = \frac{1}{2}(u + v) \qquad \text{y} \qquad y = \frac{1}{4}(u - v).$$

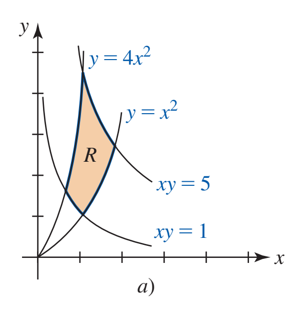
Por tanto,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & -\dfrac{1}{4} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

Por consiguiente, de (11) encontramos que

$$\begin{aligned}
\iint_R \operatorname{sen}(x + 2y)\cos(x - 2y)\, dA &= \iint_S \operatorname{sen} u \cos v \left| -\frac{1}{4} \right| dA' \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\int_{-u}^{u} \operatorname{sen} u \cos v \, dv\, du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \Big]_{-u}^{u} du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 u\, du \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 2u)\, du \\
&= \frac{1}{4}\left(u - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\right)\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\pi.
\end{aligned}$$

■



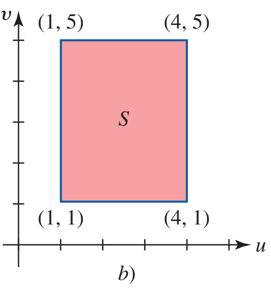


FIGURA 14.9.5 Regiones R y S del ejemplo 4

EJEMPLO 4 Cambio de variables

Evalúe $\iint_R xy\, dA$ sobre la región R que se muestra en la FIGURA 14.9.5*a*).

Solución En este caso el integrando es bastante simple, pero la integración sobre la región R resultaría tediosa, ya que tendríamos que expresar $\iint_R xy\, dA$ como la suma de tres integrales. (Verifique lo anterior.)

Las ecuaciones de las fronteras de R sugieren el cambio de variables

$$u = \frac{y}{x^2} \quad \text{y} \quad v = xy. \tag{12}$$

La obtención de la imagen de R es directa en este caso, puesto que las imágenes de las curvas que conforman las cuatro fronteras son simplemente $u = 1$, $u = 4$, $v = 1$ y $v = 5$. En otras palabras, la imagen de la región R es la región rectangular S: $1 \le u \le 4$, $1 \le v \le 5$. Vea la figura 14.9.5*b*).

Ahora, en vez de tratar de resolver las ecuaciones en (12) para x y y en términos de u y v, es posible obtener el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ calculando $\partial(u, v)/\partial(x, y)$ y utilizando (10). Tenemos

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\dfrac{2y}{x^3} & \dfrac{1}{x^2} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y}{x^2}$$

y por ello de (10),

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = -\frac{x^2}{3y} = -\frac{1}{3u}.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \iint_R xy\, dA &= \iint_S v \left| -\frac{1}{3u} \right| dA' \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 \int_1^5 \frac{v}{u}\, dv\, du \\ &= \frac{1}{3} \int_1^4 \frac{1}{u} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \Big]_1^5 du \\ &= 4 \int_1^4 \frac{1}{u}\, du = 4 \ln u \Big]_1^4 = 4 \ln 4. \end{aligned}$$

■

Integrales triples

Para cambiar variables en una integral triple, consideremos

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w) \tag{13}$$

como una transformación T uno a uno de la región E en el espacio uvw a la región D en el espacio xyz. Si las funciones en (13) satisfacen las contrapartes de tres variables de las condiciones listadas en la página 791 y el jacobiano de tercer orden

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

no es cero y no cambia de signo sobre E, entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 14.9.2 Cambio de variables en una integral triple

Si $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ es una transformación que mapea una región E en el espacio uvw hacia una región D en el espacio xyz y f es una función continua sobre E, entonces

$$\iiint_D f(x, y, z)\,dV = \iiint_E f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))\left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}\right| dV'. \qquad (14)$$

Dejamos como ejercicio mostrar que si T es la transformación de coordenadas esféricas a rectangulares definida por

$$x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = \rho \cos \phi,$$

entonces

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \operatorname{sen} \phi. \qquad (15)$$

Vea el problema 28 en los ejercicios 14.9.

Posdata: Un poco de historia **Carl Gustav Jacob Jacobi** (1804-1851) nació en Potsdam en el seno de una rica familia alemana. El joven Carl Gustav fue notable en muchas áreas de estudio, pero su habilidad y amor por los intrincados cálculos algebraicos lo llevaron a la vida de un pobre matemático y maestro. Sufrió un colapso nervioso en 1843 debido a exceso de trabajo. Su disertación para obtener el doctorado en filosofía se relacionó con un tema ahora conocido por cualquier estudiante de cálculo: fracciones parciales. Sin embargo, las grandes contribuciones de Jacobi a las matemáticas se produjeron en el campo de las funciones elípticas y de la teoría de números. También realizó aportaciones importantes a la teoría de determinantes y a la simplificación de dicha teoría. Si bien Jacobi fue principalmente un matemático "puro", todo estudiante de dinámica y mecánica cuántica reconocerá su contribución a esas áreas a través de sus famosas ecuaciones de Hamilton-Jacobi.


Jacobi

Ejercicios 14.9

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-45.

Fundamentos

1. Considere una transformación T definida por $x = 4u - v$, $y = 5u + 4v$. Encuentre las imágenes de los puntos (0, 0), (0, 2), (4, 0) y (4, 2) en el plano uv bajo T.
2. Considere una transformación T definida por $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$. Encuentre las imágenes de los puntos (1, 1), (1, 3) y $(\sqrt{2}, 2)$ en el plano xy bajo T^{-1}.

En los problemas 3-6, encuentre la imagen del conjunto S bajo la transformación dada.

3. S: $0 \le u \le 2, 0 \le v \le u$; $\quad x = 2u + v, y = u - 3v$
4. S: $-1 \le u \le 4, 1 \le v \le 5$; $\quad u = x - y, v = x + 2y$
5. S: $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 2$; $\quad x = u^2 - v^2, y = uv$
6. S: $1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2$; $\quad x = uv, y = v^2$

En los problemas 7-10, determine el jacobiano de la transformación T del plano uv al plano xy.

7. $x = ve^{-u}, y = ve^{u}$
8. $x = e^{3u} \operatorname{sen} v, y = e^{3u} \cos v$
9. $u = \dfrac{y}{x^2}, v = \dfrac{y^2}{x}$
10. $u = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}, v = \dfrac{-2y}{x^2 + y^2}$

11. ***a)*** Encuentre la imagen de la región S: $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$ bajo la transformación $x = u - uv, y = uv$.
    b) Explique por qué la transformación no es uno a uno sobre la frontera de S.
12. Determine dónde es cero el jacobiano $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ de la transformación en el problema 11.

En los problemas 13-22, evalúe la integral dada por medio de los cambios de variable que se indican.

13. $\iint_R (x + y)\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $x - 2y = -6, x - 2y = 6, x + y = -1, x + y = 3$; $u = x - 2y, v = x + y$
14. $\displaystyle\iint_R \frac{\cos\frac{1}{2}(x - y)}{3x + y}\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $y = x, y = x - \pi, y = -3x + 3, y = -3x + 6$; $u = x - y, v = 3x + y$
15. $\displaystyle\iint_R \frac{y^2}{x}\,dA$, donde R es la región acotada por las gráficas $y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, x = y^2, x = \frac{1}{2}y^2$; $u = x^2/y, v = y^2/x$

16. $\iint_R (x^2 + y^2)^{-3} dA$, donde R es la región acotada por los círculos $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 2y$, $x^2 + y^2 = 6y$; $u = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, $v = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$ [*Sugerencia*: De $u^2 + v^2$.]

17. $\iint_R (x^2 + y^2)\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x^2 - y^2 = a$, $x^2 - y^2 = b$, $2xy = c$, $2xy = d$, $0 < a < b$, $0 < c < d$; $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$

18. $\iint_R (x^2 + y^2)\text{sen}\, xy\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = -2$; $u = x^2 - y^2$, $v = xy$

19. $\displaystyle\iint_R \frac{x}{y + x^2}\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $x = 1$, $y = x^2$, $y = 4 - x^2$; $x = \sqrt{v - u}$, $y = v + u$

20. $\iint_R y\, dA$, donde R es la región triangular con vértices $(0, 0)$, $(2, 3)$ y $(-4, 1)$; $x = 2u - 4v$, $y = 3u + v$

21. $\iint_R y^4\, dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $xy = 1$, $xy = 4$, $y = x$, $y = 4x$; $u = xy$, $v = y/x$

22. $\iiint_D (4z + 2x - 2y)\, dV$, donde D es el paralelepípedo $1 \le y + z \le 3$, $-1 \le -y + z \le 1$, $0 \le x - y \le 3$; $u = y + z$, $v = -y + z$, $w = x - y$

En los problemas 23-26, evalúe la integral doble por medio de un cambio de variables apropiado.

23. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{(y-x)/(y+x)}\, dy\, dx$ **24.** $\displaystyle\int_{-2}^0 \int_0^{x+2} e^{y^2 - 2xy + x^2}\, dy\, dx$

25. $\iint_R (6x + 3y)\, dA$, donde R es la región trapezoidal en el primer cuadrante con vértices $(1, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$ y $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

26. $\iint_R (x + y)^4 e^{x-y}\, dA$, donde R es la región cuadrada con vértices $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, 1)$

27. Evalúe la integral doble $\iint_R \left(\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2\right) dA$, donde R es la región elíptica cuya frontera es la gráfica de $\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$. Emplee la sustitución $u = \frac{1}{5}x$, $v = \frac{1}{3}y$ y coordenadas polares.

28. Verifique que el jacobiano de la transformación dada en (14) es $\partial(x, y, z)/\partial(\rho, \phi, \theta) = \rho^2 \text{ sen } \phi$.

29. Emplee $V = \iiint_D dV$ y las sustituciones $u = x/a$, $v = y/b$, $w = z/c$ para mostrar que el volumen del elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

≡ Aplicaciones

30. Un problema en termodinámica consiste en determinar el trabajo realizado por una máquina de Carnot. Este trabajo se define como el área de la región R en el primer cuadrante acotado por las isotermas $xy = a$, $xy = b$, $0 < a < b$ y las adiabáticas $xy^{1.4} = c$, $xy^{1.4} = d$, $0 < c < d$. Emplee $A = \iint_R dA$ y una sustitución apropiada para calcular el área que se muestra en la FIGURA 14.9.6.

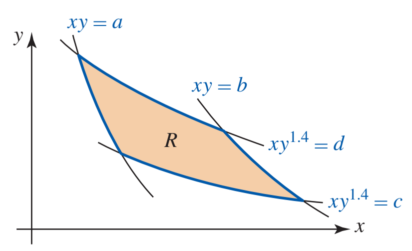


FIGURA 14.9.6 Región R del problema 30

Revisión del capítulo 14

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-46.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-6, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. $\displaystyle\int_{-2}^{3}\int_1^5 e^{x^2 - y}\, dx\, dy = \int_1^5 \int_{-2}^{3} e^{x^2-y}\, dy\, dx$ _____

2. Si $\displaystyle\int f(x, y)\, dx = F(x, y) + c_2(y)$ es una integral parcial, entonces $F_x(x, y) = f(x, y)$. _____

3. Si I es la integral parcial definida $\displaystyle\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy$, entonces $\partial I/\partial y = 0$. _____

4. Para toda función continua f, $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} f(x, y)\, dy\, dx = 2\int_0^1 \int_{x^2}^1 f(x, y)\, dy\, dx$. _____

5. El centro de masa de una lámina que posee simetría yace sobre el eje de simetría de la lámina. _____

6. En coordenadas cilíndricas y esféricas la ecuación del plano $y = x$ es la misma. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-12, llene los espacios en blanco.

1. $\int_{y^2+1}^{5}\left(8y^3 - \frac{5y}{x}\right)dx =$ __________.

2. Si R_1 y R_2 son regiones que no se traslapan tales como $R = R_1 \cup R_2$, $\iint_R f(x, y)\, dA = 10$ y $\iint_{R_2} f(x, y)\, dA = -6$, entonces $\iint_{R_1} f(x, y)\, dA =$ __________.

3. $\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} dx\, dy$ produce el área de un __________.

4. La región acotada por las gráficas de $9x^2 + y^2 = 36$, $y = -2$, $y = 5$ es una región de tipo __________ .

5. $\int_{2}^{4} f_y(x, y)\, dy =$ __________.

6. Si $\rho(x, y, z)$ es la densidad, entonces la integral iterada que produce la masa de un sólido acotado por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ es __________.

7. $\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{2y} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{_}^{_}\int_{_}^{_} f(x, y)\, dy\, dx$

8. Las coordenadas rectangulares del punto $(6, 5\pi/3, 5\pi/6)$ dadas en coordenadas esféricas son __________.

9. Las coordenadas cilíndricas del punto $(2, \pi/4, 2\pi/3)$ dadas en coordenadas esféricas son __________.

10. La región R acotada por las gráficas $y = 4 - x^2$ y $y = 0$ es tanto del tipo I como del tipo II. Interpretada como una región tipo II, $\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{_}^{_}\int_{_}^{_} f(x, y)$ ________________.

11. La ecuación del paraboloide $z = x^2 + y^2$ en coordenadas cilíndricas es __________, en tanto que en coordenadas esféricas su ecuación es __________.

12. La región cuya área es $A = \int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\operatorname{sen}\theta} r\, dr\, d\theta$ es __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1-14, evalúe la integral dada.

1. $\int (12x^2 e^{-4xy} - 5x + 1)\, dy$

2. $\int \frac{1}{4 + 3xy}\, dx$

3. $\int_{y^3}^{y} y^2 \operatorname{sen} xy\, dx$

4. $\int_{1/x}^{e^x} \frac{x}{y^2}\, dy$

5. $\int_{0}^{2}\int_{0}^{2x} y e^{y-x}\, dy\, dx$

6. $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4} \frac{1}{16 + x^2}\, dy\, dx$

7. $\int_{0}^{1}\int_{x}^{\sqrt{x}} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\, dy\, dx$

8. $\int_{e}^{e^2}\int_{0}^{1/x} \ln x\, dy\, dx$

9. $\int_{0}^{5}\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{\cos\theta} 3r^2\, dr\, d\theta\, dz$

10. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{0}^{\operatorname{sen} z}\int_{0}^{\ln x} e^y\, dy\, dx\, dz$

11. $\iint_R 5\, dA$, donde R está acotada por el círculo $x^2 + y^2 = 64$

12. $\iint_R dA$, donde R está acotada por la cardioide $r = 1 + \cos\theta$

13. $\iint_R (2x + y)\, dA$, donde R está acotada por las gráficas de $y = \frac{1}{2}x$, $x = y^2 + 1$, $y = 0$

14. $\iiint_D x\, dV$, donde D está acotada por los planos $z = x + y$, $z = 6 - x - y$, $x = 0$, $y = 0$

15. Empleando coordenadas rectangulares, exprese

$$\iint_R \frac{1}{x^2 + y^2}\, dA$$

como una integral iterada, donde R es la región en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$ y $y = x$. No evalúe.

16. Evalúe la integral doble del problema 15 utilizando coordenadas polares.

En los problemas 17 y 18, dibuje la región de integración.

17. $\int_{-2}^{2} \int_{-x^2}^{x^2} f(x, y)\, dy\, dx$

18. $\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{0}^{x^2+y^2} f(x, y, z)\, dz\, dx\, dy$

19. Invierta el orden de integración y evalúe

$$\int_0^1 \int_y^{\sqrt[3]{y}} \cos x^2\, dx\, dy.$$

20. Considere $\iiint_D f(x, y, z)\, dV$, donde D es la región en el primer octante acotada por los planos $z = 8 - 2x - y$, $z = 4$, $x = 0$, $y = 0$. Exprese la integral triple como seis diferentes integrales iteradas.

En los problemas 21 y 22, utilice un sistema de coordenadas apropiado para evaluar la integral dada.

21. $\int_0^2 \int_{1/2}^1 \int_0^{\sqrt{x-x^2}} (4z + 1)\, dy\, dx\, dz$

22. $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^4\, dz\, dy\, dx$

23. Encuentre el área de la superficie de la porción de la gráfica de $z = xy$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

24. Utilice una integral doble para encontrar el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 14.R.1.

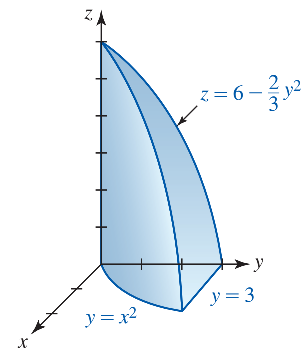


FIGURA 14.R.1 Sólido del problema 24

25. Exprese el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 14.R.2 como una o más integrales iteradas utilizando el orden de integración

a) *dy dx* ***b***) *dx dy*.

Elija el inciso *a*) o el inciso *b*) para determinar el volumen.

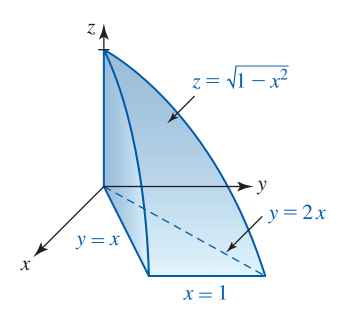


FIGURA 14.R.2 Sólido del problema 25

26. Una lámina tiene la forma de la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$. Encuentre el centro de masa si la densidad ρ en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el origen.

27. Determine el momento de inercia de la lámina descrita en el problema 26 en torno al eje y.

28. Encuentre el volumen de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ utilizando una integral triple en

a) coordenadas rectangulares, *b*) coordenadas cilíndricas y *c*) coordenadas esféricas.

29. Determine el volumen del sólido que está acotado entre los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 3$.

30. Determine el volumen del sólido que se muestra en la FIGURA 14.R.3.

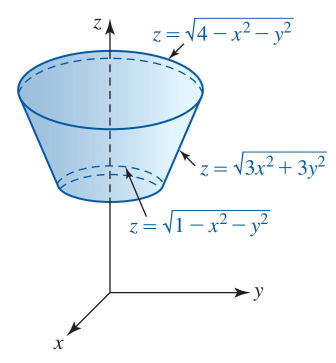


FIGURA 14.R.3 Sólido del problema 30

31. Evalúe la integral $\iint_R (x^2 + y^2)\sqrt[3]{x^2 - y^2}\, dA$, donde R es la región acotada por las gráficas de $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$ por medio del cambio de variables $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$.

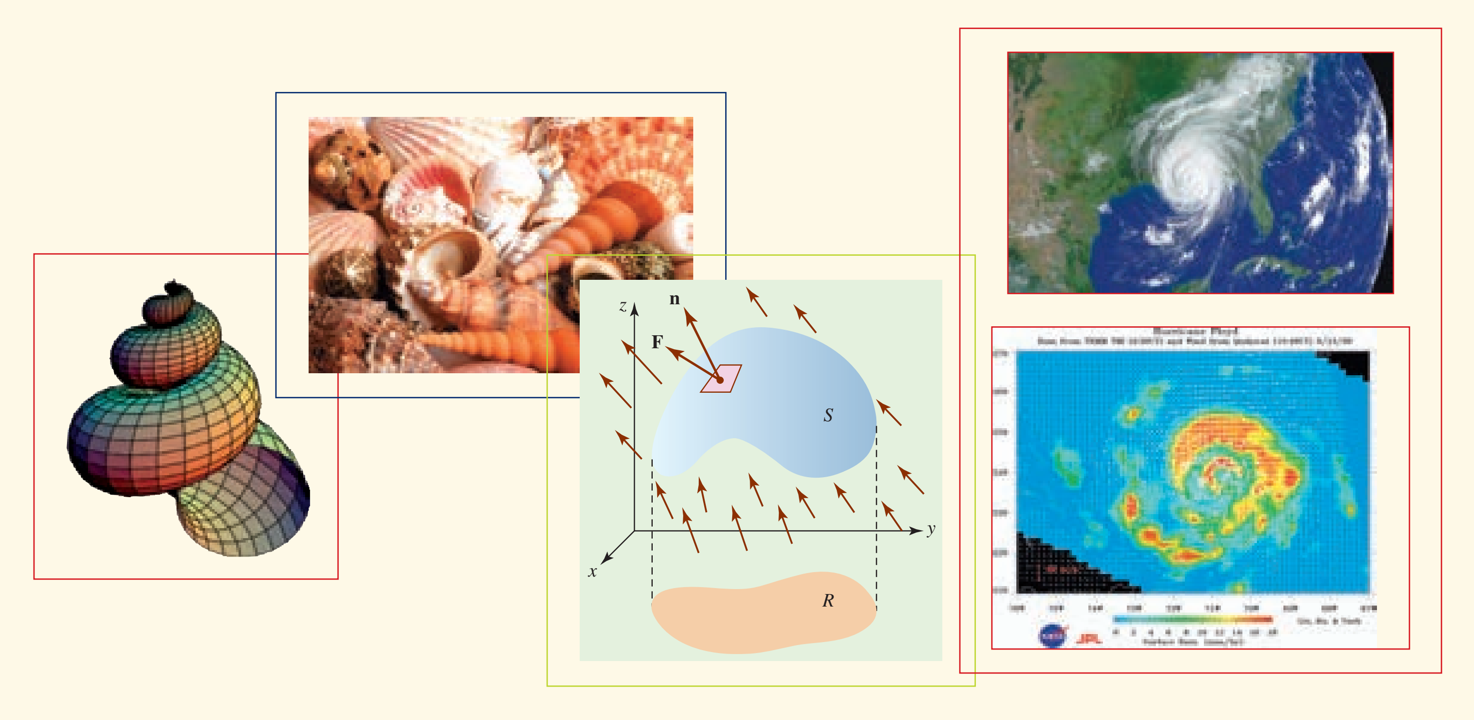
32. Evalúe la integral

$$\iint_R \frac{1}{\sqrt{(x - y)^2 + 2(x + y) + 1}}\, dA,$$

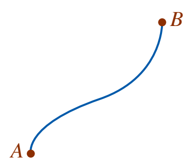
donde R es la región acotada por las gráficas de $y = x$, $x = 2$ y $y = 0$ mediante el cambio de variables $x = u + uv$, $y = v + uv$.

Capítulo 15

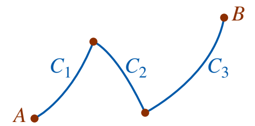
Cálculo integral vectorial



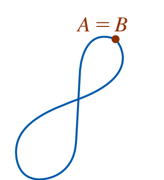
En este capítulo Hasta este punto en nuestro estudio del cálculo, hemos encontrado tres tipos de integrales: la integral definida, la integral doble y la integral triple. En este capítulo se presentan dos nuevos tipos de integrales: las integrales de línea y las integrales de superficie. El desarrollo de estos conceptos depende en gran medida de los métodos vectoriales. En la sección 15.2 se introduce un nuevo tipo de función vectorial: una función que no define a una curva sino más bien a un campo de vectores.



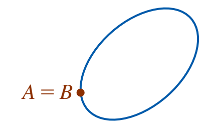
a) Curva suave



b) Curva suave por partes



c) Cerrada pero no simple



d) Curva cerrada simple

FIGURA 15.1.1 Tipos de curvas

15.1 Integrales de línea

Introducción La noción de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, esto es, *integración de una función de una sola variable definida sobre un intervalo*, puede generalizarse a la *integración de una función de varias variables definidas a lo largo de una curva*. Para este fin necesitamos introducir cierta terminología acerca de curvas.

Terminología Suponga que C es una curva parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, y que A y B son los puntos inicial y terminal $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$, respectivamente. Afirmamos que:

- C es una **curva suave** si $x'(t)$ y $y'(t)$ son continuas sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y no son simultáneamente cero sobre el intervalo abierto (a, b).
- C es una **curva suave por partes** si consiste en un número finito de curvas suaves $C_1, C_2, \ldots, C_n$ unidas extremo por extremo; esto es, $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$.
- C es una **curva cerrada** si $A = B$.
- C es una **curva simple** si no se cruza a sí misma entre A y B.
- C es una **curva cerrada simple** si $A = B$ y la curva no se cruza a sí misma.
- Si C no es una curva cerrada, entonces la **orientación** impuesta sobre C es la dirección que corresponde a los valores crecientes de t.

Cada tipo de curva definida antes se ilustra en la FIGURA 15.1.1.

Esta misma terminología lleva de manera natural a las curvas en espacio tridimensional. Por ejemplo, una curva espacial C definida por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$, es suave si las derivadas x', y' y z' son continuas sobre $[a, b]$ y no simultáneamente cero sobre (a, b).

Integrales de línea en el plano Sea $z = f(x, y)$ una función definida en alguna región bidimensional que contiene a la curva suave C definida por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$. Los siguientes pasos conducen a las definiciones de tres **integrales de línea** en el plano.

Una desafortunada elección de nombre. El término "integrales curvilíneas" sería más apropiado.

- Sea
$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$
una partición del intervalo paramétrico $[a, b]$ y considere que los puntos correspondientes sobre la curva C, o puntos de partición, son
$$A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B.$$
- Los puntos de partición $P_k = (x(t_k), y(t_k))$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ dividen a C en n subarcos de longitudes Δs_k. Considere que la proyección de cada subarco sobre los ejes x y y tienen longitudes Δx_k y Δy_k, respectivamente.
- Sea $\|P\|$ la longitud del subarco más largo.
- Escoja un punto muestra (x_k^*, y_k^*) sobre cada subarco como se ilustra en la FIGURA 15.1.2. Este punto corresponde a un número t_k^* en el subintervalo k-ésimo $[t_{k-1}, t_k]$ en la partición del intervalo del parámetro $[a, b]$.
- Forme las sumas
$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k, \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k \qquad \text{y} \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\,\Delta s_k.$$

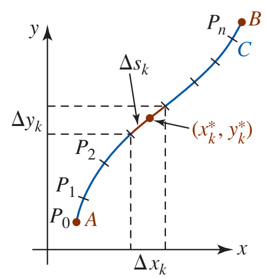


FIGURA 15.1.2 Punto muestra sobre el subarco k-ésimo

Tomamos el límite de estas tres sumas cuando $\|P\| \to 0$. Las integrales que resultan se resumen a continuación.

Definición 15.1.1 Integrales de línea en el plano

Sea f una función de dos variables x y y definida en una región del plano que contiene una curva suave C.

i) La **integral de línea de *f* con respecto a *x*** a lo largo de C de A a B es

$$\int_C f(x, y)\,dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta x_k. \tag{1}$$

(*continúa*)

ii) La **integral de línea de *f* con respecto a *y*** a lo largo de *C* de *A* a *B* es

$$\int_C f(x, y)\, dy = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta y_k. \tag{2}$$

iii) La **integral de línea de *f* con respecto a la longitud de arco *s*** a lo largo de *C* de *A* a *B* es

$$\int_C f(x, y)\, ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k. \tag{3}$$

Es posible demostrar que si $f(x, y)$ es continua sobre C, entonces las integrales definidas en (1), (2) y (3) existen. Asumiremos la continuidad de f como un hecho.

Interpretación geométrica En el caso de dos variables, la integral de línea con respecto a la longitud de arco $\int_C f(x, y)\, ds$ puede interpretarse de manera geométrica cuando $f(x, y) \geq 0$ sobre C. En la definición 15.1.1 el símbolo Δs_k representa la longitud del subarco k-ésimo sobre la curva C. Sin embargo, de la figura 15.1.2 tenemos la aproximación $\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$. Con esta interpretación de Δs_k, vemos de la FIGURA 15.1.3*a*) que el producto $f(x_k^*, y_k^*)\Delta s_k$ es el área de un rectángulo vertical de altura $f(x_k^*, y_k^*)$ y ancho Δs_k. La integral $\int_C f(x, y)\, ds$ representa entonces el área de un lado de una "cerca" o "cortina" que se extiende a partir de la curva C en el plano xy hacia arriba de la gráfica de $f(x, y)$ y que corresponde a los puntos (x, y) sobre C. Vea la figura 15.1.3*b*).

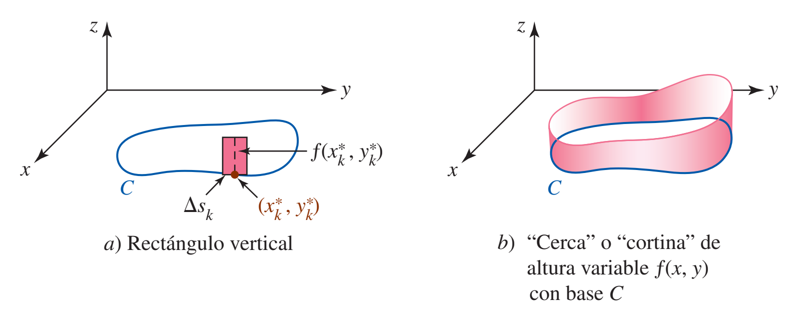


FIGURA 15.1.3 Interpretación geométrica de *iii*) de la definición 15.1.1

Método de evaluación: *C* definida paramétricamente Las integrales de línea en la definición 15.1.1 se evalúan de dos maneras, dependiendo de si la curva C está definida paramétricamente o mediante una función explícita. En cualquier caso, la idea básica es convertir la integral de línea en una integral definida de una sola variable. Si C es una curva suave parametrizada por $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces $dx = x'(t)\, dt$, $dy = y'(t)\, dt$, y por ello (1) y (2) se vuelven, respectivamente,

$$\int_C f(x, y)\, dx = \int_a^b f(x(t), y(t))\, x'(t)\, dt, \tag{4}$$

$$\int_C f(x, y)\, dy = \int_a^b f(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt. \tag{5}$$

Además, utilizando (5) de la sección 6.5 y la parametrización dada, encontramos que $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$. Por consiguiente, (3) puede escribirse como

$$\int_C f(x, y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{6}$$

EJEMPLO 1 Empleo de (4), (5) y (6)

Evalúe

a) $\int_C xy^2\, dx$, ***b***) $\int_C xy^2\, dy$, ***c***) $\int_C xy^2\, ds$

sobre el cuarto de círculo C definido por $x = 4\cos t$, $y = 4\,\text{sen}\, t$, $0 \leq t \leq \pi/2$. Vea la FIGURA 15.1.4.

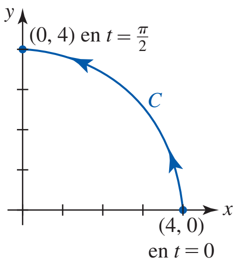


FIGURA 15.1.4 Curva *C* del ejemplo 1

Solución

***a*)** De (4),

$$\int_C xy^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2\,t)}^{y^2}\overbrace{(-4\,\text{sen}\,t\,dt)}^{dx}$$

$$= -256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^3\,t\cos t\,dt$$

$$= -256\left[\frac{1}{4}\text{sen}^4\,t\right]_0^{\pi/2} = -64.$$

***b*)** De (5),

$$\int_C xy^2\,dy = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2\,t)}^{y^2}\overbrace{(4\cos t\,dt)}^{dy}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\,t\cos^2 t\,dt \quad \leftarrow \text{use la fórmula del ángulo doble para el seno}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\text{sen}^2\,2t\,dt \quad \leftarrow \text{use la fórmula del ángulo mitad para el seno}$$

$$= 64\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 4t)\,dt$$

$$= 32\left[t - \frac{1}{4}\text{sen}\,4t\right]_0^{\pi/2} = 16\pi.$$

***c*)** De (6),

$$\int_C xy^2\,ds = \int_0^{\pi/2} \overbrace{(4\cos t)}^{x}\overbrace{(16\,\text{sen}^2\,t)}^{y^2}\overbrace{\sqrt{16(\cos^2 t + \text{sen}^2\,t)}\,dt}^{ds}$$

$$= 256\int_0^{\pi/2} \text{sen}^2\,t\cos t\,dt$$

$$= 256\left[\frac{1}{3}\text{sen}^3\,t\right]_0^{\pi/2} = \frac{256}{3}.$$ ■

Método de evaluación: *C* definida por *y* = *g*(*x*) Si la curva C está definida por una función explícita $y = g(x)$, $a \le x \le b$, es posible utilizar x como un parámetro. Con $dy = g'(x)\,dx$ y $ds = \sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx$, las integrales de línea (1), (2) y (3) se vuelven, a su vez,

$$\int_C f(x, y)\,dx = \int_a^b f(x, g(x))\,dx, \tag{7}$$

$$\int_C f(x, y)\,dy = \int_a^b f(x, g(x))g'(x)\,dx, \tag{8}$$

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1 + [g'(x)]^2}\,dx. \tag{9}$$

Una integral de línea a lo largo de una curva C *suave por partes* se define como la *suma* de las integrales sobre las distintas curvas suaves cuya unión compone a C. Por ejemplo, en el caso de (3), si C está compuesta por curvas suaves C_1 y C_2, entonces

$$\int_C f(x, y)\,ds = \int_{C_1} f(x, y)\,ds + \int_{C_2} f(x, y)\,ds.$$

Notación En muchas aplicaciones, las integrales de línea aparecen como una suma

$$\int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dy.$$

Es una práctica común escribir esta suma sin el segundo símbolo integral como

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \qquad \text{o simplemente} \qquad \int_C P\,dx + Q\,dy. \tag{10}$$

EJEMPLO 2 Uso de (7), (8) y (10)

Evalúe $\int_C xy\,dx + x^2\,dy$, donde C está dada por $y = x^3$, $\quad -1 \le x \le 2$.

Solución La curva C se ilustra en la FIGURA 15.1.5 y se define mediante la función explícita $y = x^3$. Por consiguiente, podemos usar x como el parámetro. Con $dy = 3x^2\,dx$, se deduce de (7) y (8) que

$$\begin{aligned}\int_C xy\,dx + x^2\,dy &= \int_{-1}^{2} x\overbrace{(x^3)}^{y}\,dx + x^2\overbrace{(3x^2\,dx)}^{dy}\\ &= \int_{-1}^{2} 4x^4\,dx = \frac{4}{5}x^5\Big]_{-1}^{2} = \frac{132}{5}.\end{aligned}$$ ■

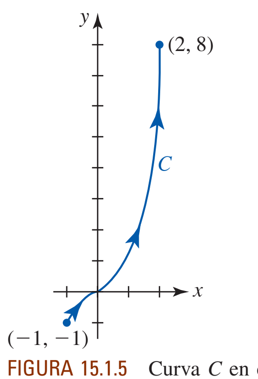


FIGURA 15.1.5 Curva C en el ejemplo 2

EJEMPLO 3 La curva C definida por partes

Evalúe $\int_C y^2\,dx - x^2\,dy$ sobre la curva cerrada C que se muestra en la FIGURA 15.1.6*a*).

Solución Puesto que C es suave por partes, expresamos la integral como una suma de integrales. Simbólicamente, escribimos

$$\int_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3},$$

donde C_1, C_2 y C_3 son las curvas que se muestran en la figura 15.1.6*b*). En C_1, usamos x como parámetro. Puesto que $y = 0$, $dy = 0$,

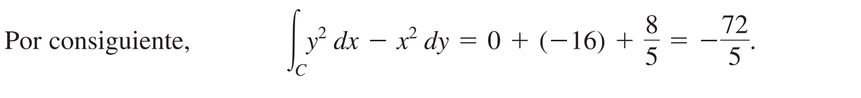
$$\int_{C_1} y^2\,dx - x^2\,dy = \int_0^2 0\,dx - x^2(0) = 0.$$

En C_2, usamos y como parámetro. De $x = 2$, $dx = 0$ tenemos

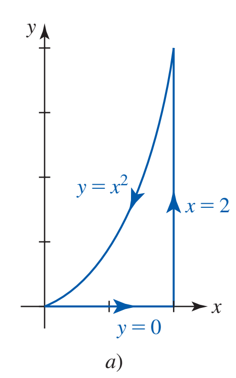
$$\begin{aligned}\int_C y^2\,dx - x^2\,dy &= \int_0^4 y^2(0) - 4\,dy =\\ &= -\int_0^4 4\,dy = -4y\Big]_0^4 = -16.\end{aligned}$$

Por último, en C_3, usamos de nuevo x como parámetro. De $y = x^2$, obtenemos $dy = 2x\,dx$ y por ello

$$\begin{aligned}\int_{C_3} y^2\,dx - x^2\,dy &= \int_2^0 x^4\,dx - x^2(2x\,dx)\\ &= \int_2^0 (x^4 - 2x^3)\,dx\\ &= \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4\right)\Big]_2^0 = \frac{8}{5}.\end{aligned}$$



Por consiguiente, $\qquad \displaystyle\int_C y^2\,dx - x^2\,dy = 0 + (-16) + \frac{8}{5} = -\frac{72}{5}.$ ■



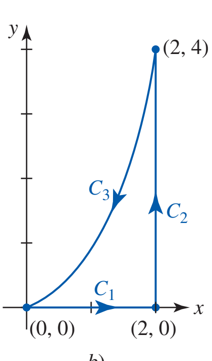


FIGURA 15.1.6 Curva C en el ejemplo 3

Propiedades Es importante advertir que una integral de línea es independiente de la parametrización de la curva C siempre que a C se le dé la misma orientación por medio de todos los conjuntos de ecuaciones paramétricas que definen la curva. Vea el problema 33 en los ejercicios 15.1. Recuerde que la dirección positiva de una curva parametrizada C corresponde a valores crecientes del parámetro t.

Suponga, como se ilustra en la FIGURA 15.1.7, que el símbolo $-C$ denota la curva que tiene los mismos puntos pero la orientación opuesta de C. En ese caso es posible demostrar que

Para integrales definidas ordinarias, esta propiedad es equivalente a $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy = -\int_C P\,dx + Q\,dy$$

o

$$\int_{-C} P\,dx + Q\,dy + \int_C P\,dx + Q\,dy = 0. \tag{11}$$

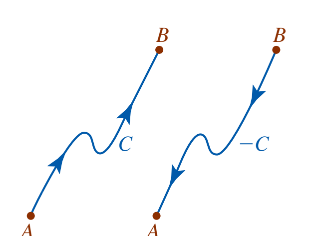


FIGURA 15.1.7 Las curvas C y $-C$ tienen orientaciones opuestas

Por ejemplo, en el inciso *a*) del ejemplo 1 vimos que $\int_C xy^2\,dx = -64$ y por ello (11) puede escribirse como $\int_{-C} xy^2\,dx = 64$.

Integrales de línea en el espacio Suponga que C es una curva suave en espacio tridimensional definida por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$. Si f es una función de tres variables definida en alguna región del espacio tridimensional que contiene a C, podemos definir *cuatro* integrales de línea a lo largo de la curva:

$$\int_C f(x, y, z)\,dx, \quad \int_C f(x, y, z)\,dy, \quad \int_C f(x, y, z)\,dz \quad \text{y} \quad \int_C f(x, y, z)\,ds.$$

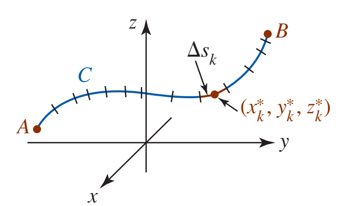


FIGURA 15.1.8 Punto muestra sobre el subarco k-ésimo

La primera, segunda y cuarta integrales se definen de manera análoga a (1), (2) y (3) de la definición 15.1.1. Por ejemplo, si C se divide en n subarcos de longitud Δs_k como se muestra en la FIGURA 15.1.8, entonces

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta s_k.$$

La nueva integral en la lista, la **integral de línea de f con respecto a z** a lo largo de C de A a B, se define como

$$\int_C f(x, y, z)\,dz = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta z_k. \tag{12}$$

Método de evaluación Utilizando las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $a \le t \le b$, podemos evaluar las integrales de línea a lo largo de la curva en el espacio C de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int_C f(x, y, z)\,dx &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))x'(t)\,dt,\\
\int_C f(x, y, z)\,dy &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))y'(t)\,dt,\\
\int_C f(x, y, z)\,dz &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))z'(t)\,dt,\\
\int_C f(x, y, z)\,ds &= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt.
\end{aligned} \tag{13}$$

Si C se define mediante la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, entonces la última integral en (13) puede escribirse

$$\int_C f(x, y, z)\,ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\mathbf{r}'(t)|\,dt. \tag{14}$$

Examinaremos una integral que es análoga a (14) en la sección 15.6.

Como en (10), en el espacio tridimensional a menudo estamos interesados en integrales de línea de la forma de una suma:

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz.$$

EJEMPLO 4 Integral de línea en espacio tridimensional

Evalúe $\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz$, donde C es la hélice $x = 2\cos t$, $y = 2\,\text{sen}\,t$, $z = t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Solución Al sustituir las expresiones para x, y y z junto con $dx = -2\,\text{sen}\,t\,dt$, $dy = 2\cos t\,dt$, $dz = dt$ obtenemos

$$\int_C y\,dx + x\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} \underbrace{-4\,\text{sen}^2 t\,dt + 4\cos^2 t\,dt}_{4(\cos^2 t\,-\,\text{sen}^2 t)} + t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (4\cos 2t + t)\,dt \leftarrow \text{fórmula del ángulo doble}$$

$$= \left(2\,\text{sen}\,2t + \frac{1}{2}t^2\right)\Big]_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$ ■

Ejercicios 15.1 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-46.

Fundamentos

En los problemas 1-4, evalúe $\int_C f(x, y)\,dx$, $\int_C f(x, y)\,dy$ y $\int_C f(x, y)\,ds$ sobre la curva indicada C.

1. $f(x, y) = 2xy$; $x = 5\cos t$, $y = 5\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi/4$

2. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + 2x$; $x = 2t$, $y = t^2$, $0 \le t \le 1$

3. $f(x, y) = 3x^2 + 6y^2$; $y = 2x + 1$, $-1 \le x \le 0$

4. $f(x, y) = x^2/y^3$; $y = \frac{3}{2}x^{2/3}$, $1 \le x \le 8$

5. Evalúe $\int_C (x^2 - y^2)\,ds$, donde C está dada por $x = 5\cos t$, $y = 5\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. Evalúe $\int_C (2x + 3y)\,dy$, donde C está dada por $x = 3\,\text{sen}\,2t$, $y = 2\cos 2t$, $0 \le t \le \pi$.

En los problemas 7 y 8, evalúe $\int_C f(x, y, z)\,dx$, $\int_C f(x, y, z)\,dy$, $\int_C f(x, y, z)\,dz$ y $\int_C f(x, y, z)\,ds$ sobre la curva indicada C.

7. $f(x, y, z) = z$; $x = \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, $z = t$, $0 \le t \le \pi/2$

8. $f(x, y, z) = 4xyz$; $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = t^2$, $z = 2t$, $0 \le t \le 1$

En los problemas 9-12, evalúe $\int_C (2x + y)\,dx + xy\,dy$ sobre la curva dada C entre $(-1, 2)$ y $(2, 5)$.

9. $y = x + 3$

10. $y = x^2 + 1$

11.

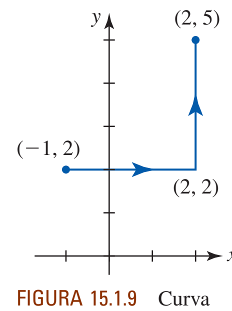


FIGURA 15.1.9 Curva del problema 11

12.

FIGURA 15.1.10 Curva del problema 12

En los problemas 13-16, evalúe $\int_C y\,dx + x\,dy$ sobre la curva dada C entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$.

13. $y = x^2$

14. $y = x$

15. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(0, 1)$ y de $(0, 1)$ a $(1, 1)$.

16. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(1, 0)$ y de $(1, 0)$ a $(1, 1)$.

17. Evalúe $\int_C (6x^2 + 2y^2)\,dx + 4xy\,dy$, donde C está dada por $x = \sqrt{t}$, $y = t$, $4 \le t \le 9$.

18. Evalúe $\int_C -y^2\,dx + xy\,dy$, donde C está dada por $x = 2t$, $y = t^3$, $0 \le t \le 2$.

19. Evalúe $\int_C 2x^3 y\,dx + (3x + y)\,dy$, donde C está dada por $x = y^2$ de $(1, -1)$ a $(1, 1)$.

20. Evalúe $\int_C 4x\,dx + 2y\,dy$, donde C está dada por $x = y^3 + 1$ de $(0, -1)$ a $(9, 2)$.

En los problemas 21 y 22, evalúe $\int_C (x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy$ sobre la curva C dada.

21.

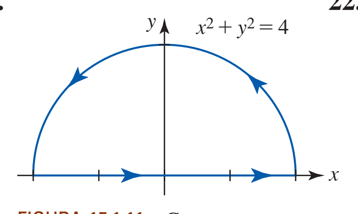


FIGURA 15.1.11 Curva del problema 21

22.

FIGURA 15.1.12 Curva del problema 22

En los problemas 23 y 24, evalúe $\int_C x^2y^3\,dx - xy^2\,dy$ sobre la curva C dada.

23.

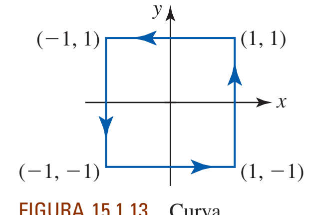


FIGURA 15.1.13 Curva del problema 23

24.

FIGURA 15.1.14 Curva del problema 24

25. Evalúe $\int_{-C} y\,dx - x\,dy$, donde C está dada por $x = 2\cos t$, $y = 3\,\text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi$.

26. Evalúe $\int_{-C} x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy$, donde C está dada por $y = x^4$, $-1 \le x \le 1$.

En los problemas 27-30, evalúe $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ sobre la curva C dada entre $(0, 0, 0)$ y $(6, 8, 5)$.

27. C consiste en los segmentos de recta de $(0, 0, 0)$ a $(2, 3, 4)$ y de $(2, 3, 4)$ a $(6, 8, 5)$.

28. C definida por $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \frac{5}{4}t^2\mathbf{k}$, $0 \le t \le 2$

29.

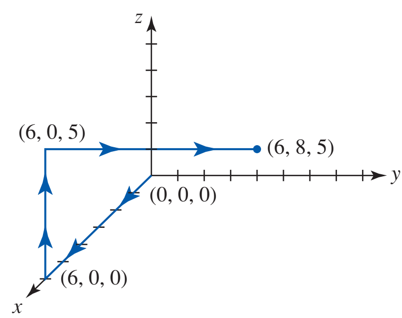


FIGURA 15.1.15 Curva del problema 29

30.

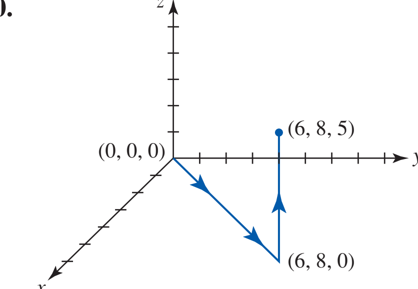


FIGURA 15.1.16 Curva del problema 30

31. Evalúe $\int_C 10x\,dx - 2xy^2\,dy + 6xz\,dz$ donde C está definida por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$.

32. Evalúe $\int_C 3x\,dx - y^2\,dy + z^2\,dz$ donde $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ y

C_1: el segmento de recta de (0, 0, 0) a (1, 1, 0).

C_2: el segmento de recta de (1, 1, 0) a (1, 1, 1).

C_3: el segmento de recta de (1, 1, 1) a (0, 0, 0).

33. Verifique que la integral de línea $\int_C y^2\,dx + xy\,dy$ tiene el mismo valor sobre C para cada una de las siguientes parametrizaciones:

C: $x = 2t + 1$, $y = 4t + 2$, $0 \le t \le 1$

C: $x = t^2$, $y = 2t^2$, $1 \le t \le \sqrt{3}$

C: $x = \ln t$, $y = 2\ln t$, $e \le t \le e^3$.

34. Considere las tres curvas entre (0, 0) y (2, 4).

C_1: $x = t$, $y = 2t$, $0 \le t \le 2$

C_2: $x = t$, $y = t^2$, $0 \le t \le 2$

C_3: $x = 2t - 4$, $y = 4t - 8$, $2 \le t \le 3$.

Demuestre que $\int_{C_1} xy\,ds = \int_{C_3} xy\,ds$, pero $\int_{C_1} xy\,ds \neq \int_{C_2} xy\,ds$. Explique.

≡ Aplicaciones

35. Si $\rho(x, y)$ es la densidad de un alambre (masa por longitud unitaria), entonces $m = \int_C \rho(x, y)\,ds$ es la masa del alambre. Calcule la masa de un alambre que tiene la forma del semicírculo $x = 1 + \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $0 \le t \le \pi$, si la densidad en un punto P es directamente proporcional a la distancia desde el eje y.

36. Las coordenadas del centro de masa de un alambre con densidad variable están dadas por

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{m},$$

donde

$$m = \int_C \rho(x, y)\,ds,\; M_x = \int_C y\rho(x, y)\,ds,\; M_y = \int_C x\rho(x, y)\,ds.$$

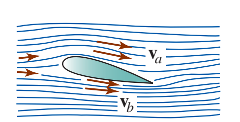
Encuentre el centro de masa del alambre del problema 35.



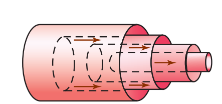
Huracán

15.2 Integrales de línea de campos vectoriales

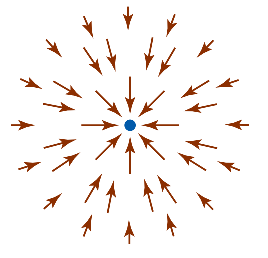
Introducción El movimiento del viento o el flujo de fluidos pueden describirse mediante un *campo de velocidades* en el que es posible asignar un vector en cada punto representando la velocidad de una partícula en el punto. Vea la FIGURA 15.2.1*a*) y *b*). Advierta que, en el campo de velocidades sobrepuesto a una imagen de satélite de un huracán en la foto al margen, los vectores muestran claramente la rotación característica en el sentido contrario al de las manecillas del reloj de los vientos dentro de un área de baja presión. Los vectores más largos cerca del centro



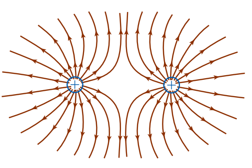
a) Flujo de aire alrededor de un ala de avión: $|\mathbf{v}_a| > |\mathbf{v}_b|$



b) Flujo laminar de la sangre en una arteria; las capas cilíndricas de sangre fluyen más rápido cerca del centro de la arteria



c) Campo de fuerza inversa al cuadrado; la magnitud de la fuerza de atracción es más grande cerca de la partícula



d) Líneas de fuerza alrededor de dos cargas iguales positivas

FIGURA 15.2.1 Ejemplos de campos vectoriales

del campo indican vientos de mayor velocidad que los de la periferia del campo. El concepto de un *campo de fuerza* desempeña un papel importante en mecánica, electricidad y magnetismo. Vea la figura 15.2.1*c*) y *d*). En esta sección estudiaremos una nueva función vectorial que describe a un campo de vectores, o **campo vectorial**, bidimensional o tridimensional y la conexión entre los campos vectoriales y las integrales de línea.

Campos vectoriales Un **campo vectorial** en el espacio bidimensional es una función de valores vectoriales

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

que asocia un único vector bidimensional $\mathbf{F}(x, y)$ con cada punto (x, y) en una región R en el plano xy sobre el cual están definidas las funciones componentes escalares P y Q. De manera similar, un campo vectorial en el espacio tridimensional es una función

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

que asocia un único vector tridimensional $\mathbf{F}(x, y, z)$ con cada punto (x, y, z) en una región D del espacio tridimensional con un sistema de coordenadas xyz.

EJEMPLO 1 Campo vectorial en el espacio bidimensional

Grafique el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

Solución Una manera de proceder consiste simplemente en elegir puntos en el plano xy y después graficar el vector $\mathbf{F}$ en cada punto. Por ejemplo, en $(1, 1)$ dibujaríamos el vector $\mathbf{F}(1, 1) = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$.

Para el campo vectorial dado es posible dibujar de manera sistemática vectores de la misma longitud. Observe que $|\mathbf{F}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, y por ello los vectores de la misma longitud k deben yacer a lo largo de la curva definida por $\sqrt{x^2 + y^2} = k$; esto es, en cualquier punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = k^2$, un vector tendría la misma longitud k. Por simplicidad vamos a elegir círculos que tienen algunos puntos en ellos con coordenadas enteras. Por ejemplo, para $k = 1$, $k = \sqrt{2}$ y $k = 2$ tenemos:

En $x^2 + y^2 = 1$: En los puntos $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, los vectores correspondientes $\mathbf{j}$, $-\mathbf{i}$, $-\mathbf{j}$, $\mathbf{i}$ tienen la misma longitud 1.
En $x^2 + y^2 = 2$: En los puntos $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$, los vectores correspondientes $-\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $-\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ tienen la misma longitud $\sqrt{2}$.
Sobre $x^2 + y^2 = 4$: En los puntos $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(-2, 0)$, $(0, -2)$, los vectores correspondientes $2\mathbf{j}$, $-2\mathbf{i}$, $-2\mathbf{j}$, $2\mathbf{i}$ tienen la misma longitud 2.

Los vectores en estos puntos se ilustran en la FIGURA 15.2.2. ■

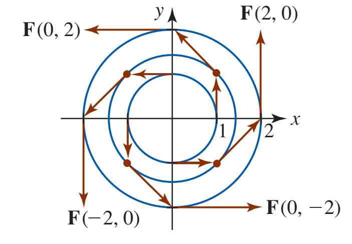
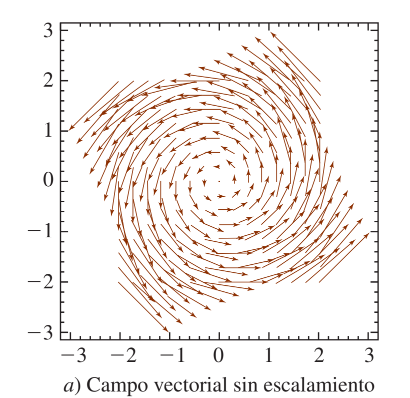
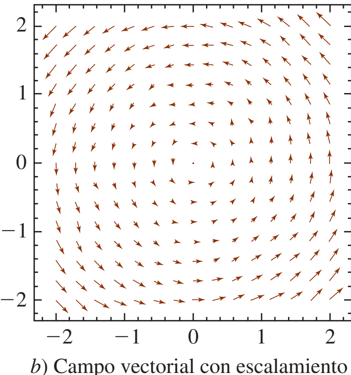


FIGURA 15.2.2 Campo vectorial bidimensional del ejemplo 1

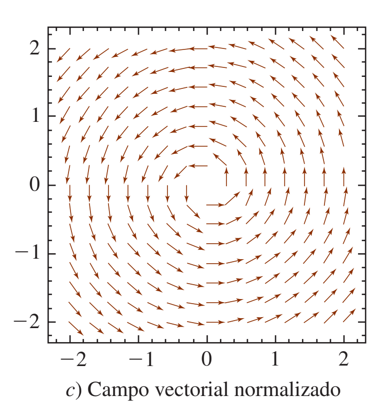
En general, es casi imposible dibujar campos vectoriales a mano y por ello debemos confiar en tecnologías como las de un SAC. En la FIGURA 15.2.3 hemos mostrado una versión generada por computadora del campo vectorial del ejemplo 1. Muchas veces cuando los vectores se dibujan con su longitud correcta, el campo vectorial luce amontonado con vectores que se traslapan. Vea la figura 15.2.3*a*). Un SAC escalará los vectores de manera tal que los que se muestran tienen longitudes proporcionales a su longitud verdadera. Vea la figura 15.2.3*b*). En la figura 15.2.3*c*) se pre-



a) Campo vectorial sin escalamiento



b) Campo vectorial con escalamiento

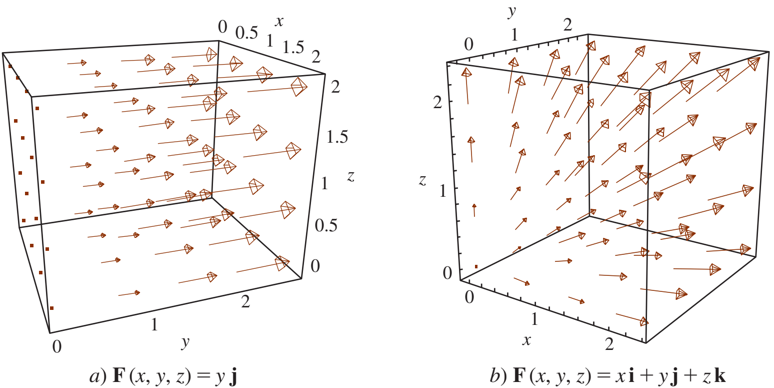


c) Campo vectorial normalizado

FIGURA 15.2.3 Campo vectorial del ejemplo 1

senta la versión normalizada del mismo campo vectorial; en otras palabras, todos los vectores tienen la misma longitud unitaria. Advierta que la pequeña inclinación en las representaciones del campo vectorial de la figura 15.2.3 se deben al hecho de que el SAC calcula y grafica el vector en la dirección apropiada con el punto inicial (su cola) del vector ubicada en un punto especificado.

En la FIGURA 15.2.4 se ilustran dos campos vectoriales en el espacio tridimensional.



a) $\mathbf{F}(x, y, z) = y\,\mathbf{j}$ *b*) $\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$

FIGURA 15.2.4 Campos vectoriales en el espacio tridimensional

Conexión con integrales de línea Podemos recurrir al concepto de un campo vectorial bidimensional o tridimensional para escribir una integral de línea general de un modo compacto. Por ejemplo, suponga que el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ se define a lo largo de una curva paramétrica C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, y considere que la función vectorial $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ es el vector de posición de los puntos sobre C. Entonces la derivada de $\mathbf{r}(t)$,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j}$$

nos lleva a definir la diferencial de $\mathbf{r}(t)$ como

$$d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}. \tag{1}$$

Puesto que $$\mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r} = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

podemos escribir entonces una **integral de línea de F a lo largo de *C*** como

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{2}$$

Similarmente, para una integral de línea sobre una curva en el espacio C,

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{3}$$

donde

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \quad \text{y} \quad d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}.$$

Si $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$, entonces para evaluar $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ en (2) definimos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = P(x(t), y(t))\,\mathbf{i} + Q(x(t), y(t))\,\mathbf{j} \tag{4}$$

y usamos (1) en la forma $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt$ para escribir

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\,dt. \tag{5}$$

El resultado en (5) se extiende de manera natural a (3) para campos vectoriales tridimensionales definidos a lo largo de una curva en el espacio C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$.

EJEMPLO 2 Empleo de (5)

Evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x, y) = xy\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$ y C está definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}, -1 \le t \le 1$.

Solución De (4) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) &= (e^{-t}e^t)\mathbf{i} + (e^t)^2\mathbf{j}\\ &= \mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Puesto que $d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t)\,dt = (-e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j})\,dt$,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot d\mathbf{r} &= (\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j})\cdot(-e^{-t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j})\,dt\\ &= (-e^{-t} + e^{3t})\,dt\end{aligned}$$

y por ello de (5)

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_{-1}^{1}\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt = \int_{-1}^{1}(-e^{-t} + e^{3t})\,dt\\ &= \left(e^{-t} + \frac{1}{3}e^{3t}\right)\Big]_{-1}^{1}\\ &= \left(e^{-1} + \frac{1}{3}e^{3}\right) - \left(e + \frac{1}{3}e^{-3}\right)\\ &\approx 4.3282.\end{aligned}$$

El campo vectorial **F** y la curva C se muestran en la FIGURA 15.2.5. ■

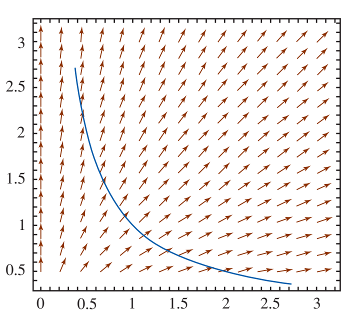


FIGURA 15.2.5 Curva y campo vectorial del ejemplo 2

Trabajo En la sección 11.3 vimos que el trabajo W realizado por una fuerza constante **F** que causa un desplazamiento en línea recta **d** de un objeto es $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{d}$. En la sección 6.8 se demostró que el trabajo realizado al mover un objeto de $x = a$ a $x = b$ por la fuerza $F(x)$ que varía en magnitud pero no en dirección está dado por la integral definida $W = \int_a^b F(x)\,dx$. En general, un campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ que actúa en cada punto sobre una curva suave C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, varía tanto en magnitud como en dirección. Vea la FIGURA 15.2.6*a*). Si A y B son los puntos $(x(a), y(a))$ y $(x(b), y(b))$, respectivamente, preguntamos:

- ¿Cuál es el trabajo realizado por **F** cuando su punto de aplicación se mueve a lo largo de C de A a B?

Para responder esta pregunta, suponga que C se divide en n subarcos de longitudes Δs_k y que (x_k^*, y_k^*) es un punto muestra sobre el subarco k-ésimo. Sobre cada subarco $\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)$ es una fuerza constante. Si, como se muestra en la figura 15.2.6*b*), la longitud del vector

$$\Delta\mathbf{r}_k = (x_k - x_{k-1})\mathbf{i} + (y_k - y_{k-1})\mathbf{j} = \Delta x_k\mathbf{i} + \Delta y_k\mathbf{j}$$

es una aproximación a la longitud del subarco k-ésimo, entonces el trabajo aproximado realizado por **F** sobre el subarco es

$$\begin{aligned}\left(|\mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)|\cos\theta\right)|\Delta\mathbf{r}_k| &= \mathbf{F}(x_k^*, y_k^*)\cdot\Delta\mathbf{r}_k\\ &= P(x_k^*, y_k^*)\,\Delta x_k + Q(x_k^*, y_k^*)\,\Delta y_k.\end{aligned}$$

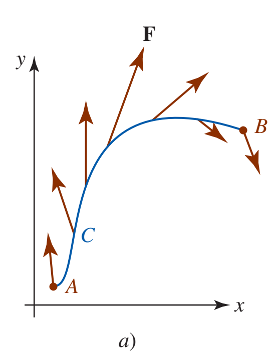
Sumando estos elementos de trabajo y tomando el límite, podemos definir de manera natural el trabajo realizado por **F** como la integral de línea de **F** a lo largo de C:

$$W = \int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \qquad \text{o} \qquad W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{6}$$

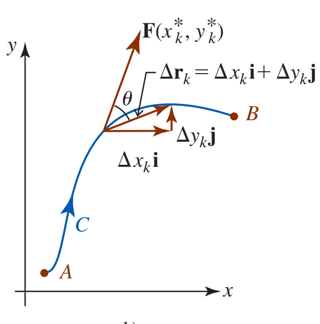
En el caso de un campo de fuerza que actúa en puntos sobre una curva en el espacio tridimensional, el trabajo $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ se define como en (3).

En este caso, ya que

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$



a)



b)

FIGURA 15.2.6 Vector de fuerza variable **F** que actúa a lo largo de C

dejamos $d\mathbf{r} = \mathbf{T}\,ds$, donde $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ es, como vimos en la sección 12.1, una tangente unitaria a C. Por consiguiente,

$$W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = \int_C \text{comp}_{\mathbf{T}}\mathbf{F}\,ds. \tag{7}$$

En otras palabras,

- El trabajo efectuado por una fuerza **F** a lo largo de una curva C se debe por completo a la componente tangencial de **F**.

EJEMPLO 3 Trabajo

Determine el trabajo realizado por

a) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ y ***b***) $\mathbf{F} = \frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}$

a lo largo de la curva C trazada por $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j}$ desde $t = 0$ a $t = \pi$.

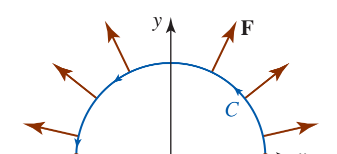
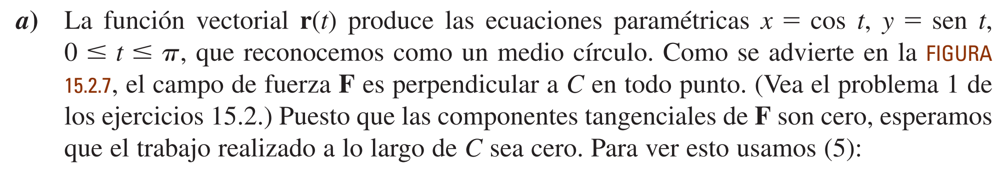


FIGURA 15.2.7 Vector de fuerza **F** que actúa a lo largo de C en el inciso a) del ejemplo 3

Solución



a) La función vectorial $\mathbf{r}(t)$ produce las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \text{sen}\,t$, $0 \le t \le \pi$, que reconocemos como un medio círculo. Como se advierte en la FIGURA 15.2.7, el campo de fuerza **F** es perpendicular a C en todo punto. (Vea el problema 1 de los ejercicios 15.2.) Puesto que las componentes tangenciales de **F** son cero, esperamos que el trabajo realizado a lo largo de C sea cero. Para ver esto usamos (5):

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} (\cos t\,\mathbf{i} + \text{sen}\,t\,\mathbf{j})\cdot(-\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_0^{\pi} (-\cos t\,\text{sen}\,t + \text{sen}\,t\cos t)\,dt = 0. \end{aligned}$$

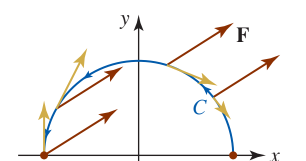
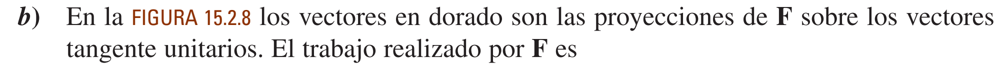


FIGURA 15.2.8 Vector de fuerza **F** que actúa a lo largo de C en el inciso b) del ejemplo 3



b) En la FIGURA 15.2.8 los vectores en dorado son las proyecciones de **F** sobre los vectores tangente unitarios. El trabajo realizado por **F** es

$$\begin{aligned} W &= \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j}\right)\cdot(-\text{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j})\,dt \\ &= \int_0^{\pi} \left(-\frac{3}{4}\text{sen}\,t + \frac{1}{2}\cos t\right)dt \\ &= \left(\frac{3}{4}\cos t + \frac{1}{2}\text{sen}\,t\right)\Bigg]_0^{\pi} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Las unidades de trabajo dependen de las unidades de $|\mathbf{F}|$ y de las unidades de distancia. ■

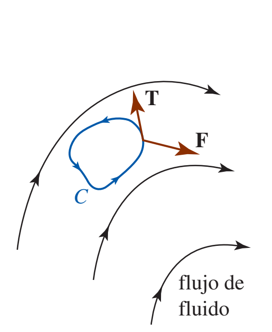


FIGURA 15.2.9 Curva cerrada en un campo de velocidades

Circulación Una integral de línea de un campo vectorial **F** a lo largo de una curva cerrada simple C se dice que será la **circulación** de **F** alrededor de C; esto es.

$$\text{circulación} = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds. \tag{8}$$

En particular, si **F** es el campo de velocidades de un fluido, entonces la circulación (8) es una medida de la cantidad por la cual el fluido tiende a girar por la curva C rotando, o circulando, alrededor de ella. Por ejemplo, si **F** es perpendicular a **T** para todo (x, y) sobre C, entonces $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds = 0$ y la curva no se mueve en absoluto. Por otro lado, $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds > 0$ y $\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds < 0$ significa que el fluido tiende a rotar C en dirección contraria a la de las manecillas del reloj y en el sentido de las manecillas del reloj, respectivamente. Vea la FIGURA 15.2.9.

Campos vectoriales gradiente Asociado con una función f de dos o tres variables hay un campo vectorial. Para una función de dos variables $f(x, y)$, el gradiente

$$\nabla f(x, y) = f_x(x, y)\mathbf{i} + f_y(x, y)\mathbf{j} \tag{9}$$

define un campo vectorial bidimensional llamado **campo gradiente** de f. Para una función de tres variables $f(x, y, z)$, el campo gradiente tridimensional de f se define como

$$\nabla f(x, y, z) = f_x(x, y, z)\mathbf{i} + f_y(x, y, z)\mathbf{j} + f_z(x, y, z)\mathbf{k}. \tag{10}$$

EJEMPLO 4 Campo gradiente

Determine el campo gradiente de $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Solución Por definición, el campo gradiente de f es

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}.$$ ■

Recuerde de la sección 13.1 que las curvas definidas por $f(x, y) = c$, para c adecuada, se denominan **curvas de nivel** de f. En el ejemplo 5, las curvas de nivel de f son la familia de hipérbolas $x^2 - y^2 = c$, donde c es una constante. Con la ayuda de un SAC, hemos superpuesto en la FIGURA 15.2.10 un muestreo de las curvas de nivel $x^2 - y^2 = c$ (azul) y vectores en el campo gradiente $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ (rojo). Para un mayor énfasis visual hemos elegido graficar todos los vectores en el campo de manera que sus longitudes sean las mismas. Cada vector en el campo gradiente $\nabla f(x, y) = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}$ es perpendicular a alguna curva de nivel. En otras palabras, si la cola o punto inicial de un vector coincide con un punto (x, y) sobre una curva de nivel, entonces el vector es perpendicular a la curva de nivel en (x, y).

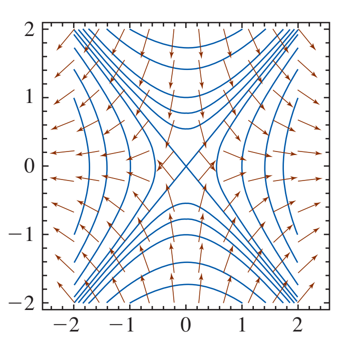


FIGURA 15.2.10 Curvas de nivel de f y campo gradiente de f en el ejemplo 4

Campos vectoriales conservativos Un campo vectorial **F** se dice que es **conservativo** si **F** puede escribirse como un gradiente de una función escalar ϕ. En otras palabras, **F** es conservativo si existe una función ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$. La función ϕ recibe el nombre de **función potencial** de **F**.

EJEMPLO 5 Campo vectorial conservativo

Demuestre que el campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Considere la función $\phi(x, y) = xy$. El gradiente de la función escalar ϕ es

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}.$$

Como $\nabla\phi = \mathbf{F}(x, y)$ concluimos que $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo y que ϕ es una función potencial de **F**. El campo vectorial se presenta en la FIGURA 15.2.11. ■

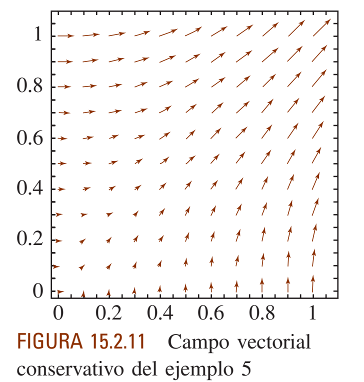


FIGURA 15.2.11 Campo vectorial conservativo del ejemplo 5

Desde luego, no todo campo vectorial es un campo conservativo aunque muchos campos vectoriales encontrados en física son conservativos. (Vea el problema 51 en los ejercicios 15.2.) Para los propósitos presentes, la importancia de los campos vectoriales conservativos será evidente en la siguiente sección cuando continuemos con nuestro estudio de integrales de línea.

Ejercicios 15.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-46.

≡ Fundamentos

En los problemas 1-6, grafique algunos vectores representativos en el campo vectorial dado.

1. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
2. $\mathbf{F}(x, y) = -x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$
3. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$
4. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$
5. $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{j}$
6. $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{j}$

En los problemas 7-10, asocie la figura dada con uno de los campos vectoriales en *a*)-*d*).

a) $\mathbf{F}(x, y) = -3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
b) $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$
c) $\mathbf{F}(x, y) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$
d) $\mathbf{F}(x, y) = -3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

7.

FIGURA 15.2.12 Campo vectorial del problema 7

8.

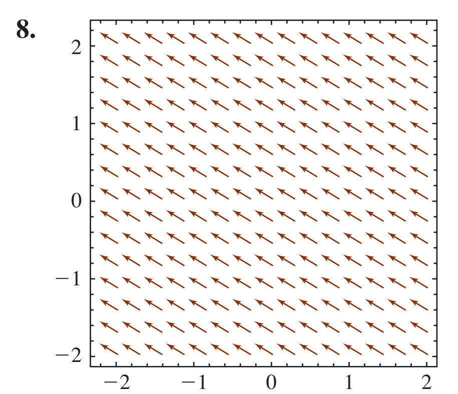


FIGURA 15.2.13 Campo vectorial del problema 8

9.

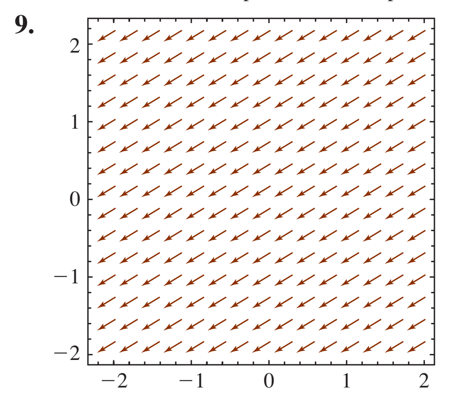


FIGURA 15.2.14 Campo vectorial del problema 9

10.

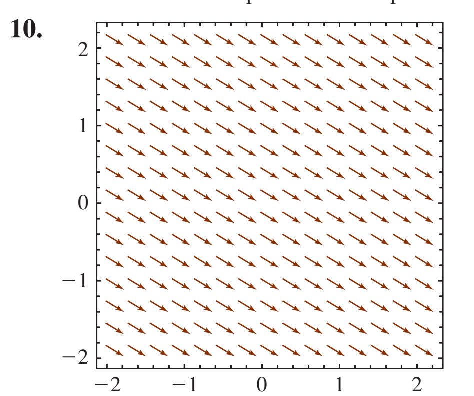


FIGURA 15.2.15 Campo vectorial del problema 10

En los problemas 11-14, asocie la figura dada con uno de los campos vectoriales en *a*)-*d*).

***a*)** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

***b*)** $\mathbf{F}(x, y, z) = -z\mathbf{k}$

***c*)** $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$

***d*)** $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

11.

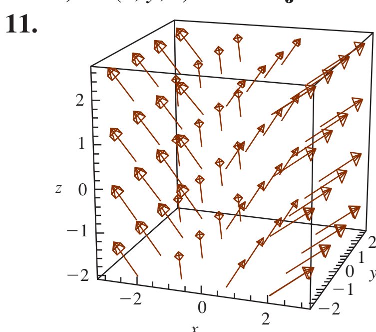


FIGURA 15.2.16 Campo vectorial del problema 11

12.

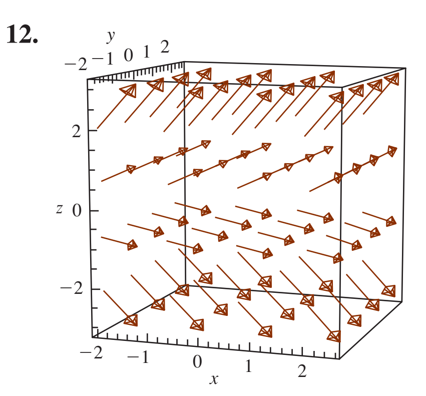


FIGURA 15.2.17 Campo vectorial del problema 12

13.

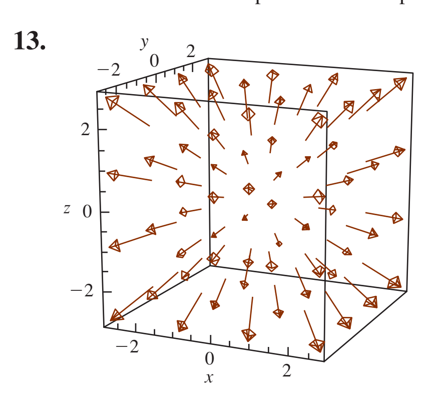


FIGURA 15.2.18 Campo vectorial del problema 13

14.

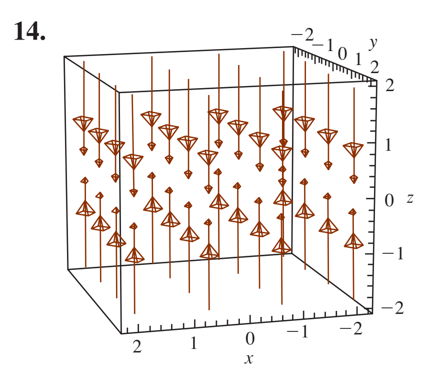


FIGURA 15.2.19 Campo vectorial del problema 14

En los problemas 15-20, evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

15. $\mathbf{F}(x, y) = y^3\mathbf{i} - x^2y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = e^{-2t}\mathbf{i} + e^t\mathbf{j}$, $0 \le t \le \ln 2$

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2$

17. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = (2t - 1)\mathbf{i} + (6t + 1)\mathbf{j}$, $-1 \le t \le 1$

18. $\mathbf{F}(x, y) = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$; $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le \pi/6$

19. $\mathbf{F}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$;
$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$, $0 \le t \le \pi$

20. $\mathbf{F}(x, y, z) = e^x\mathbf{i} + xe^{xy}\mathbf{j} + xye^{xyz}\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $0 \le t \le 1$

21. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de $y = \ln x$ desde (1, 0) a (*e*, 1).

22. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = 2xy\mathbf{i} + 4y^2\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la curva suave por partes que consiste en los segmentos de recta de (−2, 2) a (0, 0) y de (0, 0) a (2, 3).

23. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (x + 2y)\mathbf{i} + (6y - 2x)\mathbf{j}$ que actúa una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del triángulo con vértices (1, 1), (3, 1) y (3, 2).

24. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la curva dada por $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ de $t = 1$ a $t = 3$.

25. Encuentre el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{F}(x, y) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ que actúa una vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor del círculo $x^2 + y^2 = 9$.

26. En un campo de fuerza inverso al cuadrado $\mathbf{F} = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde c es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, determine el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la recta de (1, 1, 1) a (3, 3, 3).

27. Para el campo vectorial gradiente que se obtuvo en el ejemplo 4, determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = \nabla f$ que actúa a lo largo de $\mathbf{r}(t) = 5 \cos t\mathbf{i} + 5 \text{ sen } t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

28. Para el campo vectorial conservativo del ejemplo 5, encuentre el trabajo realizado por la fuerza **F** que actúa a lo largo de $\mathbf{r}(t) = 2 \text{ sen } t\mathbf{i} + 10 \cos t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$.

29. Un campo de fuerza $\mathbf{F}(x, y)$ actúa en cada punto sobre una curva C, que es la unión de C_1, C_2 y C_3 mostrada en la FIGURA 15.2.20. $|\mathbf{F}|$ se mide en libras y la distancia se mide en pies utilizando la escala dada en la figura. Emplee los vectores representativos que se muestran para aproximar el trabajo realizado por **F** a lo largo de C. [*Sugerencia*: Emplee $W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds$.]

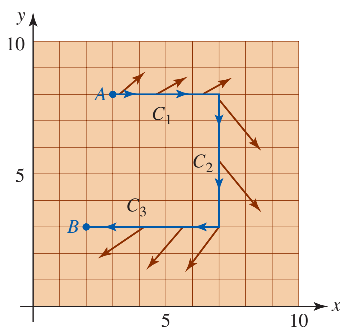


FIGURA 15.2.20 Curva C y campo de fuerza **F** del problema 29

30. Suponga que una curva suave C es descrita por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$ para $a \le t \le b$. Sean la aceleración, la velocidad y la rapidez dadas por $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$, $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ y $v = |\mathbf{v}|$, respectivamente. Empleando la segunda ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, demuestre que, en la ausencia de fricción, el trabajo realizado por **F** al mover una partícula de masa constante m desde el punto A en $t = a$ hasta el punto B en $t = b$ es el mismo que el cambio en la energía cinética:

$$K(B) - K(A) = \frac{1}{2}m[v(b)]^2 - \frac{1}{2}m[v(a)]^2.$$

$$\left[\textit{Sugerencia}\text{: Considere } \frac{d}{dt}v^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}.\right]$$

En los problemas 31-36, encuentre el campo gradiente de la función f dada.

31. $f(x, y) = \frac{1}{6}(3x - 6y)^2$ **32.** $f(x, y) = x - y + 2x \cos 5xy$

33. $f(x, y, z) = x \tan^{-1} yz$ **34.** $f(x, y, z) = x - x^2yz^4$

35. $f(x, y, z) = y + z - xe^{-y^2}$

36. $f(x, y, z) = \ln(x^2 + 2y^4 + 3z^6)$

En los problemas 37-40, asocie el campo vectorial conservativo dado **F** con una de las funciones potencial en *a*)-*d*).

***a*)** $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - 5$ ***b*)** $\phi(x, y) = x^2 + \frac{1}{2}y^2$

***c*)** $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 4$ ***d*)** $\phi(x, y) = 2x + \frac{1}{2}y^2 + 1$

37. $\mathbf{F}(x, y) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ **38.** $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$

39. $\mathbf{F}(x, y) = 2\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ **40.** $\mathbf{F}(x, y) = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$

En los problemas 41-44, el campo vectorial dado es conservativo. Mediante ensayo y error, determine una función potencial ϕ para **F**.

41. $\mathbf{F}(x, y) = \cos x\mathbf{i} + (1 - \text{sen } y)\mathbf{j}$

42. $\mathbf{F}(x, y) = e^{-y}\mathbf{i} - xe^{-y}\mathbf{j}$

43. $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 12z^2\mathbf{k}$

44. $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2z^3\mathbf{i} + 2xyz^3\mathbf{j} + 3xy^2z^2\mathbf{k}$

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 45-50, utilice un SAC para superponer las gráficas del campo gradiente de f y las curvas de nivel de f sobre el mismo conjunto de ejes coordenados.

45. $f(x, y) = x + 3y$ **46.** $f(x, y) = x - y^2$

47. $f(x, y) = \text{sen } x \text{ sen } y$ **48.** $f(x, y) = \text{sen } x + \text{sen } y$

49. $f(x, y) = e^{-x} \cos y$ **50.** $f(x, y) = \cos(x + y)$

≡ Piense en ello

51. Todo campo de fuerzas inverso al cuadrado $\mathbf{F} = c\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde c es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, es conservativo. Demuestre lo anterior determinando la función potencial $\phi(x, y, z)$ para **F**.

52. ¿Dos funciones diferentes f y g pueden tener el mismo campo gradiente?

15.3 Independencia de la trayectoria

Introducción En esta sección nos referiremos a una curva C suave por partes entre un punto inicial A y un punto terminal B como una **trayectoria** o **trayectoria de integración**. El valor de una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ suele depender de la trayectoria de integración. En otras palabras, si C_1 y C_2 son dos trayectorias diferentes entre los mismos puntos A y B, entonces en general esperamos que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \neq \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Sin embargo, hay excepciones muy importantes. La noción de un campo vectorial conservativo **F** desempeña un papel importante en la discusión que sigue. Se le sugiere repasar este concepto en la sección 15.2.

Nota: Para evitar la repetición innecesaria suponemos todo el tiempo que **F** es un campo vectorial continuo en alguna región bidimensional o tridimensional, que sus funciones componentes tienen primeras derivadas parciales continuas en la región, y que la trayectoria C yace por completo en esta última.

EJEMPLO 1 Independencia de la trayectoria

La integral $\int_C y\,dx + x\,dy$ tiene el mismo valor en cada trayectoria C entre (0, 0) y (1, 1) que se muestra en la FIGURA 15.3.1. Quizá recuerde de los problemas 13-16 de los ejercicios 15.1 que sobre estas trayectorias

$$\int_C y\,dx + x\,dy = 1.$$

También se le sugiere verificar $\int_C y\,dx + x\,dy = 1$ sobre las curvas $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = \sqrt{x}$ entre (0, 0) y (1, 1). La relevancia de todo esto sugiere que la integral $\int_C y\,dx + x\,dy$ no depende de la trayectoria que une a estos dos puntos. Proseguimos con esta discusión en el ejemplo 2.

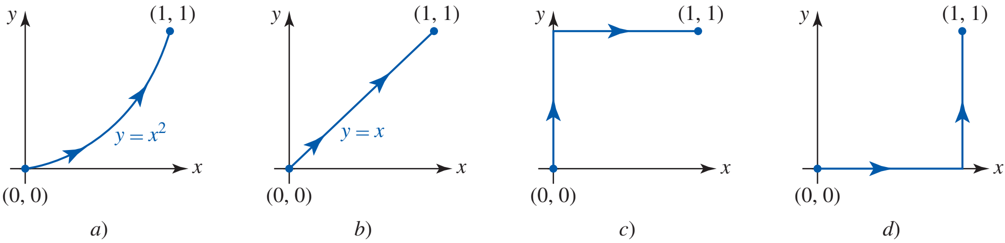


FIGURA 15.3.1 La integral de línea del ejemplo 1 es la misma sobre cuatro trayectorias ■

La integral en el ejemplo 1 puede interpretarse como la integral de línea de un campo vectorial **F** a lo largo de una trayectoria C. Si $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ y $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$, entonces $\int_C y\,dx + x\,dy = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. En el ejemplo 5 de la sección 15.2 se demostró que el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es conservativo encontrando la función potencial $\phi(x, y) = xy$ para **F**. Recuerde que esto significa que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla\phi$.

Un teorema fundamental El siguiente teorema establece una importante relación entre el valor de una integral de línea sobre una trayectoria que yace dentro de un campo vectorial conservativo. Además, proporciona un medio de evaluar estas integrales de línea de manera que es análogo al teorema fundamental del cálculo:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a), \tag{1}$$

donde $f(x)$ es una antiderivada de $f'(x)$. En el siguiente teorema, conocido como **teorema fundamental para integrales de línea**, el gradiente de una función escalar ϕ,

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j},$$

desempeña la parte de la derivada $f'(x)$ en (1).

Teorema 15.3.1 Teorema fundamental

Suponga que C es la trayectoria en una región abierta R del plano xy dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} = y(t)\mathbf{j}$, $a \le t \le b$. Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en R y ϕ es una función potencial para **F**, entonces

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A), \tag{2}$$

donde $A = (x(a), y(a))$ y $B = (x(b), y(b))$.

DEMOSTRACIÓN Probaremos el teorema para una trayectoria suave C. Puesto que ϕ es una función potencial para $\mathbf{F}$ tenemos

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Usando después $\mathbf{r}'(t) = (dx/dt)\mathbf{i} + (dy/dt)\mathbf{j}$ es posible escribir la integral de línea de $\mathbf{F}$ a lo largo de la trayectoria C como

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)dt.\end{aligned}$$

En vista de la regla de la cadena (teorema 13.5.1),

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

y por ello se concluye que

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \frac{d\phi}{dt}\,dt\\ &= \phi(x(t), y(t))\Big]_a^b\\ &= \phi(x(b), y(b)) - \phi(x(a), y(a))\\ &= \phi(B) - \phi(A).\end{aligned}$$

■

Para curvas suaves por partes, la prueba anterior debe modificarse considerando cada arco suave de la curva C.

Independencia de la trayectoria Si el valor de una integral de línea es el mismo para *cada* trayectoria en una región que conecta el punto inicial A y el punto terminal B, entonces se dice que la integral será **independiente de la trayectoria**. En otras palabras, una integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ a lo largo de C es independiente de la trayectoria si $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ para cualesquiera dos trayectorias C_1 y C_2 entre A y B. El teorema 15.3.1 muestra que si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo en una región abierta bidimensional o tridimensional, entonces $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ depende sólo de los puntos inicial y terminal A y B de la trayectoria C, y no de C misma. En otras palabras, las integrales de línea de campos vectoriales conservativos son independientes de la trayectoria. Dichas integrales a menudo se escriben

$$\int_A^B \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}. \tag{3}$$

EJEMPLO 2 Repaso del ejemplo 1

Evalúe $\int_C y\,dx + x\,dy$, donde C es la trayectoria con punto inicial (0, 0) y punto terminal (1, 1).

Solución La trayectoria C que se muestra en la FIGURA 15.3.2 representa cualquier curva suave por partes con puntos inicial y terminal (0, 0) y (1, 1). Hemos visto varias veces que $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo definido en cada punto del plano xy y que $\phi(x, y) = xy$ es una función potencial para $\mathbf{F}$. De tal modo, en vista de (2) del teorema 15.3.1 y (3), podemos escribir

$$\begin{aligned}\int_C y\,dx + x\,dy &= \int_{(0,0)}^{(1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}\\ &= xy\Big]_{(0,0)}^{(1,1)}\\ &= 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1.\end{aligned}$$

■

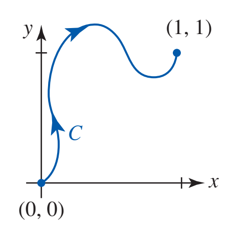
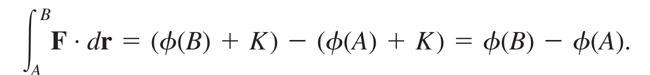


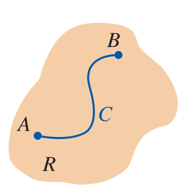
FIGURA 15.3.2 Curva suave por partes del ejemplo 2

Al usar el teorema fundamental del cálculo (1), *cualquier* antiderivada de $f'(x)$ puede utilizarse, tal como $f(x) + K$, donde K es una constante. De manera similar, una función potencial para el campo vectorial del ejemplo 2 es $\phi(x, y) = xy + K$, donde K es una constante. Podemos descartar esta constante al usar (2) del teorema 15.3.1 puesto que

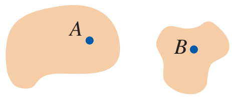


$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (\phi(B) + K) - (\phi(A) + K) = \phi(B) - \phi(A).$$

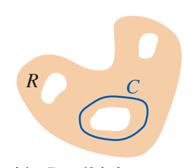
Antes de proceder necesitamos considerar algunas regiones especiales en el plano.



a) Región conexa *R*



b) *R* no es conexa



c) Región *R* múltiplemente conexa

FIGURA 15.3.3 Regiones en el plano

Terminología Afirmamos que una región (en el plano o en el espacio) es **conexa** si cada par de puntos *A* y *B* en la región puede unirse mediante una curva suave por partes que yace por completo en la región. Una región *R* en el plano es **simplemente conexa** si es conexa y toda curva cerrada simple *C* que yace del todo dentro de la región puede reducirse, o contraerse, hasta un punto sin abandonar *R*. La última condición significa que si *C* es cualquier curva cerrada simple que yace por completo en *R*, entonces la región en el interior de *C* también yace por completo en *R*. Poniéndolo en términos generales, una región simplemente conexa no tiene hoyos en ella. La región *R* en la FIGURA 15.3.3*a*) es una región simplemente conexa. En la figura 15.3.3*b*) la región *R* que se muestra no es conexa, o **disconexa**, puesto que *A* y *B* no pueden unirse mediante una curva *C* suave por partes que esté en *R*. La región en la figura 15.3.3*c*) es conexa pero no simplemente conexa porque tiene tres hoyos en ella. La curva representativa *C* en la figura rodea a uno de los hoyos, y por ello no puede contraerse hasta un punto sin dejar la región. Esta última región se dice que es **múltiplemente conexa**.

En una región conexa abierta *R*, las nociones de independencia de la trayectoria y un campo vectorial conservativo son equivalentes. Esto significa: si **F** es conservativo en *R*, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria *C*, e inversamente, si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, entonces **F** es conservativo.

Enunciamos lo anterior de manera formal en el siguiente teorema.



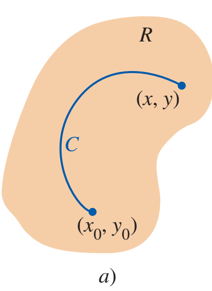
Teorema 15.3.2 Conceptos equivalentes

En una región conexa abierta *R*, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria *C* si y sólo si el campo vectorial **F** es conservativo en *R*.

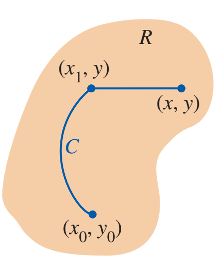
DEMOSTRACIÓN Si **F** es conservativo en *R*, entonces ya hemos visto que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria *C* como una consecuencia del teorema 15.3.1.

Por conveniencia probamos el inverso para una región *R* en el plano. Suponga que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria en *R* y que (x_0, y_0) y (x, y) son puntos arbitrarios en la región *R*. Sea la función $\phi(x, y)$ definida como

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$



a)



b)

FIGURA 15.3.4 Región *R* en la prueba del teorema 15.3.2

donde *C* es una trayectoria arbitraria en *R* de (x_0, y_0) a (x, y) y $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$. Vea la FIGURA 15.3.4*a*). Después de esto se elige un punto (x_1, y), $x_1 \neq x$, de manera que el segmento de recta de (x_1, y) a (x, y) esté en *R*. Vea la figura 15.3.4*b*). Luego por la independencia de la trayectoria podemos escribir

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

En este caso,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 + \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy$$

puesto que la primera integral no depende de *x*. Sin embargo, sobre el segmento de recta entre (x_1, y) y (x, y), *y* es constante de manera que $dy = 0$. Por consiguiente, $\int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx + Q\,dy = \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P\,dx$.

Por la forma de la derivada del teorema fundamental del cálculo (teorema 5.5.2) tenemos entonces

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{(x_1, y)}^{(x, y)} P(x, y)\,dx = P(x, y).$$

De igual modo es posible demostrar que $\partial\phi/\partial y = Q(x, y)$. En consecuencia, de

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \mathbf{F}(x, y)$$

concluimos que **F** es conservativo. ■

Integrales alrededor de trayectorias cerradas Recuerde de la sección 15.1 que una trayectoria, o curva, C se dice que es cerrada cuando su punto inicial A es el mismo que el punto terminal B. Si C es una curva paramétrica definida por la función vectorial $\mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, entonces C es **cerrada** cuando $A = B$, esto es, $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$. El siguiente teorema es una consecuencia inmediata del teorema 15.3.1.

Teorema 15.3.3 Conceptos equivalentes

En una región conexa abierta R, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria si y sólo si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R.

DEMOSTRACIÓN Primero demostramos que si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R. Para ver esto vamos a suponer que A y B son cualesquiera dos puntos sobre C y que $C = C_1 \cup C_2$, donde C_1 es una trayectoria de A a B y C_2 es una trayectoria de B a A. Vea la FIGURA 15.3.5*a*). En ese caso,

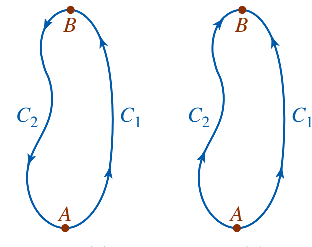
$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \tag{4}$$

donde $-C_2$ es ahora una trayectoria de A a B. Debido a la independencia de la trayectoria, $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. De tal modo, (4) implica que $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

A continuación, si probamos el inverso de que si $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda trayectoria cerrada C en R, entonces $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. Dejemos que C_1 y C_2 representen cualesquiera dos trayectorias de A a B y por ello $C = C_1 \cup (-C_2)$ es una trayectoria cerrada. Vea la figura 15.3.5*b*). Se sigue de $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ o

$$0 = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{-C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

que $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Por consiguiente, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. ■



a) $C = C_1 \cup C_2$ *b*) $C = C_1 \cup (-C_2)$

FIGURA 15.3.5 Trayectorias en la prueba del teorema 15.3.3

Suponga que **F** es un campo vectorial conservativo definido sobre una región conexa abierta y C es una trayectoria cerrada que yace por completo en la región. Cuando los resultados de los teoremas anteriores se juntan concluimos que

$$\mathbf{F} \text{ conservativo} \Leftrightarrow \text{independencia de la trayectoria} \Leftrightarrow \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \tag{5}$$

El símbolo $\Leftrightarrow$ en (5) se lee "equivalente a" o "si y sólo si".

Prueba para un campo conservativo Las implicaciones en (5) muestran que si la integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ no es independiente de la trayectoria, entonces el campo vectorial no es conservativo. Sin embargo, hay una forma más sencilla de determinar si **F** es conservativo. El siguiente teorema es una prueba para un campo vectorial conservativo que recurre a las derivadas parciales de las funciones componentes de $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$.

Teorema 15.3.4 Prueba para un campo conservativo

Suponga que $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial conservativo en una región abierta R y que P y Q son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en R. Entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{6}$$

para todo (x, y) en R. Inversamente, si se cumple la igualdad (6) para todo (x, y) en una región R simplemente conexa, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es conservativo en R.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Probamos la primera mitad del teorema. Suponemos que las funciones componentes del campo vectorial conservativo $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta R. Puesto que $\mathbf{F}$ es conservativo, existe una función potencial ϕ tal que

$$\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}.$$

Así, $P = \partial\phi/\partial x$ y $Q = \partial\phi/\partial y$. En este caso

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\,\partial x} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}.$$

Del teorema 13.3.1, las derivadas parciales mixtas de segundo orden son iguales y por ello $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ como se quería demostrar. ■

EJEMPLO 3 Empleo del teorema 15.3.4

El campo vectorial conservativo $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ en el ejemplo 2 es continuo y tiene funciones componentes cuyas primeras derivadas parciales son continuas en toda la región abierta R consistente en todo el plano xy. Con las identificaciones $P = y$ y $Q = x$ se deduce de (6) del teorema 15.3.4,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$ ■

EJEMPLO 4 Empleo del teorema 15.3.4

Determine si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 - 2y^3)\mathbf{i} + (x + 5y)\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Con $P = x^2 - 2y^3$ y $Q = x + 5y$, encontramos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y^2 \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1.$$

Como $\partial P/\partial y \neq \partial Q/\partial x$ para todos los puntos en el plano, se sigue del teorema 15.3.4 que $\mathbf{F}$ no es conservativo. ■

EJEMPLO 5 Empleo del teorema 15.3.4

Determine si el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = -ye^{-xy}\mathbf{i} - xe^{-xy}\mathbf{j}$ es conservativo.

Solución Con $P = -ye^{-xy}$ y $Q = -xe^{-xy}$, encontramos

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xye^{-xy} - e^{-xy} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Las componentes de $\mathbf{F}$ son continuas y tienen derivadas parciales continuas. De tal modo, (6) se cumple en todo el plano xy, que es una región simplemente conexa. Del inverso del teorema 15.3.4 concluimos que $\mathbf{F}$ es conservativo. ■

Tenemos una pregunta más importante que responder en esta sección:

- Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo, ¿cómo se encuentra una función potencial ϕ para $\mathbf{F}$? (7)

El inciso *b*) del siguiente ejemplo utiliza la integración parcial. Se recomienda un repaso de la sección 14.2.

En el siguiente ejemplo damos la respuesta a la pregunta planteada en (7).

EJEMPLO 6 Integral que es independiente de la trayectoria

a) Demuestre que $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{F}(x, y) = (y^2 - 6xy + 6)\mathbf{i} + (2xy - 3x^2 - 2y)\mathbf{j}$, es independiente de la trayectoria C entre $(-1, 0)$ y $(3, 4)$.

b) Encuentre una función potencial ϕ para $\mathbf{F}$.

c) Evalúe $\displaystyle\int_{(-1,0)}^{(3,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Solución

a) Al identificar $P = y^2 - 6xy + 6$ y $Q = 2xy - 3x^2 - 2y$ se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - 6x = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

El campo vectorial **F** es conservativo porque (6) se cumple en todo el plano xy y como consecuencia la integral $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria entre cualesquiera dos puntos A y B en el plano.

b) Debido a que **F** es conservativo, hay una función potencial ϕ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 - 6xy + 6 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy - 3x^2 - 2y. \tag{8}$$

El empleo de integración parcial respecto a la primera expresión en (8) produce

$$\phi = \int (y^2 - 6xy + 6)\, dx = xy^2 - 3x^2y + 6x + g(y), \tag{9}$$

donde $g(y)$ es la "constante" de integración. A continuación tomamos la derivada parcial de (9) con respecto a y y la igualamos con la segunda expresión en (8):

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2xy - 3x^2 + g'(y) = 2xy - 3x^2 - 2y.$$

De la última igualdad encontramos $g'(y) = -2y$. Al integrar de nuevo se obtiene $g(y) = -y^2 + C$, donde C es una constante. De tal manera,

$$\phi = xy^2 - 3x^2y + 6x - y^2 + C. \tag{10}$$

c) Ahora podemos usar el teorema 15.3.2 y la función potencial (10) (sin la constante):

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{(-1,\,0)}^{(3,\,4)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (xy^2 - 3x^2y + 6x - y^2)\Big]_{(-1,\,0)}^{(3,\,4)}$$
$$= (48 - 108 + 18 - 16) - (-6) = -52.$$ ■

Nota: Puesto que se mostró que la integral en el ejemplo 6 es independiente de la trayectoria en el inciso *a*), podemos evaluarla sin determinar una función potencial. Tenemos la posibilidad de integrar a lo largo de cualquier curva conveniente conectando los puntos dados. En particular, la recta $y = x + 1$ es una curva de este tipo. Al usar x como parámetro se produce en ese caso

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (y^2 - 6xy + 6)\, dx + (2xy - 3x^2 - 2y)\, dy \\ &= \int_{-1}^{3} [(x+1)^2 - 6x(x+1) + 6]\, dx + [2x(x+1) - 3x^2 - 2(x+1)]\, dx \\ &= \int_{-1}^{3} (-6x^2 - 4x + 5)\, dx = -52.\end{aligned}$$

Campos vectoriales conservativos tridimensionales Para un campo vectorial conservativo tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

y una curva espacial suave por partes $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$, $a \le t \le b$, la forma básica de (2) es la misma:

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \\ &= \phi(B) - \phi(A) = \phi(x(b), y(b), z(b)) - \phi(x(a), y(a), z(a)).\end{aligned} \tag{11}$$

Si C es una curva en el espacio tridimensional, una integral de línea $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria siempre que el campo vectorial tridimensional

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

sea conservativo. El análogo tridimensional del teorema 15.3.4 resulta similar. Si **F** es conservativo y P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en alguna región abierta del espacio tridimensional, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}. \tag{12}$$

Inversamente, si (12) se cumple en toda una región apropiada del espacio tridimensional, entonces **F** es conservativo.

EJEMPLO 7 Integral que es independiente de la trayectoria

***a*)** Demuestre que la integral de línea

$$\int_C (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$$

es independiente de la trayectoria entre (1, 1, 1) y (2, 1, 4).

***b*)** Evalúe $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

Solución

***a*)** Con las identificaciones

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + yz)\mathbf{i} + (x + 3z^3 + xz)\mathbf{j} + (9yz^2 + xy - 1)\mathbf{k},$$

$$P = y + yz, \qquad Q = x + 3z^2 + xz \qquad \text{y} \qquad R = 9yz^2 + xy - 1,$$

vemos que las igualdades

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + z = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = y = \frac{\partial R}{\partial x}, \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 9z^2 + x = \frac{\partial R}{\partial y}$$

se cumplen en todo el espacio tridimensional. De (12) concluimos que **F** es conservativo y, por tanto, la integral es independiente de la trayectoria.

***b*)** La trayectoria C que se muestra en la FIGURA 15.3.6 representa cualquier trayectoria con puntos inicial y terminal (1, 1, 1) y (2, 1, 4). Para evaluar la integral ilustramos de nuevo cómo encontrar una función potencial $\phi(x, y, z)$ para **F** utilizando integración parcial.

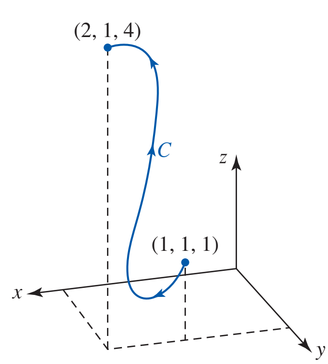


FIGURA 15.3.6 Trayectoria representativa C del ejemplo 7

En primer lugar sabemos que

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = R.$$

Integrando la primera de estas tres ecuaciones con respecto a x se obtiene

$$\phi = xy + xyz + g(y, z).$$

La derivada de esta última expresión con respecto a y debe ser entonces igual a Q:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = x + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z^3 + xz.$$

Por consiguiente,

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 3z^3 \qquad \text{implica} \qquad g = 3yz^3 + h(z).$$

En consecuencia, $\qquad \phi = xy + xyz + 3yz^3 + h(z).$

La derivada parcial de esta última expresión con respecto a z debe ser ahora igual a la función R:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + 9yz^2 + h'(z) = 9yz^2 + xy - 1.$$

De esto obtenemos $h'(z) = -1$ y $h(z) = -z + K$. Descartando K, es posible escribir

$$\phi = xy + xyz + 3yz^3 - z. \tag{13}$$

Por último, de (2) y la función potencial (13) obtenemos

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} (y + yz)\,dx + (x + 3z^3 + xz)\,dy + (9yz^2 + xy - 1)\,dz$$

$$= (xy + xyz + 3yz^3 - z)\Big]_{(1,1,1)}^{(2,1,4)} = 198 - 4 = 194.$$ ■

Conservación de la energía En un campo de fuerza conservativo **F**, el trabajo realizado por la fuerza sobre una partícula que se mueve de la posición A a la posición B es el mismo para todas las trayectorias entre estos puntos. Además, el trabajo realizado por la fuerza a lo largo de una trayectoria cerrada es *cero*. Vea el problema 31 en los ejercicios 15.3. Por esta razón, un campo de fuerzas de este tipo se dice que es **conservativo**. En un campo conservativo **F** se cumple la *ley de conservación de la energía mecánica*: para una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria en un campo conservativo,

energía cinética + *energía potencial* = *constante*.

Vea el problema 37 en los ejercicios 15.3.

$\int_C$ NOTAS DESDE EL AULA

Una fuerza de fricción tal como la resistencia del aire es *no conservativa*. Las fuerzas no conservativas son *disipativas* en cuanto a que su acción reduce la energía cinética sin un aumento correspondiente en la energía potencial. Enunciado de otra manera, si el trabajo realizado $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ depende de la trayectoria, entonces **F** es no conservativo.

Ejercicios 15.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-46.

Fundamentos

En los problemas 1-10, demuestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe de dos maneras:

a) encuentre una función potencial ϕ, y

b) integre a lo largo de cualquier trayectoria conveniente entre los puntos.

1. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,2)} x^2\,dx + y^2\,dy$

2. $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,4)} 2xy\,dx + x^2\,dy$

3. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(3,2)} (x + 2y)\,dx + (2x - y)\,dy$

4. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(\pi/2,0)} \cos x \cos y\,dx + (1 - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dy$

5. $\displaystyle\int_{(4,1)}^{(4,4)} \frac{-y\,dx + x\,dy}{y^2}$ en cualquier trayectoria que no cruce el eje x

6. $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(3,4)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en cualquier trayectoria que no pase por el origen

7. $\displaystyle\int_{(1,2)}^{(3,6)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\ \mathbf{F} = (2y^2x - 3)\mathbf{i} + (2yx^2 + 4)\mathbf{j}$

8. $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(0,0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\ \mathbf{F} = (5x + 4y)\mathbf{i} + (4x - 8y^3)\mathbf{j}$

9. $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,8)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\ \mathbf{F} = (y^3 + 3x^2y)\mathbf{i} + (x^3 + 3y^2x + 1)\mathbf{j}$

10. $\displaystyle\int_{(-2,0)}^{(1,0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},\ \mathbf{F} = (2x - y \operatorname{sen} xy - 5y^4)\mathbf{i} - (20xy^3 + x \operatorname{sen} xy)\mathbf{j}$

En los problemas 11-18, determine si el campo vectorial dado es un campo conservativo. Si es así, encuentre la función potencial ϕ para **F**.

11. $\mathbf{F}(x, y) = (4x^3y^3 + 3)\mathbf{i} + (3x^4y^2 + 1)\mathbf{j}$

12. $\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3y^2(x^2 + 1)\mathbf{j}$

13. $\mathbf{F}(x, y) = y^2 \cos xy^2\mathbf{i} - 2xy \operatorname{sen} xy^2\mathbf{j}$

14. $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2 + 1)^{-2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$

15. $\mathbf{F}(x, y) = (x^3 + y)\mathbf{i} + (x + y^3)\mathbf{j}$

16. $\mathbf{F}(x, y) = 2e^{2y}\mathbf{i} + xe^{2y}\mathbf{j}$

17. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + (3y^2 - z)\mathbf{j} - y\mathbf{k}$

18. $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy\mathbf{i} + (x^2 - ze^{-y})\mathbf{j} + (e^{-y} - 1)\mathbf{k}$.

En los problemas 19 y 20, encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y) = (2x + e^{-y})\mathbf{i} + (4y - xe^{-y})\mathbf{j}$ a lo largo de la curva indicada.

19.

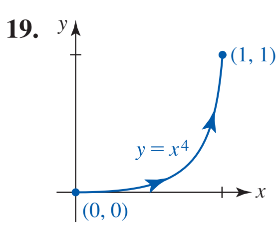


FIGURA 15.3.7 Curva del problema 19

20.

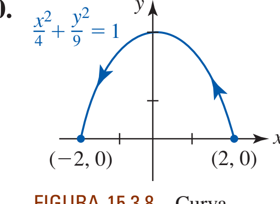


FIGURA 15.3.8 Curva del problema 20

En los problemas 21-26, muestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe.

21. $\displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(2,4,8)} yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$

22. $\displaystyle\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} 2x\,dx + 3y^2\,dy + 4z^3\,dz$

23. $\displaystyle\int_{(1,0,0)}^{(2,\pi/2,1)} (2x \text{ sen } y + e^{3z})\,dx + x^2 \cos y\,dy + (3xe^{3z} + 5)\,dz$

24. $\displaystyle\int_{(1,2,1)}^{(3,4,1)} (2x + 1)\,dx + 3y^2\,dy + \frac{1}{z}\,dz$

25. $\displaystyle\int_{(1,1,\ln 3)}^{(2,2,\ln 3)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r};\ \mathbf{F} = e^{2z}\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j} + 2xe^{2z}\mathbf{k}$

26. $\displaystyle\int_{(-2,3,1)}^{(0,0,0)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r};\ \mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$

En los problemas 27 y 28, evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

27. $\mathbf{F}(x, y, z) = (y - yz \text{ sen } x)\mathbf{i} + (x + z \cos x)\mathbf{j} + y \cos x\mathbf{k}$;
$\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + (1 + \cos t)^2\mathbf{j} + 4 \text{ sen}^3 t\mathbf{k},\ 0 \le t \le \pi/2$

28. $\mathbf{F}(x, y, z) = (2 - e^z)\mathbf{i} + (2y - 1)\mathbf{j} + (2 - xe^z)\mathbf{k}$;
$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$, $(-1, 1, -1)$ a $(2, 4, 8)$

≡ Aplicaciones

29. La ley del cuadrado inverso de atracción gravitacional entre dos masas m_1 y m_2 está dada por $\mathbf{F} = -Gm_1m_2\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo. Encuentre una función potencial para $\mathbf{F}$.

30. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F}(x, y, z) = 8xy^3z\mathbf{i} + 12x^2y^2z\mathbf{j} + 4x^2y^3\mathbf{k}$ que actúa a lo largo de la hélice $\mathbf{r}(t) = 2 \cos t\mathbf{i} + 2 \text{ sen } t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ de $(2, 0, 0)$ a $(1, \sqrt{3}, \pi/3)$. De $(2, 0, 0)$ a $(0, 2, \pi/2)$. [*Sugerencia*: Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo.]

31. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo, demuestre que el trabajo realizado a lo largo de cualquier trayectoria cerrada simple es cero.

32. Una partícula en el plano es atraída al origen con una fuerza $\mathbf{F} = |\mathbf{r}|^n\mathbf{r}$, donde n es un entero positivo y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ es el vector de posición de la partícula. Demuestre que $\mathbf{F}$ es conservativo. Encuentre el trabajo realizado al mover la partícula entre (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

≡ Piense en ello

En los problemas 33 y 34, demuestre que el campo vectorial dado $\mathbf{F}$ es conservativo. Evalúe la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ sin determinar la función potencial para $\mathbf{F}$.

33. $\mathbf{F}(x, y) = 2x \cos y\mathbf{i} + x^2 \text{ sen } y\mathbf{j}$; C es $\mathbf{r}(t) = 2^{t-1}\mathbf{i} + \text{sen}(\pi/t)\mathbf{j},\ 1 \le t \le 2$

34. $\mathbf{F}(x, y, z) = \text{sen } y\mathbf{i} + x \cos y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$;
C es $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + te^{\sqrt{1-t}}\mathbf{k},\ 0 \le t \le 1$

35. Suponga que C_1 y C_2 son dos trayectorias en una región abierta simplemente conexa que tiene los mismos puntos inicial y terminal. Si $\int_{C_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{3}{4}$ y $\int_{C_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{11}{14}$, ¿qué dice esto acerca del campo vectorial $\mathbf{F}$?

36. Considere el campo vectorial

$$\mathbf{F} = -\frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{j}.$$

a) Muestre que $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, pero demuestre que $\mathbf{F}$ es no conservativo. [*Sugerencia*: Evalúe $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, donde $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen } t\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$.]

b) Explique por qué esto no viola el teorema 15.3.4.

37. Suponga que $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo con función potencial ϕ. En física la función $p = -\phi$ se denomina *energía potencial*. Puesto que $\mathbf{F} = -\nabla p$, la segunda ley de Newton se convierte en

$$m\mathbf{r}'' = -\nabla p \qquad \text{o} \qquad m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla p = \mathbf{0}.$$

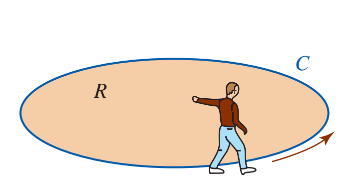
Integrando $m\dfrac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} + \nabla p\cdot\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = 0$ con respecto a t, deduzca la ley de conservación de la energía mecánica: $\frac{1}{2}mv^2 + p = \text{constante}$. [*Sugerencia*: Vea el problema 30 en los ejercicios 15.2.]

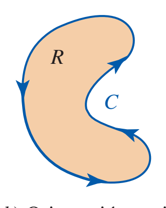
38. Suponga que C es una curva suave entre los puntos A (en $t = a$) y B (en $t = b$) y que p es la energía potencial, definida en el problema 37. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo y $K = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética, demuestre que $p(B) + K(B) = p(A) + K(A)$.

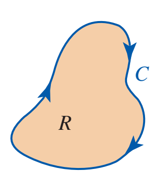
15.4 Teorema de Green

Introducción En esta sección examinamos uno de los teoremas más importantes del cálculo integral vectorial. Veremos que este teorema relaciona una integral de línea alrededor de una curva *cerrada* simple suave por partes con una integral doble sobre la región acotada por la curva. Le recomendamos que repase la terminología de la página 802 de la sección 15.1 y la página 818 de la sección 15.3.

Integrales de línea sobre curvas cerradas simples Suponga que C es una curva cerrada simple suave por partes que forma la frontera de una región simplemente conexa R. Decimos que la **orientación positiva** alrededor de C es la dirección en la que un punto sobre la curva debe moverse, o la dirección en la que una persona debe caminar, para completar un solo recorrido de C manteniendo la región R a la izquierda. Vea la FIGURA 15.4.1*a*). Como se ilustra en las figuras 15.4.1*b*) y 15.4.1*c*), las orientaciones *positiva* y *negativa* corresponden a recorridos de C *en sentido contrario al de las manecillas del reloj* y *en el sentido de las manecillas del reloj*, respectivamente.







a) Orientación positiva *b*) Orientación positiva *c*) Orientación negativa

FIGURA 15.4.1 Orientaciones de curvas cerradas simples

El siguiente teorema recibe el nombre de **teorema de Green**.

Teorema 15.4.1 Teorema de Green

Suponga que C es una curva cerrada simple suave por partes con una orientación positiva que limita una región simplemente conexa R. Si P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ son continuas sobre R, entonces

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA. \qquad (1)$$

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Debemos probar (1) sólo para una región R que es simultáneamente de tipo I y de tipo II:

$$R:\quad g_1(x) \le y \le g_2(x), \quad a \le x \le b$$
$$R:\quad h_1(y) \le x \le h_2(y), \quad c \le y \le d.$$

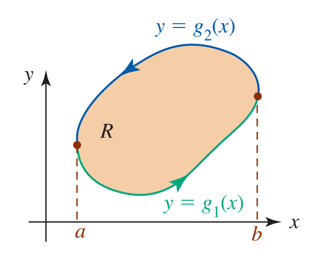
Empleando la FIGURA 15.4.2*a*), tenemos

$$\begin{aligned} -\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\,dA &= -\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\,dx \\ &= -\int_a^b [P(x, g_2(x)) - P(x, g_1(x))]\,dx \\ &= \int_a^b P(x, g_1(x))\,dx + \int_b^a P(x, g_2(x))\,dx \\ &= \int_C P(x, y)\,dx. \qquad (2) \end{aligned}$$

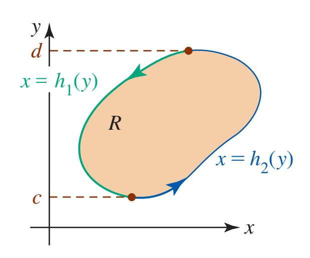
De manera similar, de la figura 15.4.2*b*),

$$\begin{aligned} \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\,dA &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \\ &= \int_c^d [Q(h_2(y), y) - Q(h_1(y), y)]\,dy \\ &= \int_c^d Q(h_2(y), y)\,dy + \int_d^c Q(h_1(y), y)\,dy \\ &= \int_C Q(x, y)\,dy. \qquad (3) \end{aligned}$$

La suma de los resultados en (2) y (3) produce (1). ■



a) R como una región tipo I



b) R como una región tipo II

FIGURA 15.4.2 Región R utilizada en la prueba del teorema 15.4.1

Si bien la prueba anterior no es válida para regiones más complicadas, el teorema se aplica a esas regiones, tal como la que se ilustra en la FIGURA 15.4.3. La demostración consiste en descomponer R en un número finito de subregiones para las cuales (1) puede aplicarse y después se suman los resultados.

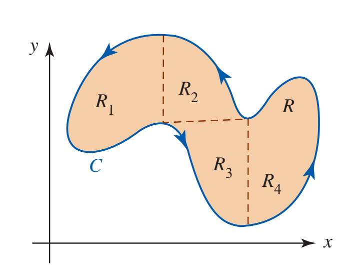


FIGURA 15.4.3 Región R descompuesta en cuatro subregiones

La integración en la dirección positiva sobre una curva cerrada simple C a menudo se denota por medio de

$$\oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy \quad \text{o} \quad \oint_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{4}$$

El pequeño círculo sobrepuesto sobre el signo integral en el primer término en (4) subraya el hecho de que la integración es a lo largo de una curva cerrada; la flecha en el círculo en el segundo término en (4) refuerza la noción de que la integración es a lo largo de una curva cerrada C con orientación positiva. Aunque $\int_C$, $\oint_C$ y $\oint_C$ significan lo mismo en esta sección, usaremos el segundo signo integral por el resto de la discusión de manera que usted adquiera cierta familiaridad con esta notación alterna.

EJEMPLO 1 Empleo del teorema de Green

Evalúe $\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (2y - x)\,dy$, donde C consiste en la frontera de la región en el primer cuadrante que está acotada por las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^3$.

Solución Si $P(x, y) = x^2 - y^2$ y $Q(x, y) = 2y - x$, entonces $\partial P/\partial y = -2y$ y $\partial Q/\partial x = -1$. De (1) y la FIGURA 15.4.4 tenemos

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2 - y^2)\,dx + (2y - x)\,dy &= \iint_R (-1 + 2y)\,dA \\ &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} (-1 + 2y)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 (-y + y^2)\Big]_{x^3}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 (-x^6 + x^4 + x^3 - x^2)\,dx = -\frac{11}{420}. \quad ■\end{aligned}$$

FIGURA 15.4.4 Trayectoria C y región R del ejemplo 1

Observamos que la integral de línea del ejemplo 1 podría haberse evaluado de manera directa utilizando la variable x como un parámetro. Sin embargo, cuando usted trabaje en el siguiente ejemplo, considere el problema de evaluar de la manera usual la integral de línea dada.

EJEMPLO 2 Empleo del teorema de Green

Evalúe $\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 4$.

Solución Al identificar $P(x, y) = x^5 + 3y$ y $Q(x, y) = 2x - e^{y^3}$, tenemos $\partial P/\partial y = 3$ y $\partial Q/\partial x = 2$. Por consiguiente, (1) produce

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = \iint_R (2 - 3)\,dA = -\iint_R dA.$$

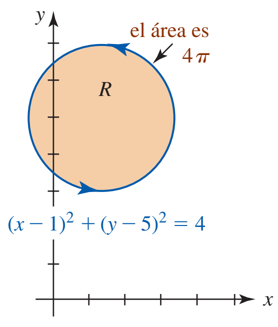


FIGURA 15.4.5 Trayectoria C y región R del ejemplo 2

En este caso la integral doble $\iint_R dA$ produce el área de la región R acotada por el círculo de radio 2 que se muestra en la FIGURA 15.4.5. Puesto que el área del círculo es $\pi 2^2 = 4\pi$, se deduce que

$$\oint_C (x^5 + 3y)\,dx + (2x - e^{y^3})\,dy = -4\pi. \quad ■$$

EJEMPLO 3 Trabajo

Determine el trabajo realizado por el campo de fuerza $\mathbf{F} = (-16y + \operatorname{sen} x^2)\mathbf{i} + (4e^y + 3x^2)\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de una curva cerrada simple C que se muestra en la FIGURA 15.4.6.

Solución De (6) de la sección 15.2, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ está dado por

$$W = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (-16y + \operatorname{sen} x^2)\,dx + (4e^y + 3x^2)\,dy$$

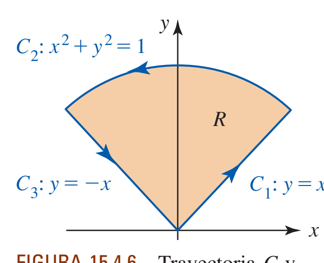


FIGURA 15.4.6 Trayectoria C y región R del ejemplo 3

y por ello, de acuerdo con el teorema de Green,

$$W = \iint_R (6x + 16)\, dA.$$

En vista de la región R, la última integral se maneja mejor en coordenadas polares. En coordenadas polares R se define mediante $0 \leq r \leq 1$, $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$, por lo que tenemos

$$\begin{aligned} W &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_0^1 (6r\cos\theta + 16) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2r^3\cos\theta + 8r^2)\Big]_0^1 d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2\cos\theta + 8)\, d\theta = 4\pi. \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Teorema de Green no aplicable

Sea C la curva poligonal cerrada consistente en los cuatro segmentos de recta C_1, C_2, C_3 y C_4 que se muestran en la FIGURA 15.4.7. El teorema de Green *no* es aplicable a la integral de línea

$$\int_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$$

ya que P, Q, $\partial P/\partial y$ y $\partial Q/\partial x$ no son continuas en el origen.

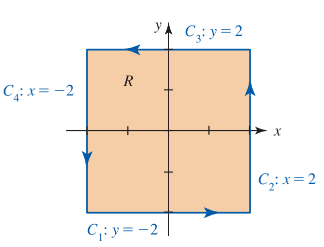
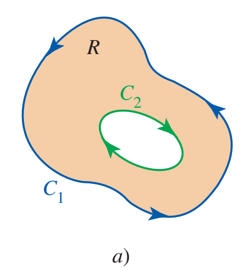


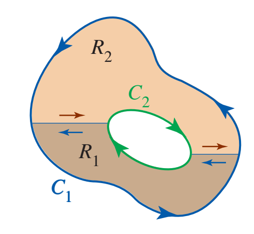
FIGURA 15.4.7 Trayectoria C y región R del ejemplo 4

Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas El teorema de Green también puede extenderse a una región R con hoyos, esto es, una región que no es simplemente conexa. Recuerde de la sección 15.3 que una región con hoyos se dice que es múltiplemente conexa. En la FIGURA 15.4.8*a*) hemos mostrado una región R acotada por una curva C que consiste en dos curvas cerradas simples C_1 y C_2; esto es $C = C_1 \cup C_2$. La curva C está orientada positivamente, ya que si recorremos C_1 en dirección contraria a la de las manecillas del reloj y a C_2 en la dirección de las manecillas, la región R siempre está a la izquierda. Si después de esto introducimos cortes cruzados horizontales como se ilustra en la figura 15.4.8*b*), la región R se divide en dos subregiones R_1 y R_2. Al aplicar el teorema de Green a R_1 y R_2, se obtiene

$$\begin{aligned} \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA &= \iint_{R_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA + \iint_{R_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA \\ &= \oint_{C_1} P\, dx + Q\, dy + \oint_{C_2} P\, dx + Q\, dy \qquad (5) \\ &= \oint_C P\, dx + Q\, dy. \end{aligned}$$



a)



b)

FIGURA 15.4.8 Región R con un hoyo

El último resultado sigue del hecho de que las integrales de línea sobre los cortes cruzados (trayectorias con orientaciones opuestas) se cancelarán entre sí. Vea (11) de la sección 15.1.

EJEMPLO 5 Aplicación de (5)

Evalúe $\oint_C \frac{-y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región sombreada R que se presenta en la FIGURA 15.4.9.

Solución Como

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

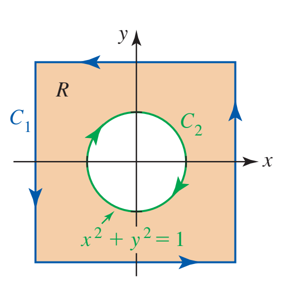


FIGURA 15.4.9 Trayectoria C y región R del ejemplo 5

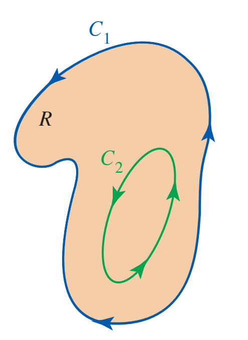


FIGURA 15.4.10 La integral de línea sobre C_1 es la misma que sobre C_2

son continuas sobre la región R acotada por C, se deduce de (5) que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \iint_R \left[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dA = 0. \quad \blacksquare$$

Como consecuencia de la discusión anterior al ejemplo 5, podemos establecer un resultado para integrales de línea que nos permite, en ciertas circunstancias, sustituir una trayectoria cerrada complicada por una trayectoria que es más simple. Suponga, como se muestra en la FIGURA 15.4.10, que C_1 y C_2 son dos trayectorias cerradas simples suaves por partes que no se intersecan y que tienen la misma orientación positiva o contraria a la de las manecillas del reloj. Suponga además que P y Q tienen primeras derivadas parciales continuas tales que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en la región R acotada entre C_1 y C_2. Entonces de (5) y (11) de la sección 15.1 se tiene

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{-C_2} P\,dx + Q\,dy = 0$$

o

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy. \tag{6}$$

EJEMPLO 6 Repaso del ejemplo 4

Evalúe la integral de línea del ejemplo 4.

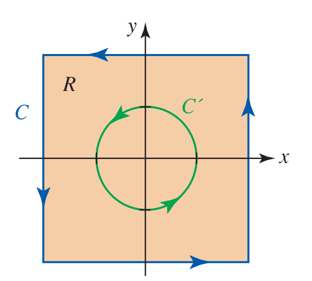


FIGURA 15.4.11 Las curvas cerradas C y C' del ejemplo 6

Solución Un método para evaluar la integral de línea es escribir

$$\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$$

y después evaluar las cuatro integrales sobre los segmentos de recta C_1, C_2, C_3 y C_4 que se muestran en la figura 15.4.7. De modo alterno, si advertimos que el círculo C': $x^2 + y^2 = 1$ que se muestra en la FIGURA 15.4.11 yace por completo dentro de C, entonces del ejemplo 5 es claro que $P = -y/(x^2 + y^2)$ y $Q = x/(x^2 + y^2)$ tienen primeras derivadas parciales continuas en la región R acotada entre C y C'. Además,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

en R. Por consiguiente, se deduce de (6) que

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \oint_{C'} \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Utilizando la parametrización $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$ para C' obtenemos

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy &= \int_0^{2\pi} [-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) + \cos t(\cos t)]\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned} \tag{7} \quad \blacksquare$$

Es interesante advertir que el resultado en (7):

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi$$

es verdadero para toda curva cerrada simple suave por partes C con el origen en su interior. Sólo necesitamos elegir C' como $x^2 + y^2 = a^2$, donde a es lo suficientemente pequeña para que el círculo esté por completo dentro de C.

Posdata: Un poco de historia **George Green** (1793-1841) nació en Knottingham, Inglaterra, hijo de padres trabajadores. El joven George abandonó la escuela después de sólo cuatro cursos y a la edad de 9 años empezó a trabajar en la panadería de su padre. Después de que su padre murió en 1829, Green empleó el dinero que obtuvo de la venta de la panadería para seguir estudios en matemáticas y ciencias. De manera fundamentalmente autodidacta, Green produjo varios artículos antes de entrar a la Universidad de Cambridge a la edad de 40 años. Con recursos propios publicó *Un ensayo acerca de la aplicación del análisis matemático en las teorías de la electricidad y el magnetismo* en 1828, en el cual introdujo su famoso teorema de Green. A la edad de 45 años obtuvo su licenciatura y permaneció en Cambridge, donde se convirtió en miembro del profesorado en Gonville and Caius College. El trabajo seminal de Green en matemáticas, electricidad y magnetismo fue prácticamente ignorado después de su muerte en 1841, aunque a la larga atrajo la atención de la comunidad científica y matemática gracias a los esfuerzos de William Thomson (Lord Kelvin) en 1845.

Ejercicios 15.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1-4, verifique el teorema de Green evaluando ambas integrales.

1. $\oint_C (x - y)\,dx + xy\,dy = \iint_R (y + 1)\,dA$, donde C es el triángulo con vértices (0, 0), (1, 0), (1, 3)

2. $\oint_C 3x^2y\,dx + (x^2 - 5y)\,dy = \iint_R (2x - 3x^2)\,dA$, donde C es el rectángulo con vértices $(-1, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$

3. $\oint_C -y^2\,dx + x^2\,dy = \iint_R (2x + 2y)\,dA$, donde C es el círculo $x = 3\cos t$, $y = 3\,\mathrm{sen}\,t$, $0 \le t \le 2\pi$

4. $\oint_C -2y^2\,dx + 4xy\,dy = \iint_R 8y\,dA$, donde C es la frontera de la región en el primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = 0$, $y = \sqrt{x}$, $y = -x + 2$

En los problemas 5-14, emplee el teorema de Green para evaluar la integral de línea dada.

5. $\oint_C 2y\,dx + 5x\,dy$, donde C es el círculo $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$

6. $\oint_C (x + y^2)\,dx + (2x^2 - y)\,dy$, donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = 4$

7. $\oint_C (x^4 - 2y^3)\,dx + (2x^3 - y^4)\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 4$

8. $\oint_C (x - 3y)\,dx + (4x + y)\,dy$, donde C es el rectángulo con vértices $(-2, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(-2, 2)$

9. $\oint_C 2xy\,dx + 3xy^2\,dy$, donde C es el triángulo con vértices (1, 2), (2, 2), (2, 4)

10. $\oint_C e^{2x}\,\mathrm{sen}\,2y\,dx + e^{2x}\cos 2y\,dy$, donde C es la elipse $9(x - 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 36$

11. $\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$, donde C es la frontera de la región determinada por las gráficas de $x = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x \ge 0$

12. $\oint_C e^{x^2}\,dx + 2\tan^{-1} x\,dy$, donde C es el triángulo con vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 1)$

13. $\oint_C \frac{1}{3}y^3\,dx + (xy + xy^2)\,dy$, donde C es la frontera de la región en el primer cuadrante determinado por las gráficas de $y = 0$, $x = y^2$, $x = 1 - y^2$

14. $\oint_C xy^2\,dx + 3\cos y\,dy$, donde C es la frontera de la región en el primer cuadrante determinada por las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$

En los problemas 15 y 16, evalúe la integral dada sobre cualquier curva cerrada simple suave por partes C.

15. $\displaystyle\oint_C ay\,dx + bx\,dy$

16. $\displaystyle\oint_C P(x)\,dx + Q(y)\,dy$

En los problemas 17 y 18, sea R la región acotada por una curva cerrada simple suave por partes C. Demuestre el resultado que se indica.

17. $\displaystyle\oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \text{área de } R$

18. $\displaystyle\frac{1}{2}\oint_C -y\,dx + x\,dy = \text{área de } R$

En los problemas 19 y 20, emplee los resultados de los problemas 17 y 18 para determinar el área de la región acotada por la curva cerrada que se indica.

19. La hipocicloide $x = a\cos^3 t$, $y = a\,\mathrm{sen}^3\,t$, $a > 0$, $0 \le t \le 2\pi$

20. La elipse $x = a\cos t$, $y = b\,\mathrm{sen}\,t$, $a > 0$, $b > 0$, $0 \le t \le 2\pi$

21. ***a)*** Demuestre que

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = x_1y_2 - x_2y_1,$$

donde C es el segmento de recta del punto (x_1, y_1) a (x_2, y_2).

b) Use el inciso *a)* y el problema 18 para demostrar que el área A del polígono con vértices (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_n, y_n), marcado en dirección contraria a la de las manecillas del reloj, es

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \cdots + \frac{1}{2}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n).$$

22. Emplee el inciso *b*) del problema 21 para encontrar el área del cuadrilátero con vértices (−1, 3), (1, 1), (4, 2) y (3, 5).

En los problemas 23 y 24, evalúe la integral de línea dada donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región sombreada R.

23. $\oint_C (4x^2 - y^3)\,dx + (x^3 + y^2)\,dy$

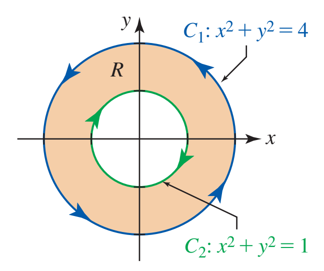


FIGURA 15.4.12 Curva C del problema 23

24. $\oint_C (\cos x^2 - y)\,dx + \sqrt{y^2 + 1}\,dy$

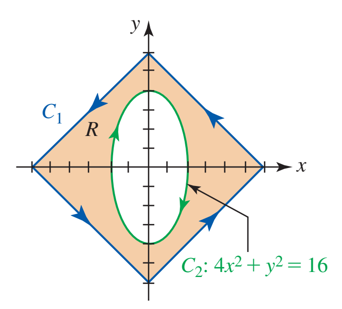


FIGURA 15.4.13 Curva C del problema 24

En los problemas 25 y 26, proceda como en el ejemplo 6 para evaluar la integral de línea dada.

25. $\oint_C \dfrac{-y^3\,dx + xy^2\,dy}{(x^2 + y^2)^2}$, donde C es la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$

26. $\oint_C \dfrac{-y}{(x + 1)^2 + 4y^2}\,dx + \dfrac{x + 1}{(x + 1)^2 + 4y^2}\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 16$

En los problemas 27 y 28, emplee el teorema de Green para evaluar la integral doble dada por medio de una integral de línea. [*Sugerencia*: Encuentre funciones apropiadas P y Q.]

27. $\iint_R x^2\,dA$, donde R es la región acotada por la elipse $x^2/9 + y^2/4 = 1$

28. $\iint_R [1 - 2(y - 1)]\,dA$, donde R es la región en el primer cuadrante acotada por el círculo $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ y $x = 0$

En los problemas 29 y 30, emplee el teorema de Green para el trabajo realizado por la fuerza **F** dada alrededor de la curva cerrada en la FIGURA 15.4.14.

29. $\mathbf{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$ **30.** $\mathbf{F} = -xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j}$

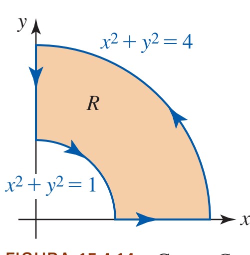


FIGURA 15.4.14 Curva C de los problemas 29 y 30

≡ Aplicaciones

31. Sea R una región acotada por una curva cerrada simple suave por partes C. Demuestre que las coordenadas del **centroide** de la región están dadas por

$$\bar{x} = \frac{1}{2A}\oint_C x^2\,dy, \qquad \bar{y} = -\frac{1}{2A}\oint_C y^2\,dx.$$

32. Determine el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ que actúa a lo largo de la cardioide $r = 1 + \cos\theta$.

≡ Piense en ello

33. Sean P y Q continuas y con primeras derivadas parciales continuas en una región simplemente conexa del plano xy. Si $\int_A^B P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria, demuestre que $\oint_C P\,dx + Q\,dy = 0$ sobre cada curva cerrada simple suave por partes C en la región.

34. Si f es una función de dos variables que satisface la ecuación diferencial de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en una región simplemente conexa R, demuestre que $\int_C f_y\,dx - f_x\,dy$ es independiente de la trayectoria en R.

15.5 Superficies paramétricas y áreas

Introducción Hemos visto que las curvas bidimensionales pueden definirse por medio de una función $y = f(x)$, una ecuación $g(x, y) = 0$, o paramétricamente por medio de un conjunto de ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$. Una curva C descrita por una función continua $y = f(x)$ puede parametrizarse dejando $x = t$ de manera que las ecuaciones paramétricas son $x = t$, $y = f(t)$. Se requieren *dos* variables para parametrizar una superficie S en el espacio tridi-

mensional definida por una función de dos variables $z = g(x, y)$. Si $x = u$ y $y = v$, entonces las ecuaciones paramétricas para S son $x = u$, $y = v$, $z = g(u, v)$.

Superficies paramétricas En general, un conjunto de tres funciones de dos variables,

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \tag{1}$$

se llaman **ecuaciones paramétricas**. Las variables u y v reciben el nombre de **parámetros** y el conjunto de puntos (x, y, z) en el espacio tridimensional definido por (1) recibe el nombre de **superficie paramétrica** S. El par ordenado (u, v) proviene de una región R en el plano uv llamado **dominio del parámetro**. El dominio del parámetro es la contraparte bidimensional del intervalo del parámetro unidimensional correspondiente a una curva paramétrica C. Una superficie S también puede describirse mediante una función de valores vectoriales de dos variables

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}. \tag{2}$$

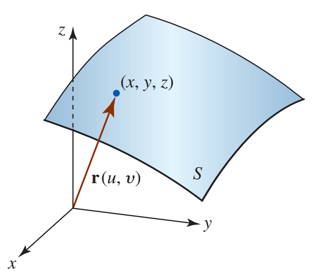


FIGURA 15.5.1 Vector de posición de un punto sobre la superficie S

Para (u_0, v_0) dado en R, el vector $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ es el vector de posición de un punto P sobre la superficie S. En otras palabras, cuando (u, v) varía sobre la región R, se traza la superficie S a partir del movimiento de la punta de $\mathbf{r}(u, v)$. Vea la FIGURA 15.5.1.

Las parametrizaciones de superficies son muy importantes en las gráficas de computadoras. Muchas de las figuras tridimensionales complicadas generadas en los capítulos 12, 13 y 14 se obtuvieron utilizando un SAC y una representación paramétrica de la superficie. Por ejemplo, la superficie similar a una concha de mar que se ilustra en la FIGURA 15.5.2*a*) se generó utilizando *Mathematica* y las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x &= 2(1 - e^{u/5\pi})\cos u \cos^2(v/2), \\ y &= 2(-1 + e^{u/5\pi})\operatorname{sen} u \cos^2(v/2), \\ z &= 1 - e^{u/3\pi} - \operatorname{sen} v + e^{u/5\pi} \operatorname{sen} v, \end{aligned}$$

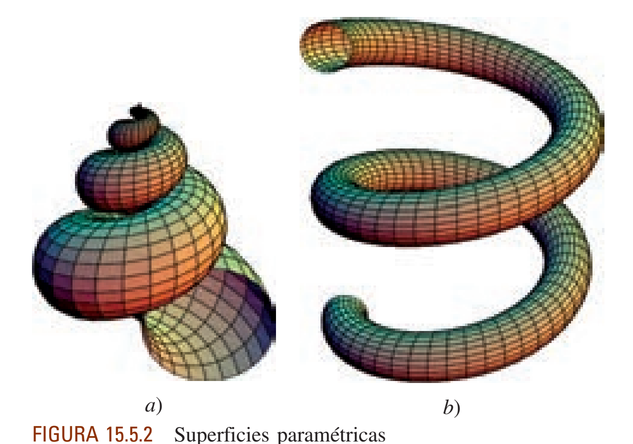
sobre el dominio del parámetro R en el plano uv definido por las desigualdades $0 \le u \le 8\pi$, $0 \le v \le 2\pi$. En la sección 12.1 vimos que la función vectorial de una sola variable

$$\mathbf{r}(u) = \cos u\mathbf{i} + \operatorname{sen} u\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

describe una curva en el espacio tridimensional conocida como una hélice circular que se enrolla a lo largo del eje z. Una variación de esta ecuación utilizando dos variables:

$$\mathbf{r}(u, v) = (3 + \operatorname{sen} v)\cos u\mathbf{i} + (3 + \operatorname{sen} v)\operatorname{sen} u\mathbf{j} + (u + \cos v)\mathbf{k},$$

describe lo que podría denominarse una *superficie tubular helicoidal*. Vea la figura 15.5.2*b*).



a) *b*)
FIGURA 15.5.2 Superficies paramétricas

EJEMPLO 1 Superficie paramétrica

Encuentre ecuaciones paramétricas para el cono de un manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución Si dejamos $x = u$ y $y = v$, la superficie paramétrica está dada por las ecuaciones $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{u^2 + v^2}$. Alternativamente, el cono se describe mediante la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{i} + \sqrt{u^2 + v^2}\mathbf{k}$. ■

EJEMPLO 2 Gráficas

a) La FIGURA 15.5.3*a*) muestra la parte del cono de un manto $x = u, y = v, z = \sqrt{u^2 + v^2}$ del ejemplo 1 correspondiente a los valores del parámetro $-1 \le u \le 1, -1 \le v \le 1$. Los lados truncados de la figura se deben al hecho de que la superficie interseca la caja que se exhibe en la figura. Por ejemplo, la curva de intersección (traza) de la superficie y el plano vertical $u = 1$ $(x = 1)$ corresponden a una rama de la hipérbola definida por $z = \sqrt{1 + v^2} = \sqrt{1 + y^2}$. Los puntos más altos del cono ocurren en las cuatro esquinas superiores de la caja; cada uno de los pares de parámetros (1, 1), (1, −1), (−1, 1) y (−1, −1) producen $z = \sqrt{2}$.

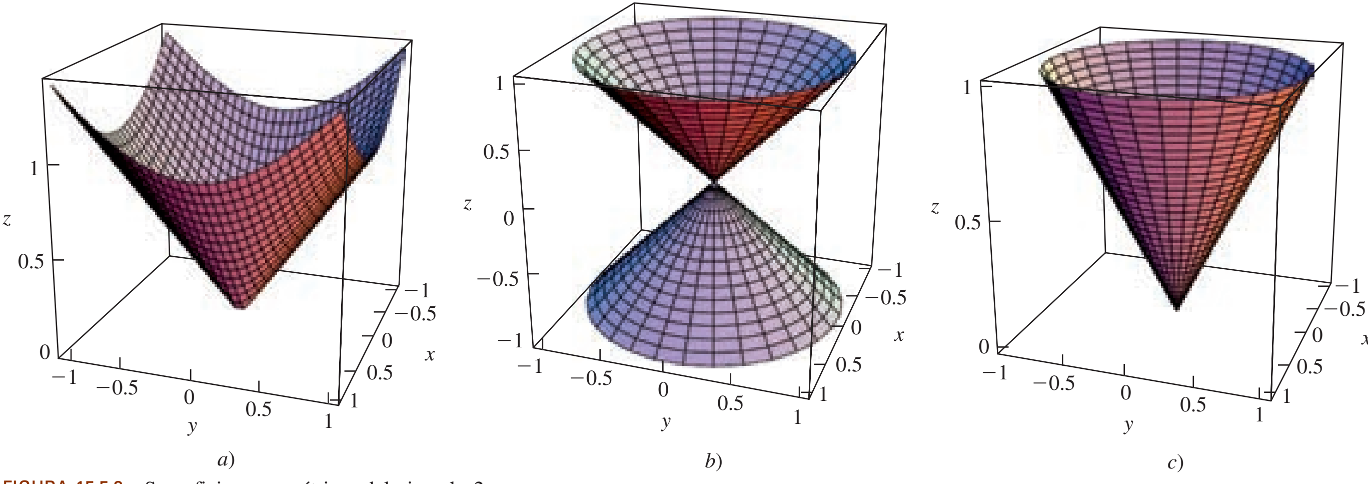


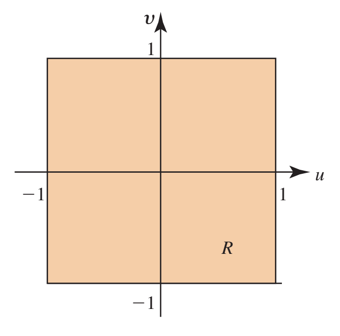
FIGURA 15.5.3 Superficies paramétricas del ejemplo 2

b) Empleando coordenadas polares, la parametrización

Verifique esto demostrando que $x^2 + y^2 = z^2$

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = r \tag{3}$$

también define un cono. La gráfica de (3) en la figura 15.5.3*b*) para $-1 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, es un cono de doble manto truncado por los planos horizontales $r = -1$ $(z = -1)$ y $r = 1$ $(z = 1)$. Cambiando los valores del parámetro a $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, las ecuaciones paramétricas (3) producen el manto superior del cono que se muestra en la figura 15.5.3*c*). ■



a) plano uv

θ 2π π R r

b) plano $r\theta$

FIGURA 15.5.4 El dominio del parámetro *a*) es una región rectangular; el dominio del parámetro *b*) es una tira infinita

El dominio R del parámetro definido por las desigualdades del inciso *a*) del ejemplo 2 es una región rectangular en el plano uv. Vea la FIGURA 15.5.4*a*). Advertimos de paso que un dominio R del parámetro no necesariamente es una región rectangular. Si el dominio R del parámetro del inciso *b*) del ejemplo 2 se define mediante $-\infty \le r \le \infty, 0 \le \theta \le 2\pi$, generamos el cono completo de doble manto. Este conjunto de desigualdades simultáneas define una tira horizontal infinita en el plano $= r\theta$. Vea la figura 15.5.4*b*).

EJEMPLO 3 Superficie paramétrica

Encuentre las ecuaciones paramétricas del cilindro circular $y^2 + z^2 = 1$ para $3 \le x \le 8$.

Solución Si usamos $y = \cos v$ y $z = \text{sen}\, v$, entonces es claro que $y^2 + z^2 = \cos^2 v + \text{sen}^2 v = 1$. Para obtener la superficie lateral completa del cilindro usamos los valores $0 \le v \le 2\pi$. Luego dejamos $x = u$, donde $3 \le u \le 8$. De tal modo, las ecuaciones paramétricas para esta superficie son

$$x = u, \quad y = \cos v, \quad z = \text{sen}\, v, \qquad 3 \le u \le 8, 0 \le v \le 2\pi.$$

La gráfica de estas ecuaciones sobre la región rectangular R definida por las desigualdades $3 \le u \le 8, 0 \le v \le 2\pi$ se presenta en la FIGURA 15.5.5. ■

Resulta prácticamente imposible identificar incluso superficies bien conocidas cuando se dan en forma paramétrica o vectorial. Sin embargo, en algunos casos una superficie puede identificarse al eliminar los parámetros.

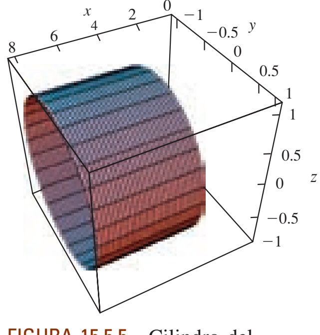


FIGURA 15.5.5 Cilindro del ejemplo 3

EJEMPLO 4 Eliminación de parámetros

Identifique la superficie con la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (2u - v)\mathbf{i} + (u + v + 1)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$.

Solución Las ecuaciones paramétricas de la superficie son

$$x = 2u - v, \quad y = u + v + 1, \quad z = u.$$

La suma de x y y produce $x + y = 3u + 1$. Puesto que $z = u$, reconocemos $x + y = 3z + 1$ o $x + y - 3z = 1$ como la ecuación de un plano. ■

En el ejemplo 4, el plano completo se obtiene dejando que (u, v) varíe sobre el dominio del parámetro consistente en el plano uv completo, esto es, para $-\infty < u < \infty$, $-\infty < v < \infty$.

EJEMPLO 5 Eliminación de parámetros

Las ecuaciones

$$x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta, \quad y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \quad z = a \cos \phi \tag{4}$$

son las ecuaciones paramétricas de una esfera de radio $a > 0$. Para ver esto elevamos al cuadrado las ecuaciones en (4) y sumamos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \phi \operatorname{sen}^2 \theta + a^2 \cos^2 \phi \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 \phi (\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta) + a^2 \cos^2 \phi \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2 \phi + a^2 \cos^2 \phi \\ &= a^2 (\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi) = a^2. \end{aligned}$$

La gráfica de (4) para $0 \le \phi \le \pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$, se muestra en la FIGURA 15.5.6. ■

FIGURA 15.5.6 Esfera del ejemplo 5

Los parámetros ϕ y θ en (4) son los ángulos polar y azimutal utilizados en coordenadas esféricas. Se le sugiere repasar las fórmulas en (3) de la sección 14.8 que convierte las coordenadas esféricas de un punto a coordenadas rectangulares.

Bastidor de una superficie Las curvas negras que son evidentes en cada una de las superficies generadas por computadora de las figuras 15.5.2, 15.5.3, 15.5.5 y 15.5.6 se llaman **bastidor de una superficie** S. Un bastidor de una superficie se obtiene manteniendo constante uno de los parámetros en (1) o (2) mientras se deja variar el otro parámetro. Por ejemplo, si $v = v_0 =$ constante, entonces

$$\mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\mathbf{i} + y(u, v_0)\mathbf{j} + z(u, v_0)\mathbf{k} \tag{5}$$

es una función de valores vectoriales de una sola variable. En consecuencia, (5) es una ecuación de una curva tridimensional C_1 que yace sobre la superficie S trazada por $\mathbf{r}(u, v)$. De manera similar, si $u = u_0 =$ constante, entonces

$$\mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\mathbf{i} + y(u_0, v)\mathbf{j} + z(u_0, v)\mathbf{k} \tag{6}$$

es una ecuación vectorial de la curva C_2 sobre la superficie S. En otras palabras, C_1 y C_2 son bastidores de S. Para un valor ϕ_0 elegido de $0 \le \phi \le \pi$, y un valor θ_0 de $0 \le \theta \le 2\pi$, los bastidores sobre la esfera de la figura 15.5.6 están definidas por

$$\mathbf{r}(\phi_0, \theta) = a \operatorname{sen} \phi_0 \cos \theta \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi_0 \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + a \cos \phi_0 \mathbf{k} \tag{7}$$

y

$$\mathbf{r}(\phi, \theta_0) = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta_0 \mathbf{i} + a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta_0 \mathbf{j} + a \cos \phi \mathbf{k}. \tag{8}$$

Las ecuaciones vectoriales en (7) y (8) son, respectivamente, un círculo y un semicírculo. Para $\phi_0 =$ constante el círculo $\mathbf{r}(\phi_0, \theta)$, $0 \le \theta \le 2\pi$, yace sobre la esfera paralela al plano xy y es equivalente a un círculo de **latitud** fija sobre un globo terráqueo. Para $\theta_0 =$ constante el semicírculo definido por $\mathbf{r}(\phi, \theta_0)$, $0 \le \phi \le \pi$, pasa tanto por el polo norte (cuando $\phi = 0$ obtene-

mos (0, 0, a)) y por el polo sur (cuando $\phi = \pi$ obtenemos (0, 0, $-a$)) de la esfera y recibe el nombre de **meridiano**. En un globo, un meridiano corresponde a una **longitud** fija.

Plano tangente a una superficie paramétrica Para los valores de parámetro constantes $u = u_0$, $v = v_0$, el vector

$$\mathbf{r}(u_0, v_0) = x(u_0, v_0)\mathbf{i} + y(u_0, v_0)\mathbf{j} + z(u_0, v_0)\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$$

define un punto (x_0, y_0, z_0) sobre una superficie S. Además, las funciones vectoriales de una sola variable

$$\mathbf{r}(u, v_0) = x(u, v_0)\mathbf{i} + y(u, v_0)\mathbf{j} + z(u, v_0)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}(u_0, v) = x(u_0, v)\mathbf{i} + y(u_0, v)\mathbf{j} + z(u_0, v)\mathbf{k}$$

definen los bastidores de superficie C_1 y C_2 que yacen sobre S. Como el vector $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ está definido por ambas funciones vectoriales, C_1 y C_2 se intersecan en (x_0, y_0, z_0). Las derivadas parciales de (2) con respecto a u y v se definen con los vectores que se obtienen al tomar las derivadas parciales de las funciones componentes:

Estas derivadas parciales también se denotan por medio de $\mathbf{r}_u$ y $\mathbf{r}_v$.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\mathbf{k}$$
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\mathbf{k}.$$

De tal modo, si $\partial\mathbf{r}/\partial u \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0), representa una tangente vectorial al bastidor de superficie C_1 (v = constante = v_0) mientras que $\partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0) es un vector que es tangente al bastidor de superficie C_2 (u = constante = u_0). De (2) de la sección 11.4, el producto cruz $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ se define mediante

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

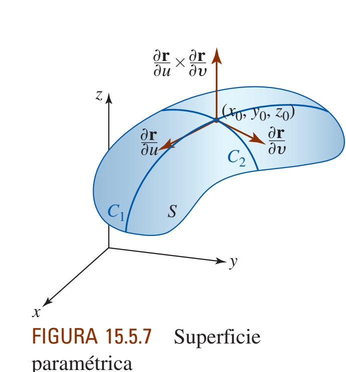


FIGURA 15.5.7 Superficie paramétrica

La condición de que el vector $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v$ no es $\mathbf{0}$ en (u_0, v_0) asegura la existencia de un plano tangente en el punto (x_0, y_0, z_0). De hecho, el plano tangente en $\mathbf{r}(u_0, y_0)$ o (x_0, y_0, z_0) se define como el plano determinado por $\partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\partial\mathbf{r}/\partial v$. Puesto que el producto cruz es perpendicular a ambos vectores $\partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\partial\mathbf{r}/\partial v$, el vector (9) es normal al plano tangente a la superficie S en (x_0, y_0, z_0). Vea la FIGURA 15.5.7.

Superficie suave Suponga que S es una superficie paramétrica cuya ecuación vectorial $\mathbf{r}(u, v)$ tiene primeras derivadas parciales continuas sobre una región R del plano uv. Se dice que la superficie S es **suave en** $\mathbf{r}(u_0, v_0)$ si los vectores tangentes $\partial\mathbf{r}/\partial u$ y $\partial\mathbf{r}/\partial v$ en las direcciones u y v satisfacen $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ en (u_0, v_0). Se afirma que la superficie S es **suave sobre** $\boldsymbol{R}$ si $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v \neq \mathbf{0}$ para todos los puntos (u, v) en R. En términos generales, una superficie suave no tiene esquinas, puntos afilados o interrupciones. Una superficie S **suave por partes** es una que puede escribirse como $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$, donde las superficies $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son suaves.

EJEMPLO 6 Plano tangente a una superficie paramétrica

Encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie paramétrica definida por $x = u^2 + v$, $y = v$, $z = u + v^2$ en el punto correspondiente a $u = 3$, $v = 0$.

Solución En $u = 3$, $v = 0$, el punto sobre la superficie es (9, 0, 3). Si la superficie se define por medio de la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u + v^2)\mathbf{k}$, entonces

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = 2u\mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

y

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2v \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + (1 - 4uv)\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}.$$

Al evaluar el vector anterior en $u = 3$, $v = 0$, se obtiene la normal $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ a la superficie en (9, 0, 3). Una ecuación del plano tangente en ese punto es

$$(-1)(x - 9) + (y - 0) + 6(z - 3) = 0 \qquad \text{o} \qquad z = \tfrac{1}{6}x - \tfrac{1}{6}y + \tfrac{3}{2}.$$

La gráfica de la superficie y el plano tangente se presentan en la FIGURA 15.5.8. ■

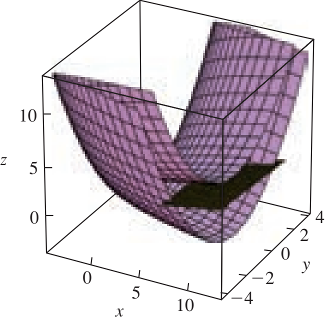


FIGURA 15.5.8 Superficie paramétrica y plano tangente en el ejemplo 6

Construcción de una integral A continuación bosquejamos los pasos que llevan a una definición de integral del **área de una superficie paramétrica**. Puesto que la discusión es similar a la que llevó a la definición 14.6.1, se recomienda un repaso de ese material. Suponga que la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}$ traza una superficie S cuando (u, v) varía sobre un dominio R del parámetro en el plano uv. Para simplificar la discusión supondremos que R es una región rectangular

$$R = \{(u, v) |\ a \le u \le b, c \le v \le d\}$$

como se ilustra en la FIGURA 15.5.9*a*). Usamos una partición regular, esto es, dividimos R en n rectángulos cada uno con el mismo ancho Δu y la misma altura Δv y dejamos que R_k denote la subregión rectangular k-ésima. Si (u_k, v_k) son las coordenadas de la esquina izquierda inferior de R_k, y las otras esquinas pueden expresarse como $(u_k + \Delta u, v_k)$, $(u_k + \Delta u, v_k + \Delta v)$, $(u_k, v_k + \Delta v)$ por lo que el área de R_k es $\Delta A = \Delta u \Delta v$. Las imágenes de los puntos en R_k determinan un parche S_k sobre la superficie S, donde el punto rojo en la figura 15.5.9*b*) es el punto que corresponde a $\mathbf{r}(u_k, v_k)$. Ahora dos de los bordes de S_k pueden aproximarse por medio de los vectores

$$\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v_k) - \mathbf{r}(u_k, v_k) = \frac{\mathbf{r}(u_k + \Delta u, v_k) - \mathbf{r}(u_k, v_k)}{\Delta u}\Delta u \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u$$

$$\mathbf{r}(u_k, v_k + \Delta v) - \mathbf{r}(u_k, v_k) = \frac{\mathbf{r}(u_k, v_k + \Delta v) - \mathbf{r}(u_k, v_k)}{\Delta v}\Delta v \approx \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v.$$

Como se advierte en la figura 15.5.9*c*), estos vectores forman en realidad dos de los bordes de un paralelogramo T_k que yace en el plano tangente en $\mathbf{r}(u_k, v_k)$. El área ΔT_k del paralelogramo T_k aproxima el área ΔS_k de S_k:

$$\Delta T_k = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\Delta u \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\Delta v \right| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta u \, \Delta v = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta A \approx \Delta S_k.$$

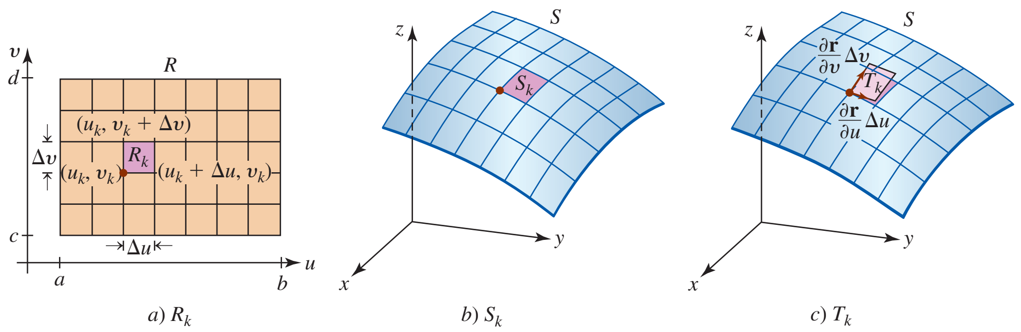


FIGURA 15.5.9 Dominio R del parámetro *a*); superficie correspondiente S en *b*) y *c*)

La suma de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta A$$

produce una aproximación del área $A(s)$ de la porción de la superficie S que corresponde a los puntos en R. Es válido entonces que el área exacta sea

$$A(S) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| \Delta A. \tag{10}$$

Definición 15.5.1 Área de una superficie

Sea S una superficie paramétrica suave definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k}.$$

Si cada punto sobre S corresponde a exactamente un punto (u, v) en el dominio R del parámetro en el plano uv, entonces el área de S es

$$A(S) = \iint_R \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dA. \tag{11}$$

Como vimos en la introducción a esta sección, una superficie descrita por una función explícita $z = g(x, y)$ puede parametrizarse mediante las ecuaciones $x = u, y = v, z = g(u, v)$. Para esta parametrización, (11) de inmediato se reduce a

$$A(S) = \iint_R \sqrt{1 + [g_u(u, v)]^2 + [g_v(u, v)]^2}\, du\, dv$$

que es (2) de la sección 14.6 con u y v desempeñando la parte de x y y.

EJEMPLO 7 Área de una superficie paramétrica

Aquí los símbolos u y v desempeñan la parte de r y θ en el inciso *b*) del ejemplo 2.

Encuentre el área del cono $\mathbf{r} = (u \cos v)\mathbf{i} + (u \operatorname{sen} v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$.

Solución La superficie es una porción superior del cono que se muestra en la figura 15.5.3*c*). Primero calculamos

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \cos v\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = -u \operatorname{sen} v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j}$$

y después formamos el producto cruz

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 1 \\ -u \operatorname{sen} v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = -u \cos v\mathbf{i} - u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}. \tag{12}$$

La magnitud del vector en (12) es

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{u^2 \cos^2 v + u^2 \operatorname{sen}^2 v + u^2} = \sqrt{2}u.$$

De tal modo, de (11) el área es

$$\begin{aligned} A(S) &= \iint_R \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| dA = \iint_R \sqrt{2}u\, du\, dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 u\, du\, dv \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}u^2 \Big]_0^1 dv \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_0^{2\pi} dv \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

■

$\iint_R$ NOTAS DESDE EL AULA

Es conveniente una observación acerca de la definición 15.5.1. En el ejemplo 7 aplicamos (11) para determinar el área de la superficie del cono definido por la función vectorial $\mathbf{r} = (u \cos v)\mathbf{i} + (u \text{ sen } v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$, aun cuando esta superficie S *no* es suave sobre la región R en el plano uv definida por $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$. El hecho de que S no es suave debe tener sentido puesto que uno no esperaría que exista un plano tangente en el punto afilado en $\mathbf{r}(0, 0)$ o $(0, 0, 0)$. También podemos ver esto de (12), ya que $u = 0$, $v = 0$, $\partial\mathbf{r}/\partial u \times \partial\mathbf{r}/\partial v = \mathbf{0}$, y por ello, por definición, la superficie no es suave en $\mathbf{r}(0, 0)$. El punto es el siguiente: podemos usar (11) a pesar de que la superficie S no es suave en un número finito de puntos localizados en la frontera de la región R.

Ejercicios 15.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

☰ Fundamentos

En los problemas 1-4, encuentre ecuaciones paramétricas para la superficie dada.

1. El plano $4x + 3y - z = 2$

2. El plano $2x + y = 1$

3. El hiperboloide $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$ para $y \le -1$

4. El paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$

En los problemas 5 y 6, encuentre una función de valores vectoriales $\mathbf{r}(u, v)$ para la superficie dada.

5. El cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ para $-2 \le x \le 2$, $-8 \le z \le 1$

6. El cilindro elíptico $x^2/4 + y^2/9 = 1$

En los problemas 7-10, identifique la superficie dada eliminando los parámetros.

7. $x = \cos u$, $y = \text{sen } u$, $z = v$

8. $x = u$, $y = v$, $z = u^2 + v^2$

9. $\mathbf{r}(u, v) = \text{sen } u\mathbf{i} + \text{sen } u \cos v\mathbf{j} + \text{sen } u \text{ sen } v\mathbf{k}$

10. $\mathbf{r}(\phi, \theta) = 2 \text{ sen } \phi \cos \theta\mathbf{i} + 3 \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta\mathbf{j} + 4 \cos \phi\mathbf{k}$

En los problemas 11-14, use la gráfica para obtener el dominio del parámetro R correspondiente a la porción de la superficie dada. Para los problemas 11 y 12 vea el ejemplo 13; para los problemas 13 y 14 vea el ejemplo 5.

11.

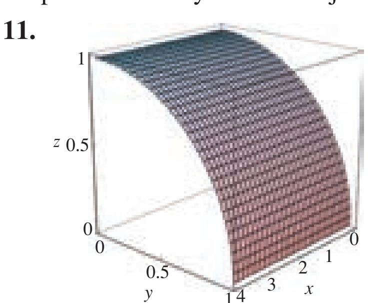


FIGURA 15.5.10 Gráfica del problema 11

12.

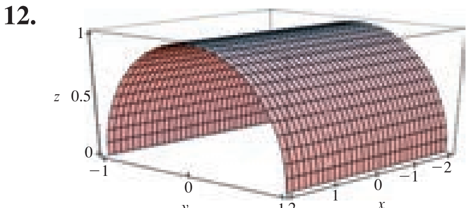


FIGURA 15.5.11 Gráfica del problema 12

13.

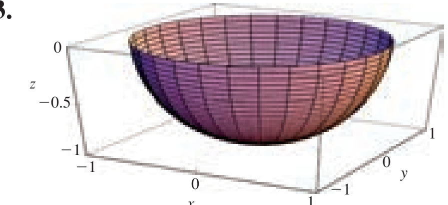


FIGURA 15.5.12 Gráfica del problema 13

14.

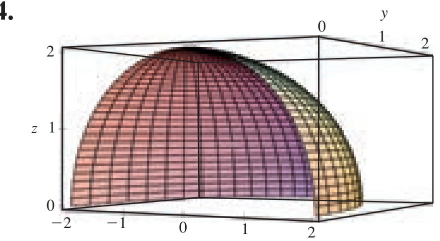


FIGURA 15.5.13 Gráfica del problema 14

En los problemas 15-22, encuentre una ecuación del plano tangente en el punto sobre la superficie que corresponde a los valores del parámetro dado.

15. $x = 10 \text{ sen } u$, $y = 10 \cos u$, $z = v$; $u = \pi/6$, $v = 2$

16. $x = u \cos v$, $y = u \text{ sen } v$, $z = u^2 + v^2$; $u = 1$, $v = 0$

17. $\mathbf{r}(u, v) = (u^2 + v)\mathbf{i} + (u + v)\mathbf{j} + (u^2 - v^2)\mathbf{k}$; $u = 1$, $v = 2$

18. $\mathbf{r}(u, v) = 4u\mathbf{i} + 3u^2 \cos v\mathbf{j} + 3u^2 \text{ sen } v\mathbf{k}$; $u = -1$, $v = \pi/3$

19. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$; $u = 3$, $v = 3$

20. $\mathbf{r}(u, v) = u \text{ sen } v\mathbf{i} + u \cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$; $u = 1$, $v = \pi/4$

21. $\mathbf{r}(u, v) = (u + v)\mathbf{i} + (v - u)\mathbf{j} + uv\mathbf{k}$; $u = -2, v = 1$

22. $\mathbf{r}(u, v) = uv\mathbf{i} + (v + e^u)\mathbf{j} + (u + e^v)\mathbf{k}$; $u = 0, v = \ln 3$

En los problemas 23 y 24, encuentre una ecuación del plano tangente a la superficie en el punto dado.

23. $x = u - v, y = 2u + 3v, z = u^2 + v^2$; $(1, 7, 5)$

24. $\mathbf{r}(u, v) = v^2\mathbf{i} + (u - v)\mathbf{j} + u^2\mathbf{k}$; $(1, 3, 16)$

En los problemas 25-30, encuentre el área de la superficie dada. Si le resulta instructivo, emplee un SAC para graficar la superficie.

25. La porción del plano $\mathbf{r} = (2u - v)\mathbf{i} + (u + v + 1)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$ para $0 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1$

26. La porción del plano $x + y + z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

27. La porción de $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$ para $0 \leq z \leq 4$

28. La porción de $\mathbf{r}(r, \theta) = r \cos \theta\mathbf{i} + r \operatorname{sen} \theta\mathbf{j} + r\mathbf{k}$ para $0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

29. La superficie $x = r \cos \theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, $z = \theta$, $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

30. La esfera $x = a \operatorname{sen} \phi \cos \theta$, $y = a \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta$, $z = a \cos \phi$ para $0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

En los problemas 31-34, emplee el problema 30 como una ayuda en la determinación de las ecuaciones paramétricas para la porción indicada de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. En cada caso encuentre el área de esa porción de la esfera.

31. La porción de la esfera debajo del plano $z = 1$

32. La porción de la esfera debajo del plano $z = 1$ pero sobre el plano $z = 0$

33. La porción de la esfera sobre el plano $z = \sqrt{2}$

34. La porción de la esfera fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 2$

35. Considere el cono dado en (3) del ejemplo 2, para $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) Dibuje o grafique, utilizando un SAC, los bastidores de superficie correspondientes a $r = \frac{1}{2}$ y $r = 1$. Dibuje las curvas en rojo.

b) Dibuje o grafique, empleando un SAC, los bastidores de superficie correspondientes a $\theta = \pi/2$ y $\theta = 3\pi/2$. Dibuje las curvas en color azul.

c) Superponga los cuatro bastidores de superficie de los incisos *a*) y *b*) sobre el mismo eje de coordenadas.

36. Considere la esfera dada en (4) del ejemplo 5, para $a = 2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

a) Dibuje o grafique, utilizando un SAC, los bastidores de superficie correspondientes a $\phi = \pi/3$ y $\phi = 2\pi/3$. Dibuje las curvas en rojo.

b) Dibuje o grafique, utilizando un SAC, los bastidores de superficie correspondientes a $\theta = \pi/4$ y $\theta = 5\pi/4$. Dibuje las curvas en azul.

c) Superponga los cuatro bastidores de superficie en los incisos *a*) y *b*) sobre los mismos ejes de coordenadas.

≡ Problemas con calculadora/SAC

En los problemas 37-42, asocie la superficie dada en la figura con la gráfica de una función de valores vectoriales $\mathbf{r}(u, v)$ en *a*)-*f*). Emplee un SAC y experimente con diferentes dominios del parámetro y perspectivas.

a) $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen} u\mathbf{i} + \operatorname{sen} v\mathbf{j} + \operatorname{sen}(u + v)\mathbf{k}$

b) $\mathbf{r}(u, v) = \operatorname{sen}^3 u \cos^3 v\mathbf{i} + \operatorname{sen}^3 u \operatorname{sen}^3 v\mathbf{j} + \cos^3 u\mathbf{k}$

c) $\mathbf{r}(u, v) = (u + 2 \cos v)\mathbf{i} + 2 \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

d) $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + u^2v^4\mathbf{k}$

e) $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + u^2 \cos v\mathbf{j} + u^2 \operatorname{sen} v\mathbf{k}$

f) $\mathbf{r}(u, v) = e^u \cos v\mathbf{i} + e^u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$

37.

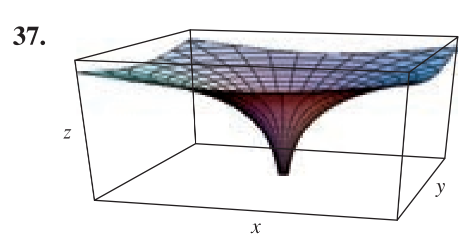


FIGURA 15.5.14 Gráfica del problema 37

38.

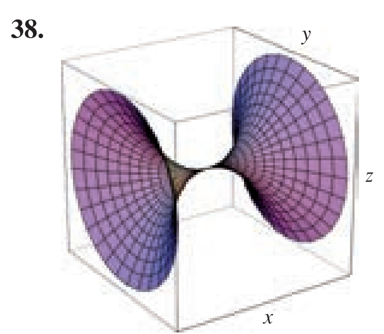


FIGURA 15.5.15 Gráfica del problema 38

39

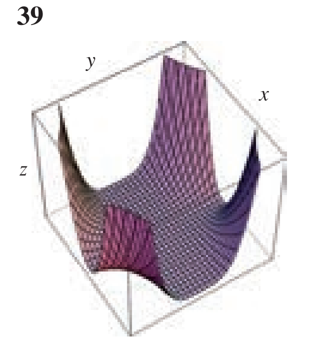


FIGURA 15.5.16 Gráfica del problema 39

40.

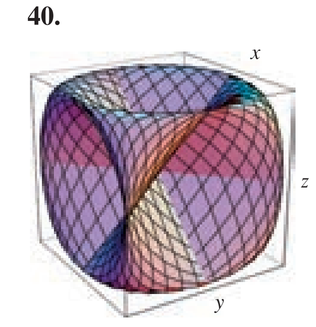


FIGURA 15.5.17 Gráfica del problema 40

41. **42.**

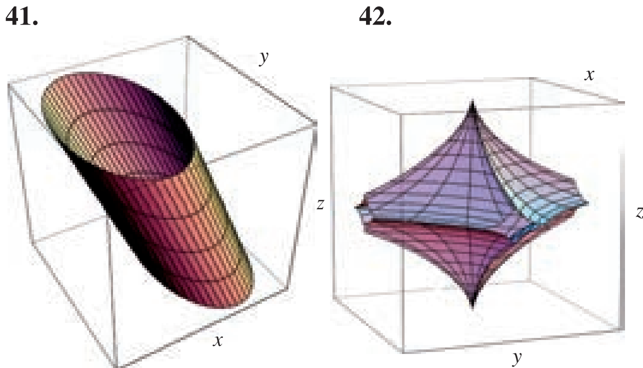


FIGURA 15.5.18 Gráfica del problema 41

FIGURA 15.5.19 Gráfica del problema 42

43. Emplee un SAC para graficar el **toro** dado por

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (R - \text{sen}\,\phi)\cos\theta\mathbf{i} + (R - \text{sen}\,\phi)\text{sen}\,\theta\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}$$

para $R = 5$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Experimente con diferentes orientaciones y perspectivas.

44. Demuestre que para una constante $R > 1$ el área de la superficie del toro del problema 43 correspondiente al dominio del parámetro dado es $A(S) = 4\pi^2 R$.

Piense en ello

45. Encuentre una parametrización diferente del plano del problema 1 de la que se da en la sección de respuestas.

46. Determine el área del problema 11 sin integración.

47. Si una curva definida por $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, se gira en torno al eje x, entonces las ecuaciones paramétricas de la superficie de revolución S son

$$x = u,\ y = f(u)\cos v,\ z = f(u)\,\text{sen}\,v,\ a \leq u \leq b,\ 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Si f' es continua y $f(x) \geq 0$ para toda x en el intervalo $[a, b]$, entonces emplee (11) para demostrar que el área de S es

$$A(S) = \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Vea (3) de la sección 6.6.

48. ***a)*** Emplee el problema 47 para encontrar ecuaciones paramétricas de la superficie generada al rotar la gráfica de $f(x) = \text{sen}\,x$, $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, alrededor del eje x.

b) Emplee un SAC para dibujar la gráfica de la superficie paramétrica del inciso *a*).

c) Emplee un SAC y la fórmula del problema 47 para encontrar el área de la superficie de revolución del inciso *a*) determinando primero el área de la superficie correspondiente al dominio del parámetro $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2\pi$.

49. Suponga que $\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ es el vector de posición del punto (x_0, y_0, z_0) y que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores constantes pero no paralelos. Discuta: ¿cuál es la superficie con ecuación vectorial $\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{r}_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$, donde s y t son parámetros?

50. Vuelva a leer el ejemplo 5 de esta sección. Encuentre después ecuaciones paramétricas de una esfera de radio 5 con centro (2, 3, 4).

15.6 Integrales de superficie

Introducción El último tipo de integral que consideraremos en este libro se denomina **integral de superficie** e implica una función f de tres variables definida sobre una superficie S.

Integrales de superficie Los pasos preliminares para la definición de esta integral son similares a combinaciones de los pasos que llevaron a la integral de línea, con respecto a la longitud de arco, y los pasos que condujeron a la integral doble. Sea $w = f(x, y, z)$ una función definida en una región del espacio tridimensional que contiene una superficie S, la cual es la gráfica de una función $z = g(x, y)$. Sea R la proyección de la superficie sobre el plano xy una región ya sea de tipo I o de tipo II.

- Divida la superficie S en n parches S_k con áreas ΔS_k que corresponda a una partición P de R en n rectángulos R_k con áreas ΔA_k.
- Sea $\|P\|$ la norma de la partición o la longitud de la diagonal más larga de R_k.
- Elija un punto muestra (x_k^*, y_k^*, z_k^*) sobre cada parche S_k como se ilustra en la FIGURA 15.6.1.
- Forme la suma

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta S_k.$$

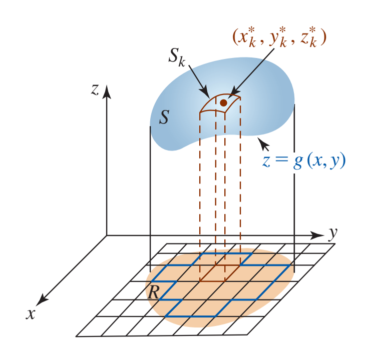


FIGURA 15.6.1 Punto muestra sobre el elemento k-ésimo S_k de superficie

Definición 15.6.1 Integral de superficie

Sea f una función de tres variables x, y y z definida en una región del espacio que contiene a una superficie S. Entonces la **integral de superficie** de f sobre S es

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\,\Delta S_k. \tag{1}$$

Método de evaluación Recuerde de (3) de la sección 14.6 que si $z = g(x, y)$ es la ecuación de una superficie S, entonces la diferencial del área de superficie es

$$dS = \sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\,dA.$$

De tal modo, si f, g, g_x y g_y son continuas en una región del espacio tridimensional que contiene a S, podemos evaluar (1) por medio de una integral doble:

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_R f(x, y, g(x, y))\sqrt{1 + [g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2}\,dA. \quad (2)$$

Advierta que cuando $f(x, y, z) = 1$, (1) se reduce a la fórmula para el área de la superficie (2) de la sección 14.6:

$$\iint_S dS = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k = A(S).$$

Proyección de *S* en otros planos Si $y = g(x, z)$ es la ecuación de una superficie S que se proyecta sobre la región R del plano xz, entonces la integral de superficie de f sobre S está dada por

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_R f(x, g(x, z), z)\sqrt{1 + [g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2}\,dA. \quad (3)$$

De manera similar, si $x = g(y, z)$ es la ecuación de una superficie S que se proyecta sobre el plano yz, entonces el análogo de (3) es

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_R f(g(y, z), y, z)\sqrt{1 + [g_y(y, z)]^2 + [g_z(y, z)]^2}\,dA. \quad (4)$$

Masa de una superficie Suponga que $\rho(x, y, z)$ representa la densidad de una superficie S en el punto (x, y, z), o la masa por unidad de área de superficie. Entonces la **masa** m de la superficie es

$$m = \iint_S \rho(x, y, z)\,dS. \quad (5)$$

EJEMPLO 1 Masa de una superficie

Determine la masa de la superficie del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante para $1 \le z \le 5$ si la densidad en el punto P sobre la superficie es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

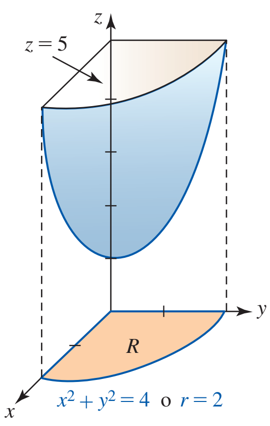


FIGURA 15.6.2 Superficie del ejemplo 1

Solución La superficie en cuestión y su proyección sobre el plano xy se muestran en la FIGURA 15.6.2. Ahora bien, puesto que $\rho(x, y, z) = kz$, $g(x, y) = 1 + x^2 + y^2$, $g_x = 2x$, $g_y = 2y$, las fórmulas (5) y (2) producen

$$m = \iint_S kz\,dS = k\iint_R (1 + x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dA.$$

Cambiando a coordenadas polares, obtenemos

$$\begin{aligned} m &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 (1 + r^2)\sqrt{1 + 4r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= k\int_0^{\pi/2}\int_0^2 [r(1 + 4r^2)^{1/2} + r^3(1 + 4r^2)^{1/2}]\,dr\,d\theta \quad \leftarrow \text{integración por partes} \\ &= k\int_0^{\pi/2}\left[\frac{1}{12}(1 + 4r^2)^{3/2} + \frac{1}{12}r^2(1 + 4r^2)^{3/2} - \frac{1}{120}(1 + 4r^2)^{5/2}\right]_0^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2}k\pi\left[\frac{5}{12}(17)^{3/2} - \frac{1}{120}(17)^{5/2} - \frac{3}{40}\right] \approx 30.16k. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 2 Región R en el plano xz

Evalúe $\iint_S xz^2 dS$, donde S es la porción del cilindro $y = 2x^2 + 1$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $x = 2$, $z = 4$ y $z = 8$.

Solución Usaremos (3) con $g(x, z) = 2x^2 + 1$ y R es la región rectangular en el plano xz que se muestra en la FIGURA 15.6.3. Puesto que $g_x(x, z) = 4x$ y $g_z(x, z) = 0$, se deduce que

$$\begin{aligned}\iint_S xz^2\, dS &= \int_0^2\int_4^8 xz^2\sqrt{1 + 16x^2}\, dz\, dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^2 z^3x\sqrt{1 + 16x^2}\Big]_4^8 dx \\ &= \frac{448}{3}\int_0^2 x(1 + 16x^2)^{1/2}\, dx = \frac{28}{9}(1 + 16x^2)^{3/2}\Big]_0^2 \\ &= \frac{28}{9}[65^{3/2} - 1] \approx 1\,627.3.\end{aligned}$$

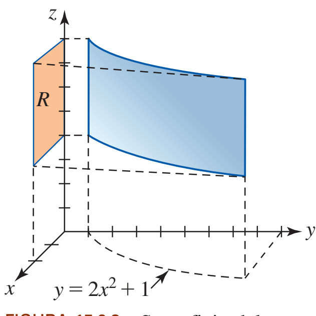


FIGURA 15.6.3 Superficie del ejemplo 2

Superficies paramétricas Si S se define paramétricamente mediante la función vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

donde (u, v) es el dominio D del parámetro del plano uv y $f(x, y, z)$ es continua sobre S, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 15.6.1 Integral de superficie

Sea S una superficie paramétrica suave definida por la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k},$$

donde (u, v) varía sobre la región R del parámetro en el plano uv, y sea $f(x, y, z)$ continua sobre S. Entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\, dS = \iint_R f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dA. \qquad (6)$$

La fórmula (6) puede considerarse como una integral de superficie análoga a la integral de línea $\int_a^b f(x(t), y(t), z(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt$, (14) de la sección 15.1.

EJEMPLO 3 Superficie paramétrica

Evalúe la integral de superficie $\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS$, donde S es la superficie definida por la función vectorial $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v\mathbf{i} + u \operatorname{sen} v\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, donde $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 4\pi$.

Solución La gráfica de $\mathbf{r}(u, v)$ que se muestra en la FIGURA 15.6.4 recibe el nombre de *helicoide circular*. La frontera de un helicoide circular es una hélice circular. Vea las *Notas desde el aula* en la sección 10.2.

Al sustituir $x = u \cos v$ y $y = u \operatorname{sen} v$ en el integrando y simplificando, obtenemos:

$$\sqrt{1 + x^2 + y^2} = \sqrt{1 + u^2\cos^2 v + u^2\operatorname{sen}^2 v} = \sqrt{1 + u^2}.$$

Luego,
$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \operatorname{sen} v & 0 \\ -u\operatorname{sen} v & u\cos v & 1 \end{vmatrix} = \operatorname{sen} v\mathbf{i} - \cos v\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{1 + u^2}.$$

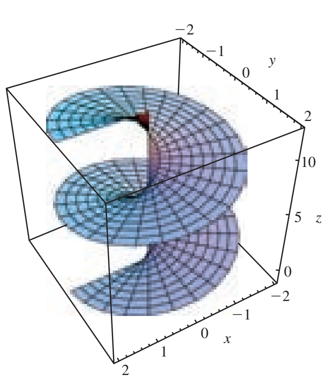
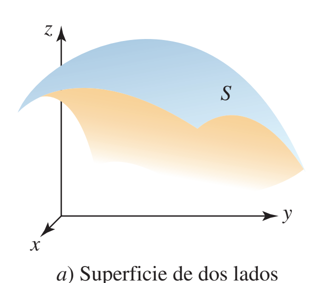


FIGURA 15.6.4 Helicoide del ejemplo 3



a) Superficie de dos lados


b) Superficie de un lado

FIGURA 15.6.5 Superficie orientada *a*); superficie no orientada *b*)

La integral dada se convierte en

$$\iint_S \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dS = \iint_R (\sqrt{1 + u^2})^2\, dA$$
$$= \int_0^{4\pi}\int_0^2 (1 + u^2)\, du\, dv$$
$$= \frac{14}{3}\int_0^{4\pi} dv$$
$$= \frac{56}{3}\pi. \quad ■$$

Superficies orientadas En el ejemplo 4 evaluaremos una integral de superficie de un campo vectorial. Para hacerlo necesitamos examinar el concepto de una **superficie orientada**. En términos generales, una superficie orientada S, tal como se ilustra en la FIGURA 15.6.5*a*), tiene dos lados que pueden pintarse con colores diferentes. La cinta de Möbius, que recibe ese nombre en honor al matemático alemán **August Möbius** (1790-1868) y que se muestra en la figura 15.6.5*b*), no es una superficie orientada y tiene un solo lado. Para construir una cinta de Möbius corte una larga tira de papel, dé medio giro a un extremo y luego una ambos extremos con cinta. Una persona que empieza a dibujar la superficie de una cinta de Möbius en un punto pintará la superficie completa y regresará al punto de partida.

Específicamente, afirmamos que una superficie suave S es una superficie orientada si existe una función normal unitaria continua $\mathbf{n}$ definida en cada punto (x, y, z) sobre la superficie. El campo vectorial $\mathbf{n}(x, y, z)$ recibe el nombre de **orientación** de S. Sin embargo, puesto que una normal unitaria a la superficie S en (x, y, z) puede ser ya sea $\mathbf{n}(x, y, z)$ o $-\mathbf{n}(x, y, z)$, una superficie orientada tiene dos orientaciones. Vea la FIGURA 15.6.6*a*), *b*) y *c*). La cinta de Möbius que se muestra de nuevo en la figura 15.6.6*d*) no es una superficie orientada porque si una normal unitaria $\mathbf{n}$ empieza en P sobre la superficie y se mueve *una vez* alrededor de la cinta sobre la curva C, termina en el lado opuesto de la cinta en P y por ello apunta en la dirección opuesta. Una superficie S definida por $z = g(x, y)$ tiene una **orientación hacia arriba** (figura 15.6.6*b*) cuando las normales unitarias están dirigidas hacia arriba, esto es, tiene componentes $\mathbf{k}$ positivas, y tiene una **orientación hacia abajo** (figura 15.6.6*c*) cuando las normales unitarias están dirigidas hacia abajo, esto es, tienen componentes $\mathbf{k}$ negativas.

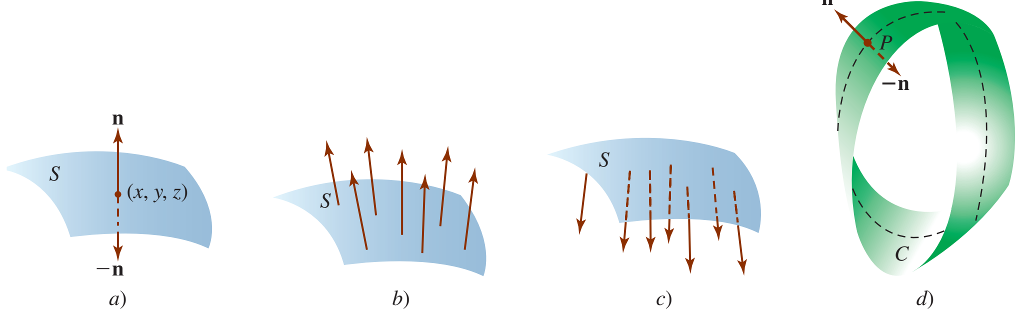


FIGURA 15.6.6 Orientación hacia arriba en *b*); orientación hacia abajo en *c*); ninguna orientación en *d*)

Si una superficie suave S está definida implícitamente por $h(x, y, z) = 0$, entonces recuerde que la normal unitaria a la superficie es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|},$$

donde $\nabla h = (\partial h/\partial x)\mathbf{i} + (\partial h/\partial y)\mathbf{j} + (\partial h/\partial z)\mathbf{k}$ es el gradiente de h. Si S está definida por una función explícita $z = g(x, y)$, entonces podemos usar $h(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$ o $h(x, y, z) = g(x, y) - z = 0$ dependiendo de la orientación de S.

Como veremos en el siguiente ejemplo, las dos orientaciones de una superficie *cerrada* orientada son **hacia fuera** y **hacia dentro**. Una **superficie cerrada** se define como la frontera de un sólido finito tal como la superficie de una esfera.

EJEMPLO 4 Región R en el plano xz

Considere la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ de radio $a > 0$. Si definimos $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$, entonces

$$\nabla h = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{y} \quad |\nabla h| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2} = 2a.$$

Así, las dos orientaciones de las superficies son

$$\mathbf{n} = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k} \quad \text{y} \quad \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n} = -\frac{x}{a}\mathbf{i} - \frac{y}{a}\mathbf{j} - \frac{z}{a}\mathbf{k}.$$

El campo vectorial $\mathbf{n}$ define una orientación hacia fuera, en tanto que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$ define una orientación hacia dentro. Vea la FIGURA 15.6.7. ■

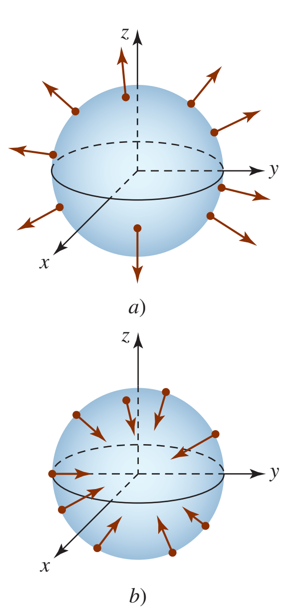


FIGURA 15.6.7 Orientación hacia fuera en *a*); orientación hacia dentro en *b*) en el ejemplo 4

Integrales de campos vectoriales

Si

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

es el campo de velocidades de un fluido, entonces, como se indica en la FIGURA 15.6.8*b*), el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área superficial ΔS por unidad de tiempo se aproxima por medio de

$$(\text{altura}) - (\text{área de la base}) = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\Delta S = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta S,$$

donde $\mathbf{n}$ es una normal unitaria a la superficie. El volumen total del fluido que pasa a través de S por unidad de tiempo de recibe el nombre de **flujo de F a través de *S*** y está dado por

$$\text{flujo} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{7}$$

En el caso de una superficie cerrada S, si $\mathbf{n}$ es la normal exterior (interior), entonces (7) produce el volumen del fluido que fluye hacia fuera (hacia dentro) a través de S por unidad de tiempo.

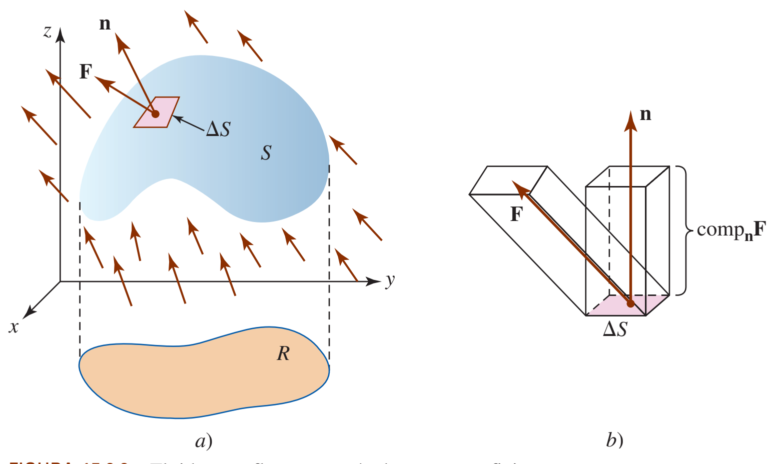


FIGURA 15.6.8 Fluido que fluye a través de una superficie

EJEMPLO 5 Flujo

Considere que $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ representa el flujo de un líquido. Determine el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la superficie S dada por la parte del plano $z = 6 - 3x - 2y$ en el primer octante orientado hacia arriba.

Solución El campo vectorial y la superficie se ilustran en la FIGURA 15.6.9. Definiendo el plano por $h(x, y, z) = 3x + 2y + z - 6 = 0$, vemos que la normal unitaria con componente $\mathbf{k}$ positiva es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{3}{\sqrt{14}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{14}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{k}.$$

Como $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 3z/\sqrt{14}$, tenemos

$$\text{flujo} = \iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_S 3z\, dS.$$

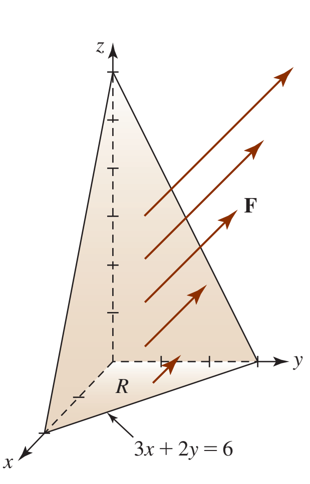


FIGURA 15.6.9 Superficie del ejemplo 5

Al emplear la proyección R de la superficie sobre el plano xy que se muestra en la figura, la última integral puede escribirse

$$\text{flujo} = \frac{1}{\sqrt{14}}\iint_R 3(6 - 3x - 2y)(\sqrt{14}\,dA)$$
$$= 3\int_0^2\int_0^{3-3x/2}(6 - 3x - 2y)\,dy\,dx = 18. \quad \blacksquare$$

Dependiendo de la naturaleza del campo vectorial, la integral en (7) puede representar otros tipos de flujo. Por ejemplo, (7) también podría proporcionar el flujo eléctrico, flujo magnético, flujo de calor, etcétera.

$\iint_S$ NOTAS DESDE EL AULA

Si la superficie S es suave por partes, expresamos una integral de superficie sobre S como la suma de las integrales de superficie sobre las diversas secciones de la superficie. Si S está dada por $S = S_1 \cup \cdots \cup S_n$, donde las superficies se intersecan sólo en sus fronteras, entonces

$$\iint_S f(x, y, z)\,dS = \iint_{S_1} f(x, y, z)\,dS + \cdots + \iint_{S_n} f(x, y, z)\,dS.$$

Por ejemplo, suponga que S es la superficie cerrada suave por partes y orientada que está acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2\,(S_1)$ y el plano $z = 1\,(S_2)$. Entonces, el flujo de un campo vectorial $\mathbf{F}$ hacia fuera de la superficie S es

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS,$$

donde consideramos S_1 orientada hacia abajo y S_2 orientada hacia arriba. Vea la FIGURA 15.6.10 y el problema 21 en los ejercicios 15.6.

FIGURA 15.6.10 Superficie S definida por partes

Ejercicios 15.6 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1-10, evalúe $\iint_S f(x, y, z)\,dS$.

1. $f(x, y, z) = x$; S es la porción del cilindro $z = 2 - x^2$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$
2. $f(x, y, z) = xy(9 - 4z)$; la misma superficie S que en el problema 1
3. $f(x, y, z) = xz^3$; S es el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
4. $f(x, y, z) = x + y + z$; S es el cono de un solo manto $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre $z = 1$ y $z = 4$
5. $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ en el primer octante
6. $f(x, y, z) = z^2$; S es la porción del plano $z = x + 1$ dentro del cilindro $y = 1 - x^2$, $0 \le y \le 1$
7. $f(x, y, z) = xy$; S es la porción del paraboloide $2z = 4 - x^2 - y^2$ dentro de $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$
8. $f(x, y, z) = 2z$; S es la porción del paraboloide $2z = 1 + x^2 + y^2$ en el primer octante acotado por $x = 0$, $y = \sqrt{3}x$, $z = 1$
9. $f(x, y, z) = 24\sqrt{y}\,z$; S es la porción del cilindro $y = x^2$ en el primer octante acotado por $y = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 3$
10. $f(x, y, z) = (1 + 4y^2 + 4z^2)^{1/2}$; S es la porción del paraboloide de $x = 4 - y^2 - z^2$ en el primer octante fuera del cilindro $y^2 + z^2 = 1$

En los problemas 11 y 12, evalúe $\iint_S (3z^2 + 4yz)\,dS$, donde S es la porción del plano $x + 2y + 3z = 6$ en el primer octante. Use la proyección de S sobre el plano de coordenadas indicado en la figura dada.

11. 12.

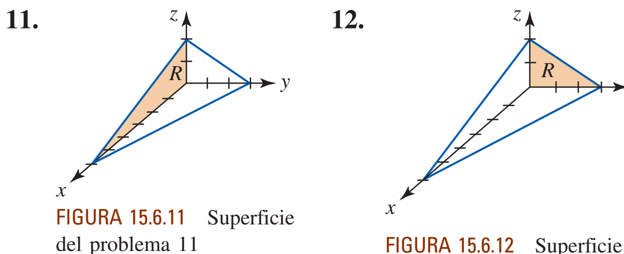


FIGURA 15.6.11 Superficie del problema 11

FIGURA 15.6.12 Superficie del problema 12

En los problemas 13 y 14, encuentre la masa de la superficie dada con la función de densidad que se indica.

13. S es la porción del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante; la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia desde el plano yz.
14. S es el hemisferio $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$; $\rho(x, y, z) = |xy|$

En los problemas 15-20, sea **F** un campo vectorial. Encuentre el flujo de **F** a través de la superficie dada. Suponga que la superficie S se orienta hacia arriba.

15. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S la porción del cilindro $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante acotado por $x = 0, x = 3, y = 0, z = 0$

16. $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$; S es la parte del paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$

17. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; la misma superficie S que en el problema 16

18. $\mathbf{F} = -x^3y\mathbf{i} + yz^3\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x + 3$ en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2x$

19. $\mathbf{F} = \frac{1}{2}x^2\mathbf{i} + \frac{1}{2}y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 4 - x^2 - y^2$ para $0 \le z \le 4$

20. $\mathbf{F} = e^y\mathbf{i} + e^x\mathbf{j} + 18y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $x + y + z = 6$ en el primer octante

21. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 5z\mathbf{k}$ fuera de la superficie cerrada S dada en la figura 15.6.10.

22. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 6z^2\mathbf{k}$ fuera de la superficie cerrada S acotada por los paraboloides $z = 4 - x^2 - y^2$ y $z = x^2 + y^2$.

≡ Aplicaciones

23. Considere que $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ representa la temperatura y deje que el flujo de calor esté dado por el campo vectorial $\mathbf{F} = -\nabla T$. Determine el flujo de calor fuera de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. [*Sugerencia*: El área de la superficie de una esfera de radio a es $4\pi a^2$.]

24. Determine el flujo $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ fuera del cubo unitario definido por $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$. Vea la FIGURA 15.6.13. Recurra al hecho de que el flujo fuera del cubo es la suma de los flujos fuera de los lados.

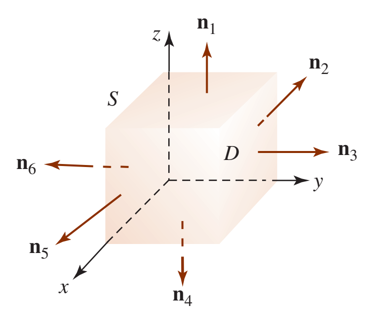


FIGURA 15.6.13 Cubo del problema 24

25. La ley de Coulomb establece que el campo eléctrico **E** debido a una carga puntual q en el origen está dado por $\mathbf{E} = kq\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde k es una constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determine el flujo fuera de una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

26. Si $\sigma(x, y, z)$ es la densidad de carga en un campo electrostático, entonces la carga total sobre la superficie S es $Q = \iint_S \sigma(x, y, z)\, dS$. Encuentre la carga total sobre esa parte del hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ si la densidad de carga en un punto P sobre la superficie es directamente proporcional a la distancia desde el plano xy.

27. Las coordenadas del **centroide** de una superficie se definen por medio de

$$\bar{x} = \frac{\iint_S x\, dS}{A(S)}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_S y\, dS}{A(S)}, \quad \bar{z} = \frac{\iint_S z\, dS}{A(S)},$$

donde $A(S)$ es el área de la superficie. Encuentre el centroide de esa porción del plano $2x + 3y + z = 6$ en el primer octante.

28. Emplee la información del problema 27 para determinar el centroide del hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

29. El **momento de inercia** de una superficie S con densidad $\rho(x, y, z)$ en un punto (x, y, z) alrededor del eje z está dado por

$$I_z = \iint_S (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, dS.$$

Considere la superficie cónica $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $0 \le z \le 4$, con densidad constante k.

a) Emplee el problema 27 para determinar el centroide de la superficie.

b) Encuentre el momento de inercia de la superficie alrededor del eje z.

≡ Piense en ello

30. Sea $z = f(x, y)$ la ecuación de una superficie S y **F** el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$. Demuestre que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_R \left[-P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} - Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} + R(x, y, z) \right] dA.$$

15.7 Rotacional y divergencia

Introducción Hemos visto que si un campo vectorial de fuerza **F** es conservativo, entonces puede escribirse como el gradiente de una función potencial ϕ:

$$\mathbf{F} = \nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\mathbf{k}.$$

El operador diferencial vectorial, u operador nabla,

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1}$$

que se usa en el gradiente también puede combinarse con un campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k} \tag{2}$$

de dos modos diferentes: en un caso produciendo otro campo vectorial y en el otro dando lugar a una función escalar.

Nota: Supondremos en la siguiente discusión que P, Q y R tienen derivadas parciales continuas por toda una región apropiada del espacio tridimensional.

Rotacional Empezamos combinando el operador diferencial (1) con el campo vectorial (2) para producir otro campo vectorial llamado el **rotacional** de **F**.

Definición 15.7.1 Rotacional de un campo vectorial

El **rotacional** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es el campo vectorial

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}. \tag{3}$$

No es necesario memorizar los complicados componentes en el campo vectorial de (3). Como un procedimiento práctico, (3) puede interpretarse como un producto cruz. Interpretamos (1) como un vector con componentes $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$, y entonces el rotacional **F** puede escribirse como el producto cruz de ∇ y el vector **F**:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{4}$$

EJEMPLO 1 Rotacional de un campo vectorial

Si $\mathbf{F} = (x^2y^3 - z^4)\mathbf{i} + 4x^5y^2z\mathbf{j} - y^4z^6\mathbf{k}$, encuentre el rotacional **F**.

Solución De (4),

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^2y^3 - z^4 & 4x^5y^2z & -y^4z^6 \end{vmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial y}(-y^4z^6) - \frac{\partial}{\partial z}(4x^5y^2z)\right]\mathbf{i} - \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y^4z^6) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^3 - z^4)\right]\mathbf{j} \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x^5y^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^3 - z^4)\right]\mathbf{k} \\ &= (-4y^3z^6 - 4x^5y^2)\mathbf{i} - 4z^3\mathbf{j} + (20x^4y^2z - 3x^2y^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

■

Si f es una función escalar con segundas derivadas parciales continuas, entonces es fácil demostrar que

$$\text{rot(grad } f) = \nabla \times \nabla f = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Vea el problema 23 de los ejercicios 15.7. Puesto que un campo vectorial conservativo **F** es un campo gradiente, esto es, existe una función potencial ϕ tal que $\mathbf{F} = \nabla\phi$, se deduce de (5) que *si* **F** *es conservativo, entonces* rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 2 Un campo vectorial no conservativo

Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$. De (4),

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Debido a que rot $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ podemos concluir que **F** es no conservativo. ■

Bajo la suposición de que las funciones componentes P, Q y R de un campo vectorial **F** son continuas y tienen derivadas parciales continuas por toda una región abierta D del espacio tridimensional, también podemos concluir que *si* rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, *entonces* **F** *es conservativo*. Resumimos estas observaciones en el siguiente teorema.

Teorema 15.7.1 Conceptos equivalentes

Suponga que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es un campo vectorial donde P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en alguna región abierta del espacio tridimensional. El campo vectorial **F** es conservativo si y sólo si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Advierta que cuando rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces las tres componentes del vector deben ser 0. De (3) vemos que esto quiere decir que

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Ahora repase (12) de la sección 15.3.

Divergencia Hay otra combinación de derivadas parciales de las funciones componentes de un campo vectorial que ocurren con frecuencia en ciencia e ingeniería. Antes de enunciar la siguiente definición, considere lo siguiente.

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$ representa el campo de velocidades de un fluido, entonces como vimos en la figura 15.6.8*b*) el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área superficial ΔS por unidad de tiempo, esto es, el flujo del campo vectorial **F** a través del área ΔS, es aproximadamente

$$(\text{altura}) \cdot (\text{área de la base}) = (\text{comp}_{\mathbf{n}}\mathbf{F})\Delta S = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\Delta S, \tag{6}$$

donde **n** es un vector normal unitario a la superficie. Considere ahora el paralelepípedo rectangular que se ilustra en la FIGURA 15.7.1. Para calcular el flujo total de **F** a través de sus seis lados en la dirección hacia fuera, calculamos primero el flujo total hacia el exterior de dos caras paralelas. El área de la cara F_1 es $\Delta x \Delta z$, y la normal unitaria hacia fuera es $-\mathbf{j}$, y por ello por (6) el flujo de **F** a través de F_1 es

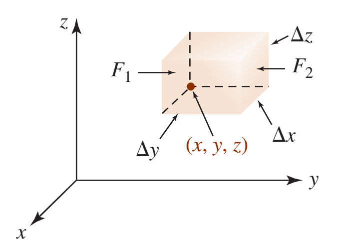


FIGURA 15.7.1 Flujo que pasa a través de un paralelepípedo rectangular

$$\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{j})\Delta x \Delta z = -Q(x, y, z)\Delta x \Delta z.$$

El flujo hacia fuera de la cara F_2, cuya normal hacia fuera es **j**, está dado por

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{j})\Delta x \Delta z = Q(x, y + \Delta y, z)\Delta x \Delta z.$$

En consecuencia, el flujo total hacia fuera de estas caras paralelas es

$$Q(x, y + \Delta y, z)\Delta x \Delta z + (-Q(x, y, z)\Delta x \Delta z) = [Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]\Delta x \Delta z. \tag{7}$$

Multiplicando (7) por $\Delta y/\Delta y$ y utilizando la definición de una derivada parcial, entonces para Δy cercana a 0,

$$\frac{[Q(x, y + \Delta y, z) - Q(x, y, z)]}{\Delta y}\Delta x \Delta y \Delta z \approx \frac{\partial Q}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Argumentando exactamente de la misma manera, vemos que las contribuciones al flujo total hacia fuera del paralelepípedo desde las dos caras paralelas al plano yz, y desde las dos caras paralelas al plano xy, originan

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial R}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Al sumar estos resultados, vemos que el flujo total de **F** hacia fuera del paralelepípedo es aproximadamente

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z.$$

Dividiendo la última expresión entre $\Delta x \Delta y \Delta z$, obtenemos el flujo hacia fuera de **F** por unidad de volumen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Esta combinación de derivadas parciales es una función escalar y recibe el nombre especial de **divergencia** de **F**.

Definición 15.7.2 Divergencia

La **divergencia** de un campo vectorial $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ es la función escalar

$$\text{div }\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \tag{8}$$

La función escalar div **F** dada en (8) también puede escribirse en términos del operador delta (1) como un producto punto:

$$\text{div }\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}P(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y}Q(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z}R(x, y, z). \tag{9}$$

EJEMPLO 3 Divergencia de un campo vectorial

Si $\mathbf{F} = xz^2\mathbf{i} + 2xy^2z\mathbf{j} - 5yz\mathbf{k}$, encuentre div **F**.

Solución De (9),

$$\begin{aligned}\text{div }\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial}{\partial x}(xz^2) + \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2z) + \frac{\partial}{\partial z}(-5yz)\\ &= z^2 + 4xyz - 5y.\end{aligned}$$

■

La siguiente identidad relaciona las nociones de divergencia y rotacional. Si **F** es un campo vectorial que tiene segundas derivadas parciales continuas, entonces

$$\text{div(rot }\mathbf{F}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0. \tag{10}$$

Vea el problema 24 de los ejercicios 15.7.

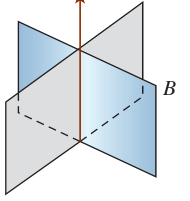
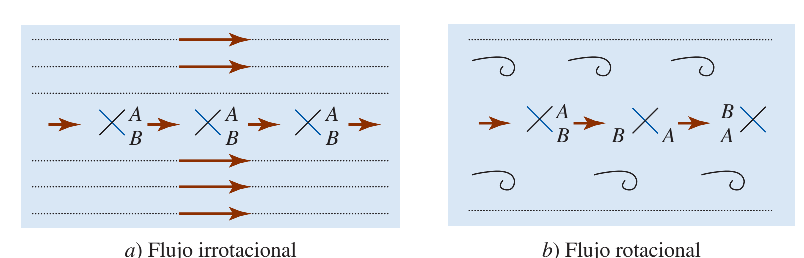


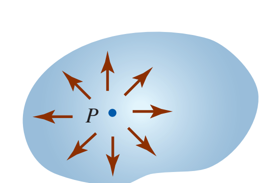
FIGURA 15.7.2 Dispositivo de paleta para detectar la rotación de un fluido

Interpretaciones físicas La palabra *rotacional* fue introducida por el matemático y físico escocés **James Clerk Maxwell** (1831-1879) en sus estudios de campos electromagnéticos. Sin embargo, el rotacional se entiende con facilidad en conexión con el flujo de fluidos. Si un dispositivo de palas, como el que se muestra en la FIGURA 15.7.2, se inserta en un fluido que fluye, entonces el rotacional del campo de velocidades **F** es una medida de la tendencia del fluido a girar el dispositivo en torno a su eje vertical w. Si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces el flujo del fluido se dice que será **irrotacional**, lo cual significa que no tiene vórtices o remolinos que podrían causar el giro de la pala. En la FIGURA 15.7.3 el eje w de la pala apunta directamente hacia fuera de la página.

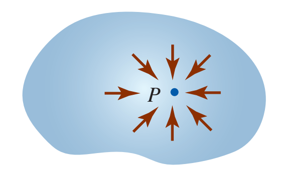


a) Flujo irrotacional *b*) Flujo rotacional

FIGURA 15.7.3 Flujo de fluido irrotacional y rotacional



a) Div $\mathbf{F}(P) > 0$; P una fuente



b) Div $\mathbf{F}(P) < 0$; P un sumidero

FIGURA 15.7.4 El punto P es una fuente en *a*); un sumidero en *b*)

En la discusión que condujo a la definición 15.7.2, vimos que la divergencia de un campo de velocidades **F** cerca de un punto $P(x, y, z)$ es el flujo por unidad de volumen. Si div $\mathbf{F}(P) > 0$, se dice que P es una **fuente** para **F**, ya que hay un flujo neto hacia fuera del fluido cerca de P, si div $\mathbf{F}(P) < 0$, se afirma entonces que P es un **sumidero** para **F**, puesto que hay un flujo neto hacia dentro del fluido cerca de P; si div $\mathbf{F}(P) = 0$, no hay fuentes o sumideros cerca de P. Vea la FIGURA 15.7.4.

La divergencia de un campo vectorial tiene otra interpretación en el concepto del flujo de fluidos. Una medida de la tasa de cambio de la densidad del fluido en un punto es simplemente div **F**. En otras palabras, div **F** es una medida de la compresibilidad del fluido. Si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se

dice que el fluido es **incompresible**. En la teoría electromagnética, si $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, se afirma que el campo vectorial **F** es **solenoidal**.

Tomando el producto punto de ∇ consigo mismo obtenemos un importante operador diferencial escalar de segundo orden:

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{11}$$

Cuando (11) se aplica a una función escalar $f(x, y, z)$ el resultado se denomina **laplaciano** tridimensional,

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{12}$$

y aparece en matemáticas aplicadas en muchas ecuaciones diferenciales parciales. Una de las ecuaciones diferenciales parciales más famosas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \tag{13}$$

recibe el nombre de **ecuación de Laplace** en tres dimensiones. La ecuación de Laplace a menudo se abrevia como $\nabla^2 f = 0$. Vea los problemas 49-54 de los ejercicios 13.3.

Posdata: Un poco de historia **Pierre-Simon Marquis de Laplace** (1749-1827) fue un notable matemático, físico y astrónomo francés. Su trabajo más famoso, la *Mécanique Céleste* (*Mecánica celestial*), de cinco volúmenes, resume y extiende el trabajo de algunos de sus famosos predecesores, tal como Isaac Newton. En realidad, algunos de sus entusiastas contemporáneos llamaron a Laplace el "Newton de Francia". Nacido en una pobre familia granjera, Laplace adulto tuvo éxito en combinar la ciencia y las matemáticas con la política. Napoleón lo nombró ministro del interior, aunque después lo destituyó debido a que él "buscaba los detalles en todo y llevó a la administración el espíritu de lo infinitamente pequeño", es decir, el cálculo infinitesimal. Incluso Napoleón lo nombró posteriormente senador. Después de la abdicación de Napoleón y de la restauración de la monarquía borbona en 1814, Luis XVIII otorgó a Laplace el título nobiliario de marqués en 1817.



Laplace

Ejercicios 15.7

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1-10, determine el rotacional y la divergencia del campo vectorial dado.

1. $\mathbf{F}(x, y, z) = xz\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$
2. $\mathbf{F}(x, y, z) = 10yz\mathbf{i} + 2x^2z\mathbf{j} + 6x^3\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy\mathbf{i} + (2x^2 + 2yz)\mathbf{j} + (3z^2 + y^2)\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y)^3\mathbf{i} + e^{-yz}\mathbf{j} + xye^{2y}\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + 2xz^3\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F}(x, y, z) = 5y^3\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^3y^2 - xy\right)\mathbf{j} - (x^3yz - xz)\mathbf{k}$
7. $\mathbf{F}(x, y, z) = xe^{-z}\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 3ye^{-z}\mathbf{k}$
8. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \ln x\mathbf{i} + (2x - 3yz)\mathbf{j} + xy^2z^3\mathbf{k}$
9. $\mathbf{F}(x, y, z) = xye^x\mathbf{i} - x^3yze^z\mathbf{j} + xy^2e^y\mathbf{k}$
10. $\mathbf{F}(x, y, z) = x^2 \operatorname{sen} yz\mathbf{i} + z \cos xz^3\mathbf{j} + ye^{5xy}\mathbf{k}$

En los problemas 11-18, considere que **a** es un vector constante y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Verifique la identidad dada.

11. $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$
12. $\operatorname{rot} \mathbf{r} = \mathbf{0}$
13. $(\mathbf{a} \times \nabla) \times \mathbf{r} = -2\mathbf{a}$
14. $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$
15. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$
16. $\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$
17. $\nabla \times [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \times \mathbf{a})$
18. $\nabla \cdot [(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})\mathbf{a}] = 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{a})$

En los problemas 19-26, verifique la identidad dada. Suponga continuidad de todas las derivadas parciales.

19. $\nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{G}$
20. $\nabla \times (\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \times \mathbf{G}$
21. $\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f$
22. $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f(\nabla \times \mathbf{F}) + (\nabla f) \times \mathbf{F}$

23. rot(grad f) $= \mathbf{0}$

24. div(rot **F**) $= 0$

25. div($\mathbf{F} \times \mathbf{G}$) $= \mathbf{G} \cdot$ rot $\mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot$ rot $\mathbf{G}$

26. rot(rot **F** + grad f) = rot(rot **F**)

27. Determine rot(rot **F**) para el campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + 4yz^2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$.

28. Suponga que ∇^2 es el operador diferencial definido en (11). Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales, demuestre que

$$\text{rot(rot } \mathbf{F}) = -\nabla^2\mathbf{F} + \text{grad(div } \mathbf{F}),$$

donde $\nabla^2\mathbf{F} = \nabla^2(P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) = \nabla^2P\mathbf{i} + \nabla^2Q\mathbf{j} + \nabla^2R\mathbf{k}$.

29. Emplee la identidad en el problema 28 para obtener el resultado del problema 27.

30. Demuestre que $\nabla \cdot (f\nabla f) = f\nabla^2 f + |\nabla f|^2$, donde $\nabla^2 f$ es el laplaciano definido en (12). [*Sugerencia*: Vea el problema 21.]

Cualquier función f con segundas derivadas parciales continuas que satisface la ecuación de Laplace se dice que es una **función armónica**. En los problemas 31 y 32, muestre que una función f dada es armónica comprobando que f satisface (13).

31. $f(x, y, z) = 3x^2 + 5y^2 + 4xy - 9xz - 8z^2$

32. $f(x, y, z) = \dfrac{A}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$, A, a, b y c constantes

La ecuación de Laplace en dos dimensiones es

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{14}$$

En los problemas 33 y 34, demuestre que la función f dada es armónica comprobando que f satisface (14).

33. $f(x, y) = \arctan\left(\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right)$

34. $f(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

En los problemas 35 y 36, suponga que f y g tienen segundas derivadas parciales continuas. Demuestre que el campo vectorial dado es solenoidal. [*Sugerencia*: Vea el problema 25.]

35. $\mathbf{F} = \nabla f \times \nabla g$

36. $\mathbf{F} = \nabla f \times (f\nabla g)$

37. Si $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\nabla \times \mathbf{F}$ a través de la porción del elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ en el primer octante que está acotado por $y = 0$, $y = x$, $z = 0$. Suponga que la superficie se orienta hacia arriba.

☰ Aplicaciones

38. Suponga que un cuerpo gira con una velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de un eje. Si **r** es el vector de posición de un punto P sobre el cuerpo medido desde el origen, entonces el vector de velocidad lineal **v** de rotación es $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Vea la FIGURA 15.7.5. Si $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$, demuestre que $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}$ rot **v**.

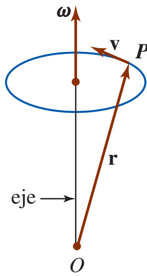


FIGURA 15.7.5 Cuerpo rotante del problema 38

39. Sea $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ el vector de posición de masa m_1 y deje que la masa m_2 esté ubicada en el origen. Si la fuerza de atracción gravitacional es

$$\mathbf{F} = -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}|^3}\mathbf{r},$$

verifique que rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ y div $\mathbf{F} = 0$, $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$.

40. El campo vectorial de velocidades para el flujo bidimensional de un fluido ideal alrededor de un cilindro está dado por

$$\mathbf{F}(x, y) = A\left[\left(1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right)\mathbf{i} - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}\mathbf{j}\right],$$

para alguna constante A positiva. Vea la FIGURA 15.7.6.

a) Demuestre que cuando el punto (x, y) está alejado del origen, $\mathbf{F}(x, y) \approx A\mathbf{i}$.

b) Demuestre que **F** es irrotacional.

c) Demuestre que **F** es incompresible.

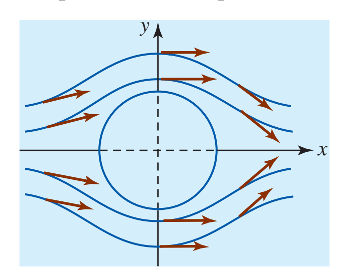


FIGURA 15.7.6 Campo de velocidades del problema 40

41. Si $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$ y $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y, z, t)$ representan los campos eléctrico y magnético en el espacio vacío, entonces las ecuaciones de Maxwell son

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

donde c es la velocidad de la luz. Utilice la identidad en el problema 28 para demostrar que **E** y **H** satisfacen

$$\nabla^2\mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \nabla^2\mathbf{H} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

☰ Piense en ello

42. Considere el campo vectorial $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} - xy^2z\mathbf{j} + (z + 5x)\mathbf{k}$. Explique por qué **F** no es el rotacional de otro campo vectorial **G**.

15.8 Teorema de Stokes

Introducción Es posible escribir el teorema de Green de la sección 15.4 en dos formas vectoriales diferentes. En ésta y en la siguiente sección generalizaremos estas formas a tres dimensiones.

Forma vectorial del teorema de Green Si $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ es un campo vectorial bidimensional, entonces

$$\text{rot } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

De (6) y (7) de la sección 15.2, el teorema de Green

$$\oint_C P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

se escribe en notación vectorial como

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds = \iint_R (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dA. \tag{1}$$

Esto es, la integral de línea de la componente tangencial de **F** es la integral doble de la componente normal del rot **F**.

Teorema de Green en el espacio tridimensional La forma vectorial del teorema de Green dada en (1) relaciona una integral de línea alrededor de una curva C cerrada simple suave por partes que forma la frontera de una región del plano R con una integral doble sobre R. El teorema de Green en espacio tridimensional relaciona una integral de línea alrededor de una curva C en el espacio tridimensional cerrada simple suave por partes que forma la frontera de una superficie S con una integral de superficie sobre S. Suponga que $z = f(x, y)$ es una función continua cuya gráfica es una superficie orientada suave por partes sobre una región R en el plano xy. Considere que C forma la frontera de S y que la proyección de C sobre el plano xy forma la frontera de R. La dirección positiva de C se induce mediante la orientación de la superficie S; la dirección positiva de C corresponde a la dirección que una persona tendría que caminar sobre C para tener su cabeza apuntando en la dirección de la orientación de la superficie mientras mantiene la superficie a la izquierda. Vea la FIGURA 15.8.1. Más precisamente, la orientación positiva de C concuerda con la regla de la mano derecha: si el pulgar de la mano derecha apunta en la dirección de la orientación de la superficie, entonces de manera aproximada los dedos de la mano derecha se enrollan alrededor de la superficie en la dirección positiva. Por último, sea **T** un vector tangente unitario a C que apunta en la dirección positiva. La forma tridimensional del teorema de Green, la cual se presenta a continuación, recibe el nombre de **teorema de Stokes**.

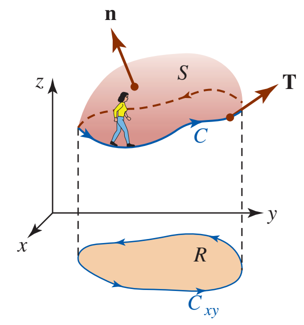


FIGURA 15.8.1. Dirección positiva de C

Teorema 15.8.1 Teorema de Stokes

Sea S una superficie orientada suave por partes acotada por una curva C cerrada simple suave por partes. Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

un campo vectorial para el cual P, Q, y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región abierta del espacio tridimensional que contiene a S. Si C se recorre en la dirección positiva, entonces

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds = \iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS, \tag{2}$$

donde **n** es una normal unitaria a S en la dirección de la orientación de S.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Suponga que la superficie S se orienta hacia arriba y está definida por una función $z = g(x, y)$ que tiene segundas derivadas parciales continuas. De la definición 15.7.1 tenemos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Además, si escribimos $h(x, y, z) = z - g(x, y) = 0$, entonces

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{-\dfrac{\partial g}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g}{\partial y}\right)^2}}.$$

Por consiguiente,

$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA. \quad (3)$$

Nuestro objetivo ahora es demostrar que la integral de línea $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se reduce a (3).

Si C_{xy} es la proyección de C sobre el plano xy y tiene las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, entonces ecuaciones paramétricas para C son $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = g(x(t), y(t))$, $a \le t \le b$. De tal manera,

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\frac{dz}{dt}\right] dt \\
&= \int_a^b \left[P\frac{dx}{dt} + Q\frac{dy}{dt} + R\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\right] dt \quad \leftarrow \text{regla de la cadena} \\
&= \oint_{C_{xy}} \left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx + \left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right) dy \\
&= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right] dA. \quad \leftarrow \text{teorema de Green} \quad (4)
\end{aligned}$$

Ahora, por las reglas de la cadena y del producto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(Q + R\frac{\partial g}{\partial y}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[Q(x, y, g(x, y)) + R(x, y, g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y}\right] \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x} + R\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}. \quad (5)
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(P + R\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} + R\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}. \quad (6)$$

Restando (6) de (5) y utilizando el hecho de que $\partial^2 g/\partial x \partial y = \partial^2 g/\partial y \partial x$, vemos que, después de rearreglar, (4) se convierte en

$$\iint_R \left[-\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\frac{\partial g}{\partial x} - \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\frac{\partial g}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] dA.$$

La última expresión es la misma que el lado derecho de (3), que era lo que se quería demostrar. ■

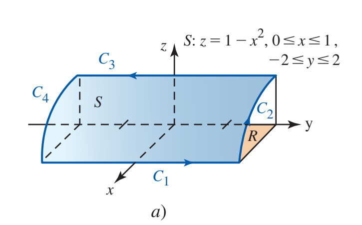
EJEMPLO 1 Verificación del teorema de Stokes

Sea S la parte del cilindro $z = 1 - x^2$ para $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$. Verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$. Suponga que S se orienta hacia arriba.

Solución La superficie S, la curva C (la cual está compuesta por la unión de C_1, C_2, C_3 y C_4), y la región R se ilustran en la FIGURA 15.8.2 en la página 853.

La integral de superficie: Para $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ encontramos

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ xy & yz & xz \end{vmatrix} = -y\mathbf{i} - z\mathbf{j} - x\mathbf{k}.$$



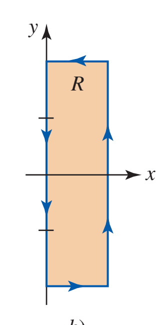


FIGURA 15.8.2 Superficie del ejemplo 1

En este caso, si $h(x, y, z) = z + x^2 - 1 = 0$ define el cilindro, la normal es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{2x\mathbf{i} + \mathbf{k}}{\sqrt{4x^2 + 1}}.$$

Por tanto,
$$\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\, dS.$$

Para evaluar la última integral de superficie usamos (2) de la sección 15.6:

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{-2xy - x}{\sqrt{4x^2 + 1}}\, dS &= \iint_R (-2xy - x)\, dA \\ &= \int_0^1 \int_{-2}^2 (-2xy - x)\, dy\, dx \\ &= \int_0^1 \Big[-xy^2 - xy \Big]_{-2}^2 dx \\ &= \int_0^1 (-4x)\, dx = -2. \end{aligned} \tag{7}$$



La integral de línea: La integral de línea es

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C xy\, dx + yz\, dy + xz\, dz.$$

Como C es suave por partes, escribimos $\oint_C = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}$.

Sobre C_1: $x = 1, z = 0, dx = 0, dz = 0$, y por ello

$$\int_{C_1} y(0) + y(0)\, dy + 0 = 0.$$

Sobre C_2: $y = 2, z = 1 - x^2, dy = 0, dz = -2x\, dx$, por lo que

$$\int_{C_2} 2x\, dx + 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\, dx) = \int_1^0 (2x - 2x^2 + 2x^4)\, dx = -\frac{11}{15}.$$

Sobre C_3: $x = 0, z = 1, dx = 0, dz = 0$, de modo que

$$\int_{C_3} 0 + y\, dy + 0 = \int_{-2}^2 y\, dy = 0.$$

Sobre C_4: $y = -2, z = 1 - x^2, dy = 0, dz = -2x\, dx$, por lo que

$$\int_{C_4} -2x\, dx - 2(1 - x^2)0 + x(1 - x^2)(-2x\, dx) = \int_0^1 (-2x - 2x^2 + 2x^4)\, dx = -\frac{19}{15}.$$

En consecuencia,

$$\oint_C xy\, dx + yz\, dy + xz\, dz = 0 - \frac{11}{15} + 0 - \frac{19}{15} = -2$$

lo cual concuerda con (7). ■

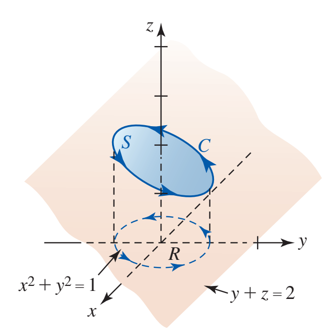


FIGURA 15.8.3 Curva C del ejemplo 2

EJEMPLO 2 Empleo del teorema de Stokes

Evalúe $\oint_C z\,dx + x\,dy + y\,dz$, donde C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $y + z = 2$. Oriente C en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observe desde arriba. Vea la FIGURA 15.8.3.

Solución Si $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$, entonces

$$\text{rot }\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

La orientación dada de C corresponde a una orientación hacia arriba de la superficie S. De tal manera, si $h(x, y, z) = y + z - 2 = 0$ define el plano, entonces la normal es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.$$

En consecuencia, de (2),

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \left[(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}\right)\right] dS$$

$$= \sqrt{2}\iint_S dS = \sqrt{2}\iint_R \sqrt{2}\,dA = 2\pi. \qquad ■$$

Advierta que si $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar, entonces, en vista de (5) de la sección 15.7, (2) implica que la circulación $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es cero. Inversamente, es posible demostrar que si la circulación es cero para toda curva cerrada simple, entonces $\mathbf{F}$ es el gradiente de una función escalar. En otras palabras, $\mathbf{F}$ es irrotacional si y sólo si $\mathbf{F} = \nabla\phi$, donde ϕ es el potencial para $\mathbf{F}$. Equivalentemente, esto produce la prueba para un campo vectorial conservativo dado en el teorema 15.7.1, es decir, $\mathbf{F}$ es un campo vectorial conservativo si y sólo si rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Interpretación física del rotacional En la sección 15.2 vimos que si $\mathbf{F}$ es un campo de velocidades de un fluido, entonces la circulación $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ de $\mathbf{F}$ alrededor de C es una medida de la cantidad por medio de la cual el fluido tiende a girar la curva C circulando alrededor de ella. La circulación de $\mathbf{F}$ se relaciona estrechamente a rot $\mathbf{F}$. Para ver esto, suponga que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto en el fluido y C_r es un pequeño círculo de radio r centrado en P_0. Vea la FIGURA 15.8.4. Entonces por el teorema de Stokes,

$$\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_r} (\text{rot }\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,dS. \tag{8}$$

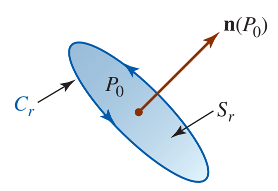


FIGURA 15.8.4 Círculo de radio r

Ahora, en todos los puntos $P(x, y, z)$ dentro del círculo pequeño C_r, si tomamos rot $\mathbf{F}(P) \approx$ rot $\mathbf{F}(P_0)$, entonces (8) produce la aproximación

$$\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \approx \iint_{S_r} (\text{rot }\mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0)\,dS$$

$$= (\text{rot }\mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0)\iint_{S_r} dS$$

$$= (\text{rot }\mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0)\,A_r, \tag{9}$$

donde A_r es el área πr^2 de la superficie circular S_r. Cuando dejamos $r \to 0$, la aproximación rot $\mathbf{F}(P) \approx$ rot $\mathbf{F}(P_0)$ se vuelve mejor y por ello (9) produce

$$(\text{rot }\mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0) = \lim_{r\to 0}\frac{1}{A_r}\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{10}$$

De tal modo, vemos que la componente normal de rot $\mathbf{F}$ es el valor límite del cociente entre la circulación de $\mathbf{F}$ y el área de la superficie circular. Para un valor pequeño pero fijo de r, tenemos

$$(\text{rot }\mathbf{F}(P_0))\cdot\mathbf{n}(P_0) \approx \frac{1}{A_r}\oint_{C_r} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}. \tag{11}$$

Entonces, en términos generales, rot **F** es la circulación de **F** por unidad de área. Si rot $\mathbf{F}(P_0) \neq \mathbf{0}$, entonces el lado izquierdo de (11) es un máximo cuando el círculo C_r se sitúa de manera que $\mathbf{n}(P_0)$ apunte en la misma dirección que rot $\mathbf{F}(P_0)$. En este caso, la circulación en el lado derecho de (11) también es un máximo. De tal modo, una rueda de paletas insertada en el fluido en P_0 rotará más rápido cuando su eje apunte en la dirección de rot $\mathbf{F}(P_0)$. Vea la FIGURA 15.8.5. Advierta, también, que la paleta no rotará si su eje es perpendicular a rot $\mathbf{F}(P_0)$.

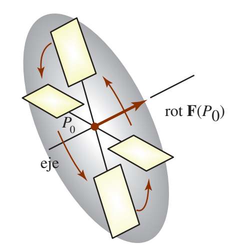


FIGURA 15.8.5 Rueda de paletas giratorias en un fluido



Stokes

Posdata: Un poco de historia **George G. Stokes** (1819-1903) fue un físico matemático irlandés. Al igual que George Green, Stokes fue catedrático en la Universidad de Cambridge. En 1854, Stokes planteó su teorema como un problema en el examen de un concurso para estudiantes de Cambridge. No se sabe si alguien resolvió el problema.

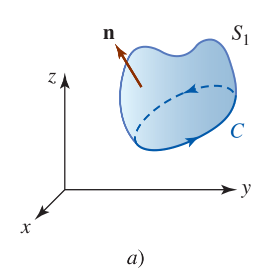


NOTAS DESDE EL AULA

El valor de la integral de superficie (2) está determinado exclusivamente por la integral alrededor de su frontera C. Esto básicamente significa que la forma de la superficie S es irrelevante. Suponiendo que las hipótesis del teorema 15.8.1 se satisfacen, entonces para dos superficies diferentes S_1 y S_2 con la misma orientación y con la misma frontera C, tenemos

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_1} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS = \iint_{S_2} (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS.$$

Vea la FIGURA 15.8.6 y los problemas 17 y 18 de los ejercicios 15.8.



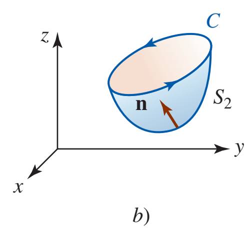


FIGURA 15.8.6 Dos superficies con la misma frontera C

Ejercicios 15.8

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1-4, verifique el teorema de Stokes para el campo vectorial dado. Suponga que la superficie S se orienta hacia arriba.

1. $\mathbf{F} = 5y\mathbf{i} - 5x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = 1$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$
2. $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = 16 - x^2 - y^2$ para $z \geq 0$
3. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $2x + y + 2z = 6$ en el primer octante.
4. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ para $z \geq 0$

En los problemas 5-12, emplee el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Suponga que C está orientada en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde arriba.

5. $\mathbf{F} = (2z + x)\mathbf{i} + (y - z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$; C es el triángulo con vértices (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)
6. $\mathbf{F} = z^2 y \cos xy\mathbf{i} + z^2 x(1 + \cos xy)\mathbf{j} + 2z \operatorname{sen} xy\mathbf{k}$; C es la frontera del plano $z = 1 - y$ que se ilustra en la FIGURA 15.8.7.

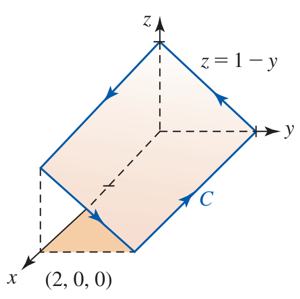


FIGURA 15.8.7 Curva del problema 6

7. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; C es la frontera dada en el problema 6.
8. $\mathbf{F} = (x + 2z)\mathbf{i} + (3x + y)\mathbf{j} + (2y - z)\mathbf{k}$; C es la curva de intersección del plano $x + 2y + z = 4$ con los planos de coordenadas.
9. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} - x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; C es la traza del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano $x + y + z = 1$ [*Sugerencia*: Emplee coordenadas polares.]
10. $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + (x + y^2)\mathbf{j} + xy^2z\mathbf{k}$; C es la frontera de la superficie que se muestra en la FIGURA 15.8.8

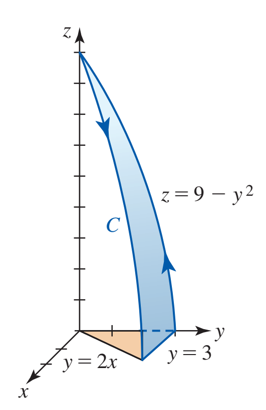


FIGURA 15.8.8 Curva del problema 10

11. $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^3y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$; C es la frontera del semielipsoide $z = \sqrt{4 - 4x^2 - y^2}$ en el plano $z = 0$

12. $\mathbf{F} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$; C es la curva de intersección del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que se muestran en la FIGURA 15.8.9

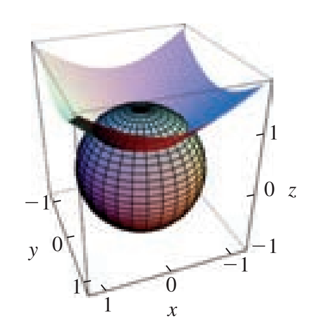


FIGURA 15.8.9 Curva del problema 12

En los problemas 13-16, emplee el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$. Suponga que la superficie S está orientada hacia arriba.

13. $\mathbf{F} = 6yz\mathbf{i} + 5x\mathbf{j} + yze^{x^2}\mathbf{k}$; S es la porción del paraboloide $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ para $0 \le z \le 4$

14. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + (y - x)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$; S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 25$ para $z \ge 0$

15. $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + 8x^3y\mathbf{j} + 3x^2y\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = x$ que yace dentro del cilindro rectangular definido por los planos $x = 0$, $y = 0$, $x = 2$, $y = 2$

16. $\mathbf{F} = 2xy^2z\mathbf{i} + 2x^2yz\mathbf{j} + (x^2y^2 - 6x)\mathbf{k}$; S es la porción del plano $z = y$ que yace dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

17. Emplee el teorema de Stokes para evaluar

$$\oint_C z^2 e^{x^2} dx + xy^2\, dy + \tan^{-1} y\, dz,$$

donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$ encontrando una superficie S con C como su frontera y tal que la orientación de C sea en dirección contraria al de las manecillas del reloj cuando se observe desde arriba.

18. Considere la integral de superficie $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS$, donde $\mathbf{F} = xyz\mathbf{k}$ y S es la porción del paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$ para $z \ge 0$ orientado hacia arriba.

a) Evalúe la integral de superficie mediante el método de la sección 15.6; esto es, no emplee el teorema de Stokes.

b) Evalúe la integral de superficie encontrando una superficie más simple que esté orientada hacia arriba y que tenga la misma frontera que el paraboloide.

c) Utilice el teorema de Stokes para verificar sus resultados del inciso *b*).

15.9 Teorema de la divergencia

Introducción Como se mencionó en la introducción de la sección 15.8, en esta sección vamos a examinar otra generalización del teorema de Green. Podría valer la pena repasar la primera forma vectorial del problema de Green en (1) de la sección 15.8. Esta generalización tridimensional se basa en una segunda interpretación vectorial del teorema que se presenta a continuación.

Forma vectorial del problema de Green Sea $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ un campo vectorial bidimensional y considere a $\mathbf{T} = (dx/ds)\mathbf{i} + (dy/ds)\mathbf{j}$ como una *tangente unitaria* a una curva plana cerrada simple C. En (1) de la sección 15.8 vimos que $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{T})\, ds$ puede evaluarse mediante una integral doble que implique a rot $\mathbf{F}$.

Similarmente, si $\mathbf{n} = (dy/ds)\mathbf{i} - (dx/ds)\mathbf{j}$ es una *normal unitaria* a C (verifique $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$), entonces $\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds$ puede expresarse en términos de una integral doble que implique a div $\mathbf{F}$. Del teorema de Green,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \oint_C P\, dy - Q\, dx = \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \left(-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\right] dA = \iint_R \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right] dA.$$

Esto es,

$$\oint_C (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, ds = \iint_R \text{div}\, \mathbf{F}\, dA. \tag{1}$$

Teorema de Green en espacio tridimensional El resultado en (1) es un caso especial del **teorema de la divergencia** o de **Gauss**. El siguiente teorema generaliza (1) en espacio tridimensional.

Teorema 15.9.1 Teorema de la divergencia

Suponga que D es una región acotada en el espacio tridimensional con una frontera suave por partes S que está orientada hacia arriba. Sea

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k}$$

un campo vectorial para el cual P, Q y R son continuas y tienen primeras derivadas parciales continuas en una región tridimensional que contiene a D. Entonces

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D (\text{div}\,\mathbf{F})\, dV, \tag{2}$$

donde $\mathbf{n}$ es una normal unitaria hacia fuera para S.

DEMOSTRACIÓN PARCIAL Probaremos (2) para la región especial D que se ilustra en la FIGURA 15.9.1 cuya superficie S consiste en tres partes

$$\begin{aligned} (\text{fondo})\ S_1&: \quad z = g_1(x, y), \quad (x, y) \text{ en } R \\ (\text{parte superior})\ S_2&: \quad z = g_2(x, y), \quad (x, y) \text{ en } R \\ (\text{lado})\ S_3&: \quad g_1(x, y) \le z \le g_2(x, y), \quad (x, y) \text{ sobre } C, \end{aligned}$$

donde R es la proyección de D sobre el plano xy y C es la frontera de R. Puesto que

$$\text{div}\,\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{y} \quad \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} = P(\mathbf{i}\cdot\mathbf{n}) + Q(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n}) + R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})$$

es posible escribir

$$\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iint_S P(\mathbf{i}\cdot\mathbf{n})\, dS + \iint_S Q(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})\, dS + \iint_S R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS$$

y

$$\iiint_D \text{div}\,\mathbf{F}\, dV = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dV + \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV + \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV.$$

Para probar (2) sólo necesitamos establecer que

$$\iint_S R(\mathbf{i}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial x}\, dV, \tag{3}$$

$$\iint_S Q(\mathbf{j}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial Q}{\partial y}\, dV, \tag{4}$$

y

$$\iint_S R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV. \tag{5}$$

En realidad, sólo probamos (5) debido a que las demostraciones de (3) y (4) se deducen de una manera similar. Ahora,

$$\iiint_D \frac{\partial R}{\partial z}\, dV = \iint_R \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\right] dA = \iint_R [R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))]\, dA. \tag{6}$$

A continuación escribimos

$$\iint_S R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iint_{S_1} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS + \iint_{S_2} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS + \iint_{S_3} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\, dS.$$

Sobre S_1: Puesto que la normal hacia fuera apunta hacia abajo, describimos la superficie como $h(x, y, z) = g_1(x, y) - z = 0$. De tal modo,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = \frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\right)^2}}.$$

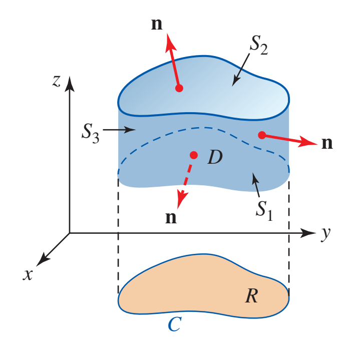


FIGURA 15.9.1 Superficie utilizada en la prueba del teorema 15.9.1

De la definición de dS tenemos entonces

$$\iint_{S_1} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\,dS = -\iint_R R(x, y, g_1(x, y))\,dA. \tag{7}$$

Sobre S_2: La normal hacia fuera apunta hacia arriba de modo que describimos la superficie esta vez como $h(x, y, z) = z - g_2(x, y) = 0$. Por tanto,

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{-\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\mathbf{i} - \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2}} \quad \text{por lo que} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial g_2}{\partial y}\right)^2}}.$$

Del último resultado encontramos

$$\iint_{S_2} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iint_R R(x, y, g_2(x, y))\,dA. \tag{8}$$

Sobre S_3: Como este lado es vertical, $\mathbf{k}$ es perpendicular a $\mathbf{n}$. Consecuentemente, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} = 0$ y

$$\iint_{S_3} R(\mathbf{k}\cdot\mathbf{n})\,dS = 0. \tag{9}$$

Finalmente, sumando (7), (8) y (9) obtenemos

$$\iint_R [R(x, y, g_2(x, y)) - R(x, y, g_1(x, y))]\,dA,$$

que es lo mismo que (6). ■

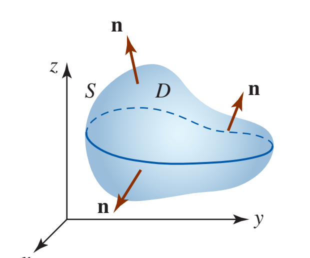


FIGURA 15.9.2 Región sin lado vertical

Aunque demostramos (2) para una región especial D que tiene un lado vertical, notamos que este tipo de región no se requiere en el teorema 15.9.1. Una región D sin lado vertical se ilustra en la FIGURA 15.9.2; una región acotada por una esfera o un elipsoide no tiene tampoco un lado vertical. El teorema de la divergencia también se cumple para una región D acotada entre dos superficies cerradas tal como las esferas concéntricas S_a y S_b que se muestran en la FIGURA 15.9.3; la superficie frontera S de D es la unión de S_a y S_b. En este caso, $\iint_S(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV$ se convierte en

$$\iint_{S_b}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS + \iint_{S_a}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV,$$

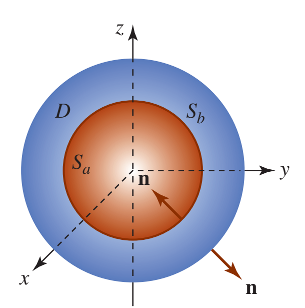


FIGURA 15.9.3 Esferas concéntricas

donde $\mathbf{n}$ apunta hacia fuera de D. En otras palabras, $\mathbf{n}$ apunta alejándose del origen sobre S_b, pero $\mathbf{n}$ apunta hacia el origen sobre S_a.

EJEMPLO 1 Verificación del teorema de la divergencia

Sea D una región cerrada acotada por el hemisferio $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$, $1 \le z \le 4$, y el plano $z = 1$. Verifique el teorema de la divergencia para el campo vectorial $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$.

Solución La región cerrada se muestra en la FIGURA 15.9.4.

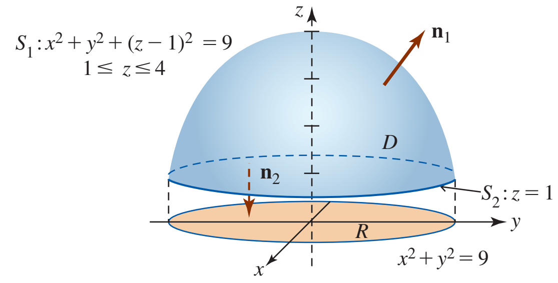


FIGURA 15.9.4 Superficie del ejemplo 1

La integral triple: Puesto que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}$, vemos que div $\mathbf{F} = 3$. En consecuencia,

$$\iiint_D \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iiint_D 3\, dV = 3\iiint_D dV = 3\left[\frac{2}{3}\pi 3^3\right] = 54\pi. \tag{10}$$

En el último cálculo, aprovechamos el hecho de que $\iiint_D dV$ produce el volumen del hemisferio.

La integral de superficie: Escribimos $\iint_S = \iint_{S_1} + \iint_{S_2}$, donde S_1 es el hemisferio y S_2 es el plano $z = 1$. Si S_1 es una superficie de nivel de $h(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1)^2$, entonces una normal unitaria que apunta hacia arriba es

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla h}{|\nabla h|} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - 1)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}} = \frac{x}{3}\mathbf{i} + \frac{y}{3}\mathbf{j} + \frac{z - 1}{3}\mathbf{k}.$$

Ahora,

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{(z - 1)^2}{3} = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + (z - 1)^2) = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3,$$

y por ello con la ayuda de coordenadas polares obtenemos

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS &= \iint_R 3\left(\frac{3}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}\, dA\right)\\ &= 9\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9 - r^2)^{-1/2} r\, dr\, d\theta = 54\pi.\end{aligned}$$

Sobre S_2, tomamos $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$ de modo que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -z + 1$. Pero, como $z = 1$, $\iint_{S_2}(-z + 1)\, dS = 0$. Por consiguiente, vemos que

$$\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = 54\pi + 0 = 54\pi$$

concuerda con (10). ■

EJEMPLO 2 Empleo del teorema de la divergencia

Evalúe $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, donde S es el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ y $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$.

Solución Vea la figura 15.6.13 y el problema 24 de los ejercicios 15.6. En lugar de evaluar seis integrales de superficie, aplicamos el teorema de la divergencia. Puesto que div $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = y + 2yz + 3z^2$, tenemos de (2),

$$\begin{aligned}\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS &= \iiint_D (y + 2yz + 3z^2)\, dV\\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dx\, dy\, dz\\ &= \int_0^1\int_0^1 (y + 2yz + 3z^2)\, dy\, dz\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^2 + y^2z + 3yz^2\right)\Big]_0^1 dz\\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z + 3z^2\right) dz = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z^2 + z^3\right)\Big]_0^1 = 2.\end{aligned}$$

■

Interpretación física de la divergencia En la sección 15.7 vimos que podríamos expresar la componente normal del rotacional de un campo vectorial **F** en un punto como un límite que incluyera la circulación de **F**. En vista de (2) es posible interpretar la divergencia de **F** en un punto como un límite que incluye el flujo de **F**. Recuerde de (7) de la sección 15.6 que el flujo de un campo de

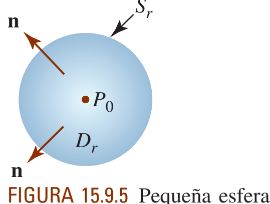


FIGURA 15.9.5 Pequeña esfera centrada en P_0

velocidades **F** de un fluido es la razón de cambio del flujo de fluido, esto es, el volumen de fluido que fluye a través de una superficie por unidad de tiempo. En la sección 15.7 vimos que la divergencia de **F** es el flujo por unidad de volumen. Para reforzar esta última idea, vamos a suponer que $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es cualquier punto en el fluido y S_r es una pequeña esfera de radio r centrada en P_0. Vea la FIGURA 15.9.5. Si D_r es la esfera S_r y su interior, entonces el teorema de la divergencia produce

$$\iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS = \iiint_{D_r} \text{div}\, \mathbf{F}\, dV. \tag{11}$$

Si tomamos la aproximación div $\mathbf{F}(P) \approx$ div $\mathbf{F}(P_0)$ en cualquier punto $P(x, y, z)$ dentro de la pequeña esfera, entonces (11) produce

$$\begin{aligned} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS &\approx \iiint_{D_r} \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\, dV \\ &= \text{div}\, \mathbf{F}(P_0) \iiint_{D_r} dV \\ &= \text{div}\, \mathbf{F}(P_0)\, V_r, \end{aligned} \tag{12}$$

donde V_r es el volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$ de la región esférica D_r. Dejando que $r \to 0$, vemos de (12) que la divergencia de **F** es el valor límite del cociente del flujo de **F** y el volumen de la región esférica:

$$\text{div}\, \mathbf{F}(P_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{V_r} \iint_{S_r} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{13}$$

En consecuencia, la divergencia de **F** es el flujo por unidad de volumen.

El teorema de la divergencia es extremadamente útil en la derivación de algunas de las famosas ecuaciones en electricidad y magnetismo, así como en hidrodinámica. En la discusión que sigue consideraremos un ejemplo del estudio de fluidos.

Ecuación de continuidad Al final de la sección 15.7 mencionamos que una interpretación de div **F** es una medida de la razón de cambio de la densidad de un fluido en un punto. Para ver por qué esto es así, supondremos que **F** es un campo de velocidades de un fluido y que $\rho(x, y, z, t)$ es la densidad de un fluido en el punto $P(x, y, z)$ en el tiempo t. Sea D la región cerrada consistente en una esfera S y su interior. Sabemos de la sección 14.7 que la masa total m de un fluido en D está dada por

$$m = \iiint_D \rho(x, y, z, t)\, dV.$$

La razón a la cual la masa aumenta en D está dada por

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_D \rho(x, y, z, t)\, dV = \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV. \tag{14}$$

Ahora de la figura 15.6.8b) vemos que el volumen del fluido que fluye a través de un elemento de área de superficie ΔS por unidad de tiempo se aproxima mediante

$$(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, \Delta S.$$

La masa del fluido que fluye a través de un elemento de área de superficie ΔS por unidad de tiempo es entonces

$$(\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, \Delta S.$$

Si suponemos que el cambio en la masa en D se debe sólo al flujo que entra y sale de D, entonces el *volumen del fluido* que fluye hacia fuera de D por unidad de tiempo está dado por (7) de la sección 15.6, $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$, en tanto que la *masa del fluido* que fluye hacia fuera de D por unidad es $\iint_S (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS$. En consecuencia, una expresión alterna para la razón a la cual la masa aumenta en D es

$$-\iint_S (\rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\, dS. \tag{15}$$

Por el teorema de la divergencia, (15) es lo mismo que

$$-\iiint_D \text{div}\,(\rho\mathbf{F})\,dV. \tag{16}$$

Igualando (14) y (16) se produce

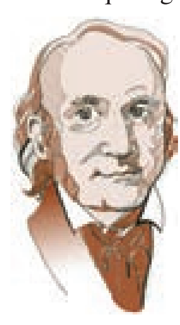
$$\iiint_D \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV = -\iiint_D \text{div}(\rho\mathbf{F})\,dV \qquad \text{o} \qquad \iiint_D \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{F})\right) dV = 0.$$

Puesto que este último resultado se cumple para toda esfera, obtenemos la **ecuación de continuidad** para el fluido que fluye:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\mathbf{F}) = 0. \tag{17}$$

En la página 849 establecimos que si div $\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$, entonces un fluido es incompresible. Este hecho se sigue de inmediato de (17). Si un fluido es incompresible (como el agua), entonces ρ es constante, por lo que, en consecuencia, $\nabla \cdot (\rho\mathbf{F}) = \rho(\nabla \cdot \mathbf{F})$. Pero además, $\partial\rho/\partial t = 0$, y por ello (17) implica $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$.

Posdata: Un poco de historia **Johann Karl Friedrich Gauss** (1777-1855) fue el primero de una nueva variedad de matemáticos precisos y exigentes (los "rigurosos"). Hemos visto en bosquejos biográficos anteriores que Augustin Louis Cauchy y Karl Wilhelm Weierstrass fueron dos matemáticos que siguieron sus pasos. Karl Friedrich Gauss, el único hijo de un pobre jardinero, fue un niño prodigio en matemáticas. Aún no contaba con tres años cuando corrigió el cálculo de la nómina de su padre. Siendo adulto, Gauss a menudo remarcó que él podría calcular o "contar" antes de hablar. Como estudiante universitario Gauss se atormentaba entre dos amores: la filología y las matemáticas. Aunque dominaba con facilidad otras lenguas, fue inspirado por algunos logros matemáticos originales como adolescente y estimulado por el matemático Wolfgang Bolyai, por lo que la elección entre las lenguas y las matemáticas no fue tan difícil. A la edad de 20 años, Gauss se consolidó en una carrera de matemáticas. A la edad de 22, había completado un libro sobre teoría de números, *Disquisitiones Arithmeticae.* Publicado en 1801, este texto se reconoció como una pieza maestra e incluso en la actualidad sigue siendo un clásico en este campo. La disertación doctoral de Gauss de 1799 también es un documento memorable. Empleando la teoría de funciones de una variable compleja, fue el primero en demostrar el llamado teorema fundamental del álgebra: toda ecuación polinomial tiene al menos una raíz.



Gauss

Si bien Gauss fue en verdad reconocido y respetado como un matemático sobresaliente durante su vida, el gran alcance de su genio no se reconoció hasta la publicación de su diario científico en 1898, 44 años después de su muerte. A pesar del disgusto de muchos matemáticos del siglo XIX, el diario reveló que Gauss había previsto, a veces por décadas, muchos de sus descubrimientos o, quizá más precisamente, redescubrimientos. Fue del todo ajeno a la fama; sus investigaciones matemáticas muchas veces las llevó a cabo, como un niño que juega en la playa, simplemente por el placer y la autosatisfacción y no por la instrucción que podrían haber obtenido otros mediante la publicación.

De cualquier lista de "los más grandes matemáticos que han vivido", sin duda Karl Friedrich Gauss debe estar cerca de la cima. Por su profundo impacto en muchas ramas de las matemáticas, a Gauss se le refiere a menudo como "el príncipe de las matemáticas".

$\iint_S$ NOTAS DESDE EL AULA

¿Por qué algunos objetos flotan en el agua y otros se hunden? La respuesta proviene del **principio de Arquímedes**, el cual señala: cuando un objeto se sumerge en un fluido, el fluido ejerce una fuerza hacia arriba sobre él, llamada **fuerza de flotación**, con una magnitud que es igual al peso del fluido desplazado. De tal manera, un corcho tiene una flotación o flotamiento positivo puesto que el peso del corcho es menor que la magnitud de la fuerza de flotación. Un submarino alcanzará flotación negativa y se sumergirá llenando sus tanques de lastre con agua, haciendo que de esa manera su peso sea mayor que la magnitud de la fuerza de flotación ejercida sobre él. Vea la FIGURA 15.9.6. Se le pide que demuestre ese famoso teorema utilizando el teorema de la divergencia en el problema 22 de los ejercicios 15.9.

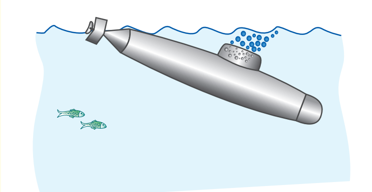


FIGURA 15.9.6 Un submarino se sumerge cuando la magnitud de la fuerza de flotación es menor que la magnitud de su peso

Ejercicios 15.9 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, verifique el teorema de la divergencia para el campo vectorial dado.

1. $\mathbf{F} = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$; D la región acotada por el cubo unitario definido por $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$
2. $\mathbf{F} = 6xy\mathbf{i} + 4yz\mathbf{j} + xe^{-y}\mathbf{k}$; D la región acotada por los tres planos de coordenadas y el plano $x + y + z = 1$

En los problemas 3-14, emplee el teorema de la divergencia para determinar el flujo hacia fuera $\iint_S (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS$ del campo vectorial dado $\mathbf{F}$.

3. $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; D la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
4. $\mathbf{F} = 4x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k}$; D la región acotada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
5. $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + xz^3\mathbf{j} + (z-1)^2\mathbf{k}$; D la región acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 16$ y los planos $z = 1, z = 5$
6. $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 4z^3\mathbf{k}$; D la región acotada por el paralelepípedo definido por $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3$
7. $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$; D la región acotada en el interior por $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 = 3, z = 0$
8. $\mathbf{F} = (x^2 + \text{sen}\, y)\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + xy^3\mathbf{k}$; D la región acotada por $y = x^2, z = 9 - y, z = 0$
9. $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)$; D la región acotada por las esferas concéntricas $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2, b > a$
10. $\mathbf{F} = 2yz\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}$; D la región acotada por el elipsoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$
11. $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 5y^2\mathbf{j} - z^2\mathbf{k}$; D la región acotada por $z = y$, $z = 4 - y, z = 2 - \frac{1}{2}x^2, x = 0, z = 0$. Vea la FIGURA 15.9.7.

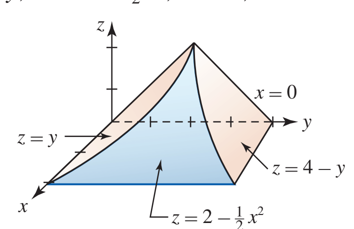


FIGURA 15.9.7 Región D del problema 11

12. $\mathbf{F} = 15x^2y\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + y^4\mathbf{k}$; D la región acotada por $x + y = 2, z = x + y, z = 3, x = 0, y = 0$
13. $\mathbf{F} = 3x^2y^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 6xy^2z\mathbf{k}$; D la región acotada por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 2y$
14. $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + 6(\text{sen}\, x)\mathbf{k}$; D la región acotada por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y los planos $z = 2, z = 4$

En los problemas 15 y 16, suponga que S forma la frontera de una región cerrada y acotada D.

15. Si $\mathbf{a}$ es un vector constante, demuestre que $\iint_S (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\, dS = 0$.
16. Si $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ y P, Q y R tiene segundas derivadas parciales continuas, demuestre que $\iint_S (\text{rot}\, \mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\, dS = 0$.

Aplicaciones

17. El campo eléctrico en un punto $P(x, y, z)$ debido a una carga puntual q localizada en el origen está dado por el campo inverso al cuadrado $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$, donde $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
   a) Suponga que S es una superficie cerrada, S_a es una esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que yace por completo dentro de S, y D es la región acotada entre S y S_a. Vea la FIGURA 15.9.8. Demuestre que el flujo hacia fuera de $\mathbf{E}$ para la región D es cero.
   b) Utilice el resultado del inciso *a*) para probar la **ley de Gauss**:
   $$\iint_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\, dS = 4\pi q.$$
   Esto es, el flujo hacia fuera del campo eléctrico $\mathbf{E}$ a través de *cualquier* superficie cerrada (para el cual se aplica el teorema de la divergencia) que contiene al origen es $4\pi q$.

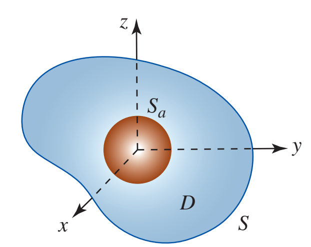


FIGURA 15.9.8 Superficies del problema 17

18. Suponga que hay una distribución continua de carga a través de una región cerrada y acotada D encerrada por una superficie S. Entonces, la extensión natural de la ley de Gauss está dada por
   $$\iint_S (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\, dS = \iiint_D 4\pi\rho\, dV,$$
   donde $\rho(x, y, z)$ es la densidad de carga o carga por unidad de volumen.
   a) Proceda como en la derivación de la ecuación de continuidad (17) para demostrar que div $\mathbf{E} = 4\pi q$.
   b) Dado que $\mathbf{E}$ es un campo vectorial irrotacional, demuestre que la función potencial ϕ para $\mathbf{E}$ satisface la ecuación de Poissons $\nabla^2\phi = 4\pi\rho$, donde $\nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi$.

Piense en ello

En los problemas 19 y 20, suponga que f y g son funciones escalares con segundas derivadas parciales continuas. Emplee el teorema de la divergencia para establecer las **identidades de Green**. Suponga que S forma la frontera de una región cerrada y acotada D.

19. $$\iint_S (f\nabla g)\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_D (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\, dV$$
20. $$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dV$$

21. Si f es una función escalar con primeras derivadas parciales continuas y S forma la frontera de una región cerrada y acotada D, entonces demuestre que

$$\iint_S f\,\mathbf{n}\,dS = \iiint_D \nabla f\,dV.$$

[*Sugerencia*: Emplee (2) sobre $f\mathbf{a}$, donde $\mathbf{a}$ es un vector constante, y el problema 21 de los ejercicios 15.7.]

22. La fuerza de flotación sobre un objeto flotante es $\mathbf{B} = -\iint_S p\,\mathbf{n}\,dS$, donde p es la presión de fluido. La presión p se relaciona con la densidad del fluido $\rho(x, y, z)$ mediante la ley de la hidrostática: $\nabla p = \rho(x, y, z)\mathbf{g}$, donde $\mathbf{g}$ es la aceleración constante debida a la gravedad. Si el peso del objeto es $\mathbf{W} = m\mathbf{g}$, utilice el resultado del problema 21 para probar el principio de Arquímedes, $\mathbf{B} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$. Vea la FIGURA 15.9.9.

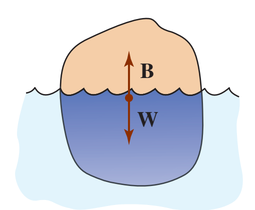


FIGURA 15.9.9 Objeto flotante del problema 22

Revisión del capítulo 15

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-47.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-12, conteste verdadero (V) o falso (F). Donde sea apropiado, suponga la continuidad de P, Q y de sus primeras derivadas parciales.

1. La integral $\int_C (x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy$, donde C está dada por $y = x^3$ de (0, 0) a (1, 1) tiene el mismo valor sobre la curva $y = x^6$ de (0, 0) a (1, 1). _____
2. El valor de la integral $\int_C 2xy\,dx - x^2\,dy$ entre dos puntos A y B depende de la trayectoria C. _____
3. Si C_1 y C_2 son dos curvas suaves tales que $\int_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \int_{C_2} P\,dx + Q\,dy$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____
4. Si el trabajo $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ depende de la curva C entonces $\mathbf{F}$ es no conservativo. _____
5. Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales y $\partial P/\partial x = \partial Q/\partial y$, entonces $\int_C P\,dx + Q\,dy$ es independiente de la trayectoria. _____
6. En un campo de fuerza conservativo $\mathbf{F}$, el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ alrededor de una curva cerrada simple es cero. _____
7. Suponiendo continuidad de todas las derivadas parciales, $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. _____
8. La integral de superficie de la componente normal del rotacional de un campo vectorial conservativo $\mathbf{F}$ sobre una superficie $\mathbf{S}$ es igual a cero. _____
9. El trabajo realizado por una fuerza $\mathbf{F}$ a lo largo de una curva C se debe por completo a la componente tangencial de $\mathbf{F}$. _____
10. Para un campo vectorial bidimensional $\mathbf{F}$ en el plano $z = 0$, el teorema de Stokes es lo mismo que el teorema de Green. _____
11. Si $\mathbf{F}$ es un campo de fuerza conservativo, entonces la suma de las energías potencial y cinética de un objeto es constante. _____
12. Si $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria C en una región apropiada R, entonces $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ es el gradiente de alguna función ϕ. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-10, llene los espacios en blanco.

1. Si $\phi = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ es una función potencial para un campo de fuerza conservativo $\mathbf{F}$, entonces $\mathbf{F} =$ _______.
2. Si $\mathbf{F} = f(x)\mathbf{i} + g(y)\mathbf{j} + h(z)\mathbf{k}$, entonces rot $\mathbf{F} =$ _______.

En los problemas 3-6, $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j} + 2xyz\mathbf{k}$.

3. $\nabla\cdot\mathbf{F} =$ _______
4. $\nabla\times\mathbf{F} =$ _______
5. $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) =$ _______
6. $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) =$ _______

7. Si C es la elipse $2(x - 10)^2 + 9(y + 13)^2 = 3$, entonces $\oint_C (y - 7e^{x^3})\,dx + (x + \ln\sqrt{y})\,dy$ = ________.

8. Si **F** es el campo de velocidades de un fluido para el cual rot $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces **F** se dice que es ________.

9. Una ecuación de un plano tangente a la superficie $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + 2\sqrt{uv}\,\mathbf{k}$ en $u = 1$, $v = 4$ es ________.

10. Un bastidor sobre la superficie $\mathbf{r}(u, v) = (4u + v)\mathbf{i} + (u + 2v)\mathbf{j} + (u + v)\mathbf{k}$ correspondiente a $u = 2$ tiene las ecuaciones paramétricas ________.

C. Ejercicios

1. Evalúe $\int_C \frac{z^2}{x^2 + y^2}\,ds$, donde C está dada por $x = \cos 2t$, $y = \operatorname{sen} 2t$, $z = 2t$, $\pi \le t \le 2\pi$.

2. Evalúe $\int_C (xy + 4x)\,ds$, donde C está dada por $2x + y = 2$ de $(1, 0)$ a $(0, 2)$.

3. Evalúe $\int_C 3x^2y^2\,dx + (2x^3y - 3y^2)\,dy$, donde C está dada por $y = 5x^4 + 7x^2 - 14x$ de $(0, 0)$ a $(1, -2)$.

4. Evalúe $\oint_C (x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, donde C es el círculo $x^2 + y^2 = 9$.

5. Evalúe $\int_C y \operatorname{sen} \pi z\,dx + x^2e^y\,dy + 3xyz\,dz$, donde C está dada por $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ de $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$.

6. Si $\mathbf{F} = 4y\mathbf{i} + 6x\mathbf{j}$ y C está dada por $x^2 + y^2 = 1$, evalúe $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ de dos maneras diferentes.

7. Encuentre el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + y \operatorname{sen} x\mathbf{j}$ actuando a lo largo de los segmentos de recta de $(0, 0)$ a $(\pi/2, 0)$ y de $(\pi/2, 0)$ a $(\pi/2, \pi)$.

8. Encuentre el trabajo realizado por $\mathbf{F} = \frac{2}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{1}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ de $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a $\left(1, \sqrt{3}\right)$ actuando sobre la trayectoria que se muestra en la FIGURA 15.R.1.

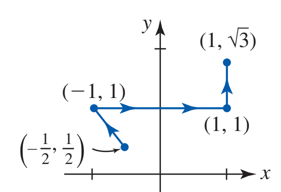


FIGURA 15.R.1 Curva C del problema 8

En los problemas 9 y 10, demuestre que la integral dada es independiente de la trayectoria. Evalúe.

9. $\displaystyle\int_{(1, 1, 0)}^{(1, 1, \pi)} 2xy\,dx + (x^2 + 2yz)\,dy + (y^2 + 4)\,dz$

10. $\displaystyle\int_{(0, 0, 1)}^{(3, 2, 0)} (2x + 2ze^{2x})\,dx + (2y - 1)\,dy + e^{2x}\,dz$

11. Evalúe $\oint_C -4y\,dx + 8x\,dy$, donde $C = C_1 \cup C_2$ es la frontera de la región R que se muestra en la FIGURA 15.R.2.

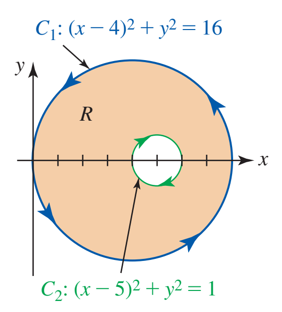


FIGURA 15.R.2 Curva C del problema 11

12. Sea C una curva cerrada simple suave por partes. Demuestre que

$$\oint_C \frac{y-1}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,dx + \frac{1-x}{(x-1)^2+(y-1)^2}\,dy = \begin{cases} -2\pi, & \text{si } (1,1) \text{ está dentro de } C \\ 0, & \text{si } (1,1) \text{ está fuera de } C. \end{cases}$$

13. Evalúe $\iint_S (z/xy)\,dS$, donde S es la porción del cilindro $z = x^2$ en el primer octante que está acotada por $y = 1, y = 3, z = 1, z = 4$.

14. Si $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, determine el flujo de $\mathbf{F}$ a través del cuadrado definido por $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1, z = 2$.

15. Sea la superficie S la porción del cilindro $y = 2 - e^{-x}$ cuya proyección sobre el plano xz es una región rectangular R definida por $0 \le x \le 3, 0 \le z \le 2$. Vea la FIGURA 15.R.3*a*). Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = 4\mathbf{i} + (2-y)\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ a través de la superficie si S está orientada alejándose del plano xz.

16. Vuelva a trabajar el problema 15 utilizando la región R en el plano yz que corresponde a $0 \le x \le 3, 0 \le z \le 2$. Vea la figura 15.R.3*b*).

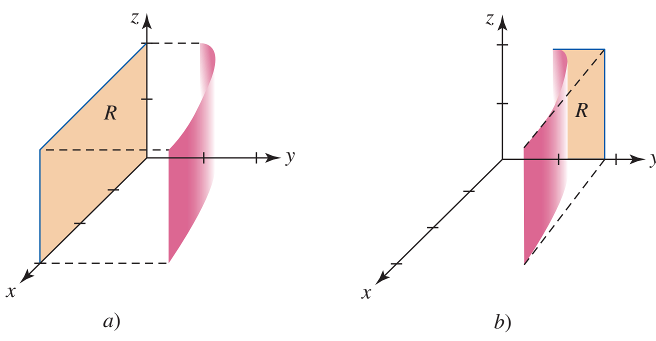


FIGURA 15.R.3 Superficies de los problemas 15 y 16

17. Si $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$, donde c es constante y $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, encuentre el flujo de $\mathbf{F}$ a través de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

18. Explique por qué el teorema de la divergencia no es aplicable en el problema 17.

19. Encuentre el flujo de $\mathbf{F} = c\nabla(1/r)$, donde c es constante y $r = |\mathbf{r}|$, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a través de cualquier superficie S que forma la frontera de una región acotada cerrada del espacio que no contiene al origen.

20. Si $\mathbf{F} = 6x\mathbf{i} + 7z\mathbf{j} + 8y\mathbf{k}$, use el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S (\text{rot } \mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, donde S es la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

21. Emplee el teorema de Stokes para evaluar $\oint_C -2y\,dx + 3x\,dy + 10z\,dz$, donde C es el círculo $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25, z = 3$.

22. Determine el trabajo $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado por la fuerza $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ alrededor de la curva C que es formada por la intersección del plano $z = 2 - y$ y la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$.

23. Si $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, use el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, donde S es la superficie de la región acotada por $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1$.

24. Repita el problema 23 para $\mathbf{F} = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j} + \frac{1}{3}z^3\mathbf{k}$.

25. Si $\mathbf{F} = (x^2 - e^y \tan^{-1} z)\mathbf{i} + (x+y)^2\mathbf{j} - (2yz + x^{10})\mathbf{k}$, use el teorema de la divergencia para evaluar $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$, donde S es la superficie de la región en el primer octante acotado por $z = 1 - x^2, z = 0, z = 2 - y, y = 0$.

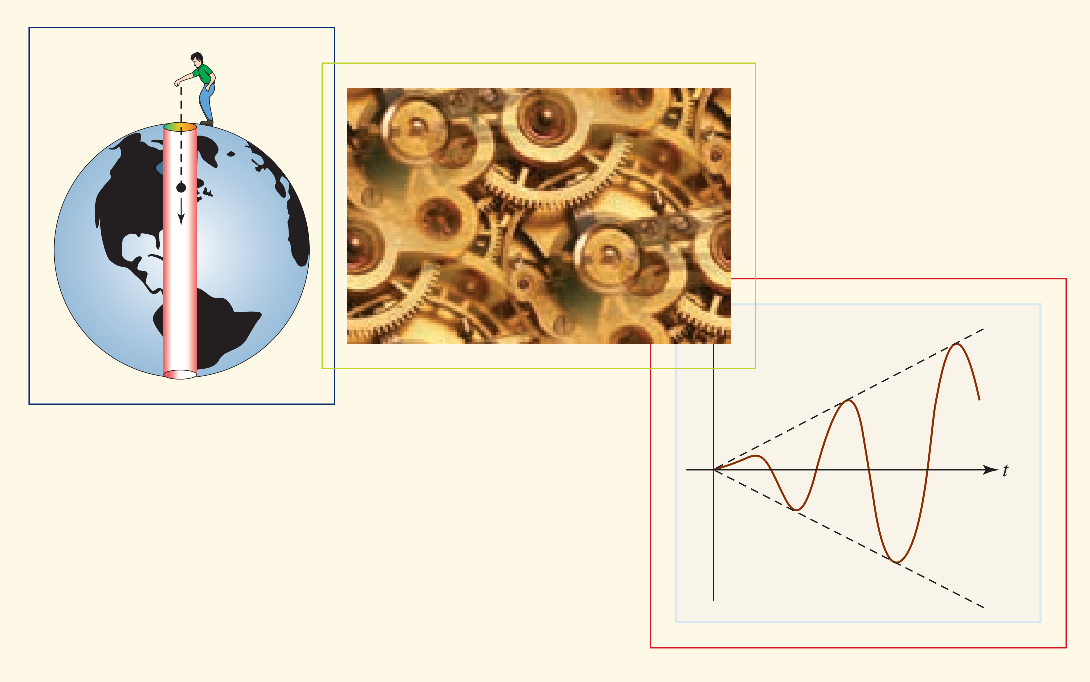
26. Suponga que $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z^2 + 1)\mathbf{k}$ y S es la superficie de la región acotada por $x^2 + y^2 = a^2, z = 0, z = c$. Evalúe $\iint_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n})\,dS$ sin la ayuda del teorema de la divergencia. [*Sugerencia*: El área de la superficie lateral del cilindro es $2\pi ac$.]

En los problemas 27-30, elimine los parámetros en el conjunto de ecuaciones paramétricas y obtenga una ecuación en x, y, y z. Identifique la superficie.

27. $x = u \cosh v,\ \ y = u \operatorname{senh} v,\ \ z = u^2$ **28.** $x = u \cos v,\ \ y = u \operatorname{sen} v,\ \ z = u^2$

29. $\mathbf{r}(u, v) = \cos u\mathbf{i} + \cos^2 u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$. **30.** $\mathbf{r}(u, v) = \cos u \cosh v\mathbf{i} + \operatorname{sen} u \cosh v\mathbf{j} + \operatorname{senh} v\mathbf{k}$

Ecuaciones diferenciales de orden superior



En este capítulo En el capítulo 8 presentamos dos tipos importantes de ecuaciones diferenciales de primer orden: separables y lineales. También analizamos cómo las ecuaciones diferenciales de primer orden podrían servir de modelos matemáticos para diversos fenómenos físicos como el crecimiento poblacional, el decaimiento radiactivo y el enfriamiento de un cuerpo. Ahora, al retomar la discusión, aunque breve, enfocaremos nuestra atención en una importante clase de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Veremos que un modelo matemático para los desplazamientos de una masa en una cuerda vibratoria es, salvo por la terminología, lo mismo que un modelo para la corriente en un circuito en serie que contiene un inductor, un resistor y un capacitor.

16.1 Ecuaciones exactas de primer orden

Introducción La noción de una ecuación diferencial de primer orden la introdujimos en el capítulo 8. Uno de los problemas básicos en el estudio de ecuaciones diferenciales es: ¿cómo resolverlas? En las secciones 8.1 y 8.2 resolvimos ecuaciones diferenciales separables y lineales de primer orden. Luego de un breve repaso de estos dos tipos de ecuaciones, examinamos otra ecuación diferencial de primer orden llamada **ecuación exacta**. Puesto que el método de solución para una ecuación diferencial exacta utiliza la diferencial de una función de dos variables, se recomienda un repaso de la sección 13.4.

Ecuaciones diferenciales separables Recuerde que la ecuación diferencial de primer orden $y' = F(x, y)$ es **separable** si la función $F(x, y)$ tiene la forma $F(x, y) = g(x)f(y)$. De tal modo, $y' = xy/(x^2 + 1)$ es separable, porque podemos escribir

$$F(x, y) = \frac{xy}{x^2 + 1} = \frac{x}{x^2 + 1} \cdot y.$$

De igual manera, $y' = xye^{x^2+y^2}$ es separable porque es posible escribirla como $y' = xe^{x^2} \cdot ye^{y^2}$. Para resolver una ecuación diferencial separable, reescribimos la ecuación $dy/dx = g(x)f(y)$ en forma diferencial

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\, dx,$$

y luego integramos ambos lados de la ecuación.

Ecuaciones diferenciales lineales Una ecuación diferencial de primer orden **lineal** es aquella que puede ponerse en la forma estándar $y' + P(x)y = f(x)$. Para resolver esta ecuación multiplicamos ambos lados por el **factor integrante** $e^{\int P(x)\, dx}$. Esto produce

$$e^{\int P(x)\, dx} y' + e^{\int P(x)\, dx} P(x)y = e^{\int P(x)\, dx} f(x)$$

o

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)\, dx} y\right] = e^{\int P(x)\, dx} f(x). \tag{1}$$

Al integrar ambos lados, tenemos

$$e^{\int P(x)\, dx} y = \int e^{\int P(x)\, dx} f(x)\, dx \qquad \text{así que} \qquad y = e^{-\int P(x)\, dx} \int e^{\int P(x)\, dx} f(x)\, dx.$$

Éste es uno de los casos raros en que hay una fórmula para la solución de miembros de una gran clase de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, *usted no debe memorizar esta fórmula.* Más bien, debe encontrar el factor integrante y después utilizar la ecuación en (1) para resolver la ecuación diferencial.

Una definición Dirigimos ahora nuestra atención a una clase de ecuaciones diferenciales de primer orden que se llaman **exactas**. Si bien la discusión siguiente es suficiente, las principales técnicas para reconocer y resolver una ecuación exacta ya se han cubierto en la sección 15.3.

Además de 13.4, se le sugiere repasar las secciones 14.2, 15.2 y 15.3.

La **diferencial** (también llamada **diferencial total**) de una función $f(x, y)$ es

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy. \tag{2}$$

Considere ahora la ecuación diferencial simple

$$y\, dx + x\, dy = 0. \tag{3}$$

Esta ecuación es tanto separable como lineal, pero puede resolverse de una manera alterna al darse cuenta de que el lado izquierdo es la diferencial de $f(x, y) = xy$; esto es, $y\, dx + x\, dy = d(xy)$. La ecuación diferencial en (3) se convierte entonces en $d(xy) = 0$, e integrando ambos lados de inmediato se produce la solución $xy = C$. En general, queremos ser capaces de reconocer cuándo una forma diferencial $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy$ es la diferencial total de una función $f(x, y)$.

Definición 16.1.1 Ecuación diferencial exacta

La ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es **exacta** en una región rectangular R del plano xy si existe una función $f(x, y)$ tal que

$$df = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy.$$

De (2) vemos que una ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es exacta si es la misma que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0$$

para alguna función f; esto es, si $M(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $N(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ para alguna función f.

EJEMPLO 1 Diferencial exacta

La ecuación diferencial $x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy = 0$ es exacta porque, cuando $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3y^3$, tenemos $df = x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy$. ■

En el ejemplo 1, note que $M = x^2y^3$, $N = x^3y^2$, por lo que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

El siguiente teorema muestra que esto no es una coincidencia.

Teorema 16.1.1 Criterio para una ecuación diferencial exacta

Considere que $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas y que tienen derivadas parciales continuas en una región rectangular R del plano xy. Entonces una condición necesaria y suficiente para que

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{4}$$

sea una ecuación diferencial exacta es

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{5}$$

Demostración de necesidad Necesitamos mostrar que si (4) es exacta, entonces $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Por la definición de una ecuación diferencial exacta, existe una función f tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Por tanto, ya que las primeras parciales de M y N son continuas,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$ ■

La parte de suficiencia del teorema 16.1.1 consiste en mostrar que existe una función f para la cual $\partial f/\partial x = M(x, y)$ y $\partial f/\partial y = N(x, y)$ siempre que se cumpla (5). La construcción de f en realidad refleja el procedimiento básico para resolver ecuaciones diferenciales exactas.

◀ Advierta la similitud entre las nociones de ecuaciones diferenciales exactas y campos vectoriales conservativos, discutidos en la sección 15.3.

EJEMPLO 2 Solución de una ecuación diferencial exacta

Resuelva $2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$.

Solución Primero mostramos que la ecuación es exacta. Identificando $M(x, y) = 2xy$ y $N(x, y) = x^2 - 1$, tenemos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

lo que verifica que la ecuación diferencial es exacta. En consecuencia, existe una función $f(x, y)$ tal que

$$M(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad \text{y} \qquad N(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

El procedimiento utilizado aquí para determinar la función f es el mismo que se usó en la determinación de la función potencial ϕ de un campo vectorial conservativo. Vea el ejemplo 6 en la sección 15.3.

Empezando con la suposición de que $\partial f/\partial x = M(x, y)$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \qquad \text{así que} \qquad f(x, y) = \int 2xy\, dx.$$

Empleando integración parcial, como se discutió en la sección 14.2, obtenemos $f(x, y) = x^2y + g(y)$. Al usar esta forma para f, se encuentra que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = N(x, y) = x^2 - 1,$$

por lo que $\qquad g'(y) = -1 \qquad \text{y} \qquad g(y) = -y.$

En consecuencia, $f(x, y) = x^2y - y$, y una familia de soluciones es $f(x, y) = C$ o

$$x^2y - y = C.$$

■

EJEMPLO 3 Un problema de valor inicial

Resuelva $y(1 - x^2)y' = xy^2 - \cos x \operatorname{sen} x$ sujeta a la condición inicial $y(0) = 2$.

Solución Al escribir la ecuación diferencial en la forma

$$(\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)\, dx + y(1 - x^2)\, dy = 0,$$

identificamos $M = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2$ y $N = y(1 - x^2)$. La ecuación es exacta porque

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2xy = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Ahora, empezando con $\partial f/\partial y = N(x, y)$, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = y(1 - x^2) \qquad \leftarrow \text{aquí use integración parcial}$$

$$f(x, y) = \tfrac{1}{2}y^2(1 - x^2) + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -xy^2 + h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x - xy^2.$$

La última ecuación indica que $h'(x) = \cos x \operatorname{sen} x$, por lo que integramos para encontrar

$$h(x) = \int \cos x \operatorname{sen} x\, dx = -\int (\cos x)(-\operatorname{sen} x\, dx) = -\frac{1}{2}\cos^2 x.$$

De tal modo, la solución de la ecuación diferencial es

$$\tfrac{1}{2}y^2(1 - x^2) - \tfrac{1}{2}\cos^2 x = C_1 \qquad \text{o} \qquad y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = C,$$

donde hemos sustituido $2C_1$ con C. La condición inicial $y = 2$ cuando $x = 0$ exige que $4(1) - \cos^2(0) = C$ y $C = 3$. Una solución del problema es entonces

$$y^2(1 - x^2) - \cos^2 x = 3.$$

■

Desde luego, no toda ecuación diferencial de primer orden en la forma $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ es una ecuación exacta. Por ejemplo,

$$xy\, dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\, dy = 0$$

no es exacta. Con las identificaciones $M = xy$ y $N = 2x^2 + 3y^2 - 20$ vemos que $\partial M/\partial y = x$ y $\partial N/\partial x = 4x$. Se sigue del teorema 16.1.1 que la ecuación diferencial no es exacta debido a que $\partial M/\partial y \neq \partial N/\partial x$. Vea el problema 29 de los ejercicios 16.1.

$\frac{dy}{dx}$ **NOTAS DESDE EL AULA**

En el ejemplo 2 encontramos la función $f(x, y)$ integrando primero $M(x, y)$ con respecto a x. En el ejemplo 3 empezamos integrando $N(x, y)$ con respecto a y. Cuando encuentre una solución de una ecuación diferencial exacta, tiene la libertad de empezar de cualquier manera; al final habrá poca diferencia. Por ejemplo, en el ejemplo 3, usted quizá pudo pensar que al empezar con $N = y(1 - x^2)$ evitaría la necesidad de integrar cos x sen x. Sin embargo, resulta que esta función se vuelve parte de $h'(x)$, y al final es necesario integrarla.

Ejercicios 16.1

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1-20, determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

1. $(2x + 4)\,dx + (3y - 1)\,dy = 0$

2. $(2x + y)\,dx - (x + 6y)\,dy = 0$

3. $(5x + 4y)\,dx + (4x - 8y^3)\,dy = 0$

4. $(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\,dx + (\cos x + x \cos y - y)\,dy = 0$

5. $(2xy^2 - 3)\,dx + (2x^2y + 4)\,dy = 0$

6. $\left(2y - \frac{1}{x} + \cos 3x\right)\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x^2} - 4x^3 + 3y \operatorname{sen} 3x = 0$

7. $(x^2 - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy = 0$

8. $\left(1 + \ln x + \frac{y}{x}\right)dx = (1 - \ln x)\,dy$

9. $(x - y^3 + y^2 \operatorname{sen} x)\,dx = (3xy^2 + 2y \cos x)\,dy$

10. $(x^3 + y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

11. $(y \ln y - e^{-xy})\,dx + \left(\frac{1}{y} + x \ln y\right)dy = 0$

12. $(3x^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - 2y)\,dy = 0$

13. $x\frac{dy}{dx} = 2xe^x - y + 6x^2$

14. $\left(1 - \frac{3}{y} + x\right)\frac{dy}{dx} + y = \frac{3}{x} - 1$

15. $\left(x^2y^3 - \frac{1}{1 + 9x^2}\right)\frac{dx}{dy} + x^3y^2 = 0$

16. $(5y - 2x)y' - 2y = 0$

17. $(\tan x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y)\,dx + \cos x \cos y\,dy = 0$

18. $(2y \operatorname{sen} x \cos x - y + 2y^2e^{xy^2})\,dx = (x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2})\,dy$

19. $(4t^3y - 15t^2 - y)\,dt + (t^4 + 3y^2 - t)\,dy = 0$

20. $\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{y}{t^2 + y^2}\right)dt + \left(ye^y + \frac{1}{t^2 + y^2}\right)dy = 0$

En los problemas 21-24, resuelva el problema de valores iniciales dado.

21. $(x + y)^2\,dx + (2xy + x^2 - 1)\,dy = 0,\quad y(1) = 1$

22. $(e^x + y)\,dx + (2 + x + ye^y)\,dy = 0,\quad y(0) = 1$

23. $(4y + 2t - 5)\,dt + (6y + 4t - 1)\,dy = 0,\quad y(-1) = 2$

24. $(y^2 \cos x - 3x^2y - 2x)\,dx + (2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y)\,dy = 0,\quad y(0) = e$

En los problemas 25 y 26, encuentre el valor de la constante k de manera que la ecuación diferencial dada sea exacta.

25. $(y^3 + kxy^4 - 2x)\,dx + (3xy^2 + 20x^2y^3)\,dy = 0$

26. $(6xy^3 + \cos y)\,dx + (2kx^2y^2 - x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$

Piense en ello

En los problemas 27 y 28, analice cómo las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ pueden encontrarse de manera que cada ecuación diferencial sea exacta. Ponga en práctica sus ideas.

27. $M(x, y)\,dx + \left(xe^{xy} + 2xy + \frac{1}{x}\right)dy = 0$

28. $\left(x^{-1/2}y^{1/2} + \frac{x}{x^2 + y}\right)dx + N(x, y)\,dy = 0$

29. Si la ecuación $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ no es exacta, en ocasiones es posible encontrar una función $\mu(x, y)$ de manera que $\mu(x, y)M(x, y)\,dx + \mu(x, y)N(x, y)\,dy = 0$ sea exacta. La función $\mu(x, y)$ recibe el nombre de **factor integrante**. Encuentre un factor integrante para

$$xy\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0$$

y luego resuelva la ecuación diferencial.

30. Verdadero o falso: Toda ecuación diferencial separable de primer orden $dy/dx = g(x)h(y)$ es exacta. Explique su respuesta.

16.2 Ecuaciones lineales homogéneas

Introducción Una ecuación diferencial lineal de orden *n*-ésimo

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

se dice que es **no homogénea** si $g(x) \neq 0$ para alguna x. Si $g(x) = 0$ para toda x, entonces se dice que la ecuación diferencial es **homogénea**. En ésta y en la siguiente sección estaremos interesados únicamente en determinar las soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de *segundo orden* con coeficientes constantes reales:

$$ay'' + by' + cy = g(x).$$

Empezamos considerando la ecuación homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (1)$$

Teorema 16.2.1 Principio de superposición

Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden (1). Entonces la combinación lineal

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias, también es una solución de la ecuación.

DEMOSTRACIÓN Sustituimos la combinación lineal

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

en la ecuación diferencial (1), sustituimos los términos y usamos el hecho de que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Esto produce

$$\begin{aligned} &a(C_1y_1'' + C_2y_2'') + b(C_1y_1' + C_2y_2') + c(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= C_1(\underbrace{ay_1'' + by_1' + cy_1}_{\text{cero}}) + C_2(\underbrace{ay_2'' + by_2' + cy_2}_{\text{cero}}) \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

■

Los resultados siguientes son consecuencias inmediatas del principio de superposición.

- Un múltiplo constante $y = C_1y_1(x)$ de una solución $y_1(x)$ de una ecuación diferencial lineal homogénea es también una solución.
- Una ecuación diferencial lineal homogénea siempre posee la solución trivial $y = 0$.

Funciones linealmente independientes Análogo al hecho de que cualquier vector en el espacio bidimensional puede expresarse como una combinación lineal única de los vectores *linealmente independientes* **i** y **j**, cualquier solución de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden puede expresarse como una combinación lineal única de dos soluciones **linealmente independientes** de la ecuación diferencial.

Definición 16.2.1 Independencia lineal de funciones

Dos funciones, $y_1(x)$ y $y_2(x)$, son linealmente independientes si ninguna es un múltiplo constante de la otra.

Solución general Las soluciones linealmente independientes de una ecuación diferencial, y_1 y y_2, son los bloques constitutivos de todas las soluciones de la ecuación. Llamamos a la familia de soluciones de dos parámetros $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ la **solución general** de la ecuación diferencial.

Teorema 16.2.2 Solución general

Sean y_1 y y_2 soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden (1). Entonces toda solución de (1) puede obtenerse de la solución general

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \tag{2}$$

EJEMPLO 1 Funciones linealmente independientes

Aunque $y_1 = 0$ y $y_2 = e^{2x}$ son ambas soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 8y = 0$, y y_2 no es un múltiplo constante de y_1, y_1 y y_2 *no* son linealmente independientes pues y_1 es un múltiplo constante de y_2; a saber, $y_1 = 0 \cdot y_2$. ■

Ecuación auxiliar El hecho sorprendente acerca de la ecuación diferencial en (1) es que *todas* las soluciones son funciones exponenciales o se construyen a partir de funciones exponenciales. Si intentamos una solución de la forma $y = e^{mx}$, entonces $y' = me^{mx}$ y $y'' = m^2e^{mx}$, por lo que (1) se convierte en

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0 \qquad \text{o} \qquad e^{mx}(am^2 + bm + c) = 0.$$

Como $e^{mx} \neq 0$ para toda x, es claro que la única manera de que esta función exponencial pueda satisfacer la ecuación diferencial consiste en elegir m de manera que sea una raíz de la ecuación cuadrática

$$am^2 + bm + c = 0.$$

Esta última ecuación recibe el nombre de **ecuación auxiliar** o **ecuación característica** de la ecuación diferencial (1). Consideraremos tres casos: las soluciones correspondientes a raíces reales distintas, raíces reales iguales y raíces complejas conjugadas.

CASO I: Raíces reales distintas

En la suposición de que la ecuación auxiliar de (1) tiene dos raíces reales diferentes m_1 y m_2, encontramos dos soluciones

$$y_1 = e^{m_1x} \qquad \text{y} \qquad y_2 = e^{m_2x}.$$

Puesto que ni y_1 ni y_2 es un múltiplo constante de la otra, las dos soluciones son linealmente independientes. Se sigue que la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}. \tag{3}$$

EJEMPLO 2 Raíces reales distintas de la ecuación auxiliar

Resuelva $2y'' - 5y' - 3y = 0$.

Solución Al resolver la ecuación auxiliar

$$2m^2 - 5m - 3 = 0 \qquad \text{o} \qquad (2m + 1)(m - 3) = 0,$$

obtenemos $m_1 = -\frac{1}{2}$ y $m_2 = 3$. Por consiguiente, por (3) la solución general es

$$y = C_1e^{-x/2} + C_2e^{3x}.$$ ■

CASO II: Raíces reales iguales

Cuando $m_1 = m_2$, obtenemos necesariamente sólo una solución exponencial $y_1 = e^{m_1x}$. Sin embargo, basta con una sustitución directa en (1) para mostrar que $y = u(x)e^{m_1x}$ es también una solución siempre que $u(x) = x$. Vea el problema 37 en los ejercicios 16.2. Entonces $y_1 = e^{m_1x}$ y $y_2 = xe^{m_1x}$ son soluciones linealmente independientes, y la solución general es

$$y = C_1e^{m_1x} + C_2xe^{m_1x}. \tag{4}$$

EJEMPLO 3 Raíces reales iguales de la ecuación auxiliar

Resuelva $y'' - 10y' + 25y = 0$.

Solución De la ecuación auxiliar $m^2 - 10m + 25 = (m - 5)^2 = 0$, vemos que $m_1 = m_2 = 5$. De tal modo, por (4) la solución general es

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}.$$ ■

Números complejos El último caso tiene que ver con números complejos. Recuerde del álgebra que un número de la forma $z = \alpha + i\beta$, donde α y β son números reales e $i^2 = -1$ (alguna vez escrito $i = \sqrt{-1}$), se denomina **número complejo**. El número complejo $\bar{z} = \alpha - i\beta$ recibe el nombre de **conjugado** de z. Ahora, de la fórmula cuadrática, las raíces de $am^2 + bm + c = 0$ pueden escribirse

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Cuando $b^2 - 4ac < 0$, las raíces m_1 y m_2 son complejos conjugados.

CASO III: Raíces complejas conjugadas

Si m_1 y m_2 son complejos, entonces es posible escribir

$$m_1 = \alpha + i\beta \quad \text{y} \quad m_2 = \alpha - i\beta,$$

donde α y $\beta > 0$ son números reales e $i^2 = -1$. Formalmente no hay diferencia entre este caso y el caso I, y en consecuencia la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}. \tag{5}$$

Sin embargo, en la práctica preferiríamos trabajar con funciones reales en vez de funciones que impliquen al número complejo i. Para hacer esto podemos reescribir (5) en una forma más práctica utilizando la **fórmula de Euler**,

Puede obtenerse una derivación formal de la fórmula de Euler de la serie de Maclaurin $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ al sustituir $x = i\theta$, utilizando $i^2 = -1, i^3 = -i, \ldots$, y separando después la serie en las partes real e imaginaria. Con la recomendación así establecida, podemos adoptar $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$ como la *definición de* $e^{i\theta}$.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta,$$

donde θ es cualquier número real. De este resultado podemos escribir

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \quad \text{y} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x,$$

donde hemos usado $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ y $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}\beta x$. De tal modo, (5) se convierte en

$$\begin{aligned} y &= e^{\alpha x}(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}[c_1(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) + c_2(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x)] \\ &= e^{\alpha x}[(c_1 + c_2)\cos\beta x + (c_1 i - c_2 i)\operatorname{sen}\beta x]. \end{aligned}$$

Puesto que se muestra fácilmente que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada, simplemente renombramos $c_1 + c_2$ como C_1 y $c_1 i - c_2 i$ como C_2. Entonces usamos el principio de superposición para escribir la solución general:

$$\begin{aligned} y &= C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \\ &= e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\operatorname{sen}\beta x). \end{aligned} \tag{6}$$

Cuando $\alpha < 0$, llamamos a $e^{\alpha x}$ **factor de amortiguación** debido a que las gráficas de las curvas de solución $\to 0$ cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 4 Raíces complejas de la ecuación auxiliar

Resuelva $y'' + y' + y = 0$.

Solución De la fórmula cuadrática encontramos que la ecuación auxiliar $m^2 + m + 1 = 0$ tiene las raíces complejas

$$m_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{y} \quad m_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Al identificar $\alpha = -\frac{1}{2}$ y $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, vemos de (6) que la solución general de la ecuación es

$$y = e^{-x/2}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right). \quad ■$$

EJEMPLO 5 Una ecuación diferencial especial

La ecuación diferencial

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

se encuentra con frecuencia en matemáticas aplicadas. Vea la sección 16.4. La ecuación auxiliar es $m^2 + \omega^2 = 0$, con raíces $m_1 = \omega i$ y $m_2 = -\omega i$. Se sigue de (6) con $\alpha = 0$ que la solución general es

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \operatorname{sen} \omega x.$$

La FIGURA 16.2.1 muestra la gráfica de la solución cuando $C_1 = -2$, $C_2 = 3$ y $\omega = 1$. Si usted experimenta con valores diferentes de C_1, C_2 y ω, verá que siempre y cuando C_1 y C_2 no sean ambas 0, la solución es oscilante con una amplitud y frecuencia bien definidas. Puede mostrarse que esto es cierto para cualquier elección de C_1 y C_2 (excepto $C_1 = C_2 = 0$) empleando trigonometría. ■

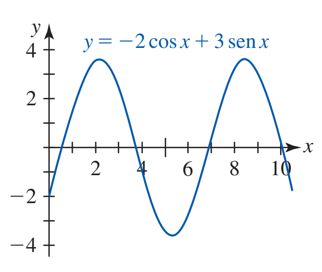


FIGURA 16.2.1 Gráfica de una solución en el ejemplo 5

Problema de valores iniciales

El problema

$$\textit{Resuelva:} \quad ay'' + by' + cy = g(x)$$
$$\textit{Sujeto a:} \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

donde y_0 y y_1 son constantes arbitrarias, recibe el nombre de **problema de valores iniciales** (**PVI**). Los valores y_0 y y_1 se denominan **condiciones iniciales**. Una solución del problema es una función cuya gráfica pasa por (x_0, y_0) tal que la pendiente de la tangente a la curva en ese punto es y_1. El siguiente ejemplo ilustra un problema de valores iniciales para una ecuación homogénea.

EJEMPLO 6 Un problema de valores iniciales

Resuelva $y'' - 4y' + 13y = 0$ sujeta a $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar

$$m^2 - 4m + 13 = 0$$

son $m_1 = 2 + 3i$ y $m_2 = 2 - 3i$, por lo que la solución general es

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

La condición $y(0) = -1$ implica que

$$-1 = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0) = C_1,$$

de la cual podemos escribir

$$y = e^{2x}(-\cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x).$$

Diferenciando esta última expresión y utilizando la segunda condición inicial se obtiene

$$y' = e^{2x}(3 \operatorname{sen} 3x + 3C_2 \cos 3x) + 2e^{2x}(-\cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x)$$
$$2 = 3C_2 - 2,$$

por lo que $C_2 = \frac{4}{3}$. En consecuencia,

$$y = e^{2x}\left(-\cos 3x + \tfrac{4}{3} \operatorname{sen} 3x\right). \quad ■$$

Problema de valores en la frontera

Las condiciones iniciales para una ecuación diferencial de segundo orden se caracterizan por el hecho de que especifican valores de la función solución y de su primera derivada en un *solo punto*. En contraste, en un **problema de valores en la frontera**

(PVF) hay dos condiciones, denominadas **condiciones en la frontera**, que especifican los valores de una solución o de su primera derivada *en los puntos extremos de un intervalo* $[a, b]$. Por ejemplo,

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 = g(x), \quad y(a) = y_0, \quad y'(b) = y_1$$

es un problema de valores en la frontera. Una solución de este problema es una función, definida sobre $[a, b]$, cuya gráfica pasa por el punto (a, y_0) y tiene pendiente y_1 cuando $x = b$.

El siguiente ejemplo muestra que un problema de valores en la frontera, a diferencia de un problema de valores iniciales, puede tener varias soluciones, una solución única o ninguna solución.

EJEMPLO 7 Un problema de valores en la frontera puede tener muchas, una o ninguna solución

Del ejemplo 5 sabemos que la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 0$ es

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \operatorname{sen} 4x. \tag{7}$$

a) Suponga que ahora deseamos determinar una solución de la ecuación que además satisface las condiciones a la frontera $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$. Observe que la primera condición $0 = C_1 \cos 0 + C_2 \operatorname{sen} 0$ implica $C_1 = 0$, por lo que $y = C_2 \operatorname{sen} 4x$. Pero cuando $x = \pi/2$, $0 = C_2 \operatorname{sen} 2\pi$ se satisface para cualquier elección de C_2 puesto que $\operatorname{sen} 2\pi = 0$. En consecuencia, el problema de valores en la frontera

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 0 \tag{8}$$

tiene una infinidad de soluciones. La FIGURA 16.2.2 muestra cinco diferentes miembros de la familia de un parámetro $y = C_2 \operatorname{sen} 4x$ que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(\pi/2, 0)$.

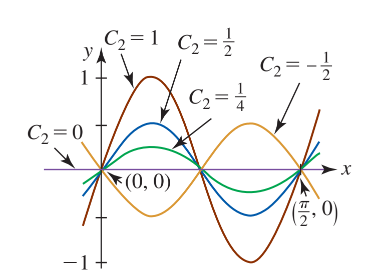


FIGURA 16.2.2 Cinco soluciones del problema de valores en la frontera del inciso *a*) del ejemplo 7

b) Si el problema de valores en la frontera en (8) se cambia por

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/8) = 0, \tag{9}$$

entonces $y(0) = 0$ aún requiere que $C_1 = 0$ en la solución (7). Pero al aplicar $y(\pi/8) = 0$ a $y = C_2 \operatorname{sen} 4x$ se exige que $0 = C_2 \operatorname{sen}(\pi/2) = C_2 \cdot 1$. Por consiguiente, $y = 0$ es una solución de este nuevo problema de valores en la frontera. De hecho, puede demostrarse que $y = 0$ es la *única* solución de (9).

c) Por último, si cambiamos el problema a

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1, \tag{10}$$

encontramos de nuevo que $C_1 = 0$ de $y(0) = 0$, pero que la aplicación de $y(\pi/2) = 1$ a $y = C_2 \operatorname{sen} 4x$ conduce a la contradicción $1 = C_2 \operatorname{sen} 2\pi = C_2 \cdot 0 = 0$. Por consiguiente, el problema de valores en la frontera (10) no tiene solución. ■

$\frac{d^2y}{dx^2}$ NOTAS DESDE EL AULA

i) Muchos de los conceptos de esta sección pueden extenderse a ecuaciones diferenciales lineales de tercer o mayor orden con coeficientes constantes. Por ejemplo, la ecuación auxiliar de

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$$

es $m^3 - 4m^2 + 5m - 2 = (m - 1)^2(m - 2) = 0$ y $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = e^{2x}$ son soluciones de la ecuación diferencial. La noción de independencia lineal requiere una definición más complicada que la que utilizamos para dos funciones. Vea un texto sobre ecuaciones diferenciales.

ii) Las funciones hiperbólicas desempeñan un papel importante en el estudio de ecuaciones diferenciales. Recuerde que estas funciones se presentaron en la sección 3.10 y que tienen propiedades que son similares a las de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, las segundas derivadas del seno hiperbólico y del coseno hiperbólico son

$$\frac{d^2}{dx^2}(\operatorname{senh} x) = \operatorname{senh} x \qquad \text{y} \qquad \frac{d^2}{dx^2}(\cosh x) = \cosh x.$$

Se deduce entonces que $y_1 = \cosh x$ y $y_2 = \operatorname{senh} x$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' - y = 0$. Puesto que estas funciones son linealmente independientes, la solución general de la ecuación diferencial es $y = C_1 \cosh x + C_2 \operatorname{senh} x$. Se advierte fácilmente que otra forma de la solución general es $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Estas dos en apariencia muy diferentes soluciones se relacionan por medio de las definiciones de las dos funciones hiperbólicas:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Ambas formas de la solución general de $y'' - y = 0$ se usan eventualmente en el análisis de las *ecuaciones diferenciales parciales*.

Como el nombre lo sugiere, una ecuación diferencial parcial implica derivadas parciales de una función desconocida de varias variables.

Ejercicios 16.2

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1-20, determine la solución general de la ecuación diferencial dada.

1. $3y'' - y' = 0$
2. $2y'' + 5y' = 0$
3. $y'' - 16y = 0$
4. $y'' - 8y = 0$
5. $y'' + 9y = 0$
6. $4y'' + y = 0$
7. $y'' - 3y' + 2y = 0$
8. $y'' - y' - 6y = 0$
9. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 16y = 0$
10. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 10\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$
11. $y'' + 3y' - 5y = 0$
12. $y'' + 4y' - y = 0$
13. $12y'' - 5y' - 2y = 0$
14. $8y'' + 2y' - y = 0$
15. $y'' - 4y' + 5y = 0$
16. $2y'' - 3y' + 4y = 0$
17. $3y'' + 2y' + y = 0$
18. $2y'' + 2y' + y = 0$
19. $9y'' + 6y' + y = 0$
20. $15y'' - 16y' - 7y = 0$

En los problemas 21-30, resuelva el problema de valores iniciales dado.

21. $y'' + 16y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = -2$
22. $y'' - y = 0,\ y(0) = y'(0) = 1$
23. $y'' + 6y' + 5y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
24. $y'' - 8y' + 17y = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -1$
25. $2y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = -1,\ y'(0) = 0$
26. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 5,\ y'(0) = 10$
27. $y'' + y' + 2y = 0,\ y(0) = y'(0) = 0$
28. $4y'' - 4y' - 3y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 5$
29. $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1$
30. $y'' + y = 0,\ y(\pi/3) = 0,\ y'(\pi/3) = 2$

31. Las raíces de una ecuación auxiliar son $m_1 = 4$ y $m_2 = -5$. ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente?

32. Las raíces de una ecuación auxiliar son $m_1 = 3 + i$ y $m_2 = 3 - i$. ¿Cuál es la ecuación diferencial correspondiente?

En los problemas 33-40, resuelva el problema de valores en la frontera dado o demuestre que no existe solución.

33. $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$
34. $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 1$
35. $y'' + y = 0,\ y'(0) = 0,\ y'(\pi/2) = 2$
36. $y'' - y = 0,\ y(0) = 1,\ y(1) = -1$
37. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi) = -1$
38. $y'' - 2y' + 2y = 0,\ y(0) = 1,\ y(\pi/2) = 1$
39. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y(0) = 0,\ y(1) = 1$
40. $y'' - 4y' + 4y = 0,\ y'(0) = 1,\ y(1) = 2$

Piense en ello

En los problemas 41 y 42, encuentre la solución general de la ecuación diferencial de tercer orden dada si se sabe que y_1 es una solución.

41. $y''' - 9y'' + 25y' - 17y = 0; \quad y_1 = e^x$
42. $y''' + 6y'' + y' - 34y = 0; \quad y_1 = e^{-4x}\cos x$

En los problemas 43 y 44, emplee la solución supuesta $y = e^{mx}$ para encontrar la ecuación auxiliar, raíces y solución general de la ecuación diferencial de tercer orden indicada.

43. $y''' - 4y'' - 5y' = 0$
44. $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

45. Considere el problema de valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \ \ y(0) = 0, y(1) = 0.$$

Considerando los tres casos $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$, encuentre todos los valores reales de λ para los cuales el problema posee soluciones distintas de cero.

Proyectos

46. Pozo a través de la Tierra Suponga que se perfora un pozo a través de la Tierra de manera que éste pasa por el centro de la misma. Se deja caer un cuerpo con masa m dentro del pozo. Considere que la distancia desde el centro de la Tierra a la masa en el tiempo t se denota por medio de r. Vea la FIGURA 16.2.3.

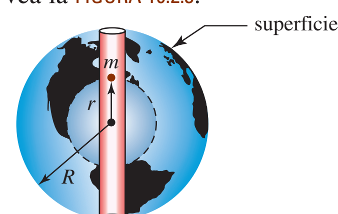


FIGURA 16.2.3 Pozo a través de la Tierra del problema 46

a) Deje que M denote la masa de la Tierra y M_r la masa de la porción de la Tierra dentro de una esfera de radio r. La fuerza gravitacional sobre m es $F = -kM_r m/r^2$, donde el signo menos indica que la fuerza es de atracción. Use este hecho para mostrar que

$$F = -k\frac{mM}{R^3}r.$$

[*Sugerencia*: Suponga que la Tierra es homogénea, esto es, que tiene una densidad constante ρ. Emplee masa = densidad × volumen.]

b) Utilice la segunda ley de Newton $F = ma$ y el resultado del inciso *a*) para deducir la ecuación diferencial

$$\frac{d^2r}{dt^2} + \omega^2 r = 0,$$

donde $\omega^2 = kM/R^3 = g/R$.

c) Resuelva la ecuación diferencial del inciso *b*) si la masa m se suelta desde el reposo en la superficie de la Tierra. Interprete su respuesta utilizando R = 3 960 mi.

16.3 Ecuaciones lineales no homogéneas

Introducción Para resolver una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$ay'' + by' + cy = g(x), \tag{1}$$

debemos ser capaces de hacer dos cosas:

i) encontrar la solución general $y_c(x)$ de la ecuación diferencial **homogénea asociada**

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

ii) encontrar *cualquier* solución particular y_p de la ecuación no homogénea (1).

Como veremos, la solución general de (1) es entonces $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$. En la sección anterior analizamos cómo encontrar $y_c(x)$; en esta sección examinaremos dos métodos para determinar $y_p(x)$.

Soluciones particulares Cualquier función y_p sin parámetros arbitrarios que satisfagan (1) se dice que es una **solución particular** de la ecuación.

EJEMPLO 1 Una solución particular

Vemos que $y_p = x^3 - x$ es una solución particular de

$$y'' - y' + 6y = 6x^3 - 3x^2 + 1$$

calculando primero $y_p' = 3x^2 - 1$ y $y_p'' = 6x$. Después, al sustituir la ecuación diferencial, tenemos para todos los números reales x

$$\begin{aligned} y_p'' - y_p' + 6y_p &= 6x - (3x^2 - 1) + 6(x^3 - x) \\ &= 6x^3 - 3x^2 + 1. \end{aligned}$$

■

La solución general El teorema siguiente nos dice cómo construir la **solución general** de (1).

Teorema 16.3.1 Solución general

Sea y_p una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea (1) y

$$y_c(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

la solución general de la ecuación homogénea asociada.

Entonces la **solución general** de la ecuación no homogénea es

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x). \tag{2}$$

La demostración de que (2) es una solución de (1) se deja como ejercicio. Vea el problema 38 en los ejercicios 16.3.

Función complementaria En el teorema 16.3.1 la solución de una ecuación diferencial homogénea asociada, $y_c(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, se denomina **función complementaria** de la

ecuación (1). En otras palabras, la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea es

$$y = \text{función complementaria} + \text{cualquier solución particular}.$$

Coeficientes indeterminados Cuando $g(x)$ consiste en

i) una constante k,
ii) un polinomio en x,
iii) una función exponencial $e^{\alpha x}$,
iv) sen βx, cos βx,

o sumas y productos finitos de estas funciones, es posible encontrar una solución particular de (1) mediante el **método de coeficientes indeterminados**. La idea que subyace en este método es una conjetura, en realidad una adivinanza informada, acerca de la forma de y_p motivada por los distintos tipos de funciones que forman $g(x)$ y sus derivadas $g'(x)$, $g''(x)$, . . . , $g^{(m)}(x)$.

Vea un texto de ecuaciones diferenciales para una discusión más completa del método de coeficientes indeterminados.

En esta sección consideramos el caso especial en el que n funciones distintas $f_n(x)$ que aparecen en $g(x)$, y sus derivadas, *no* se presentan; esto es, no se duplican, en la función complementaria y_c. Bajo estas circunstancias, puede encontrarse una solución particular y_p que tenga la forma

$$y = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \cdots + A_n f_n(x). \tag{3}$$

Para determinar los coeficientes específicos A_k, donde $k = 1, \ldots, n$, sustituimos la expresión en (3) en la ecuación diferencial no homogénea (1). Esto producirá n ecuaciones algebraicas lineales en n incógnitas $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Los siguientes dos ejemplos ilustran el método básico.

EJEMPLO 2 Solución general utilizando coeficientes indeterminados

Resuelva $$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 4x^2. \tag{4}$$

Solución La función complementaria es

$$y_c = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

Ahora, ya que

$$g(x) = 4\underset{\uparrow\, f_1(x)}{x^2}, \qquad g'(x) = 8\underset{\uparrow\, f_2(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad g''(x) = 8 \cdot \underset{\uparrow\, f_3(x)}{1},$$

buscamos una solución particular que tenga la forma básica

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \cdot 1. \tag{5}$$

Diferenciando (5) y al sustituir en la ecuación diferencial original (4), obtenemos

$$\begin{aligned} y_p'' + 3y_p' + 2y_p &= 2A + 3(2Ax + B) + 2(Ax^2 + Bx + C) \\ &= 2Ax^2 + (6A + 2B)x + (2A + 3B + 2C) \\ &= 4x^2 + 0x + 0. \end{aligned}$$

Puesto que la última igualdad se supone que es una identidad, los coeficientes de potencias similares de x deben ser iguales:

$$\begin{aligned} 2A \qquad\qquad &= 4 \\ 6A + 2B \qquad &= 0 \\ 2A + 3B + 2C &= 0. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones se encuentra que $A = 2$, $B = -6$ y $C = 7$. De tal modo, $y_p = 2x^2 - 6x + 7$ y por (2) la solución general de la ecuación diferencial no homogénea es

$$y = y_c + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + 2x^2 - 6x + 7. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 3 Solución general utilizando coeficientes indeterminados

Resuelva $y'' + 2y' + 2y = -10xe^x + 5 \operatorname{sen} x$.

Solución Las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 2m + 2 = 0$ son $m_1 = -1 + i$ y $m_2 = -1 - i$, por lo que

$$y_c = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x).$$

En este caso,

$$g(x) = -10\underset{\substack{\uparrow \\ f_1(x)}}{xe^x} + 5\underset{\substack{\uparrow \\ f_2(x)}}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad g'(x) = -10xe^x - 10\underset{\substack{\uparrow \\ f_3(x)}}{e^x} + 5\underset{\substack{\uparrow \\ f_4(x)}}{\cos x}.$$

Las derivadas de orden superior no generan ninguna nueva función y esto sugiere que es posible encontrar una solución de la forma

$$y_p = Axe^x + Be^x + C \operatorname{sen} x + D \cos x.$$

Al sustituir y_p en la ecuación diferencial y simplificando, tenemos

$$\begin{aligned} y_p'' + 2y_p' + 2y_p &= 5Axe^x + (4A + 5B)e^x + (C - 2D) \operatorname{sen} x + (2C + D) \cos x \\ &= -10xe^x + 5 \operatorname{sen} x. \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones correspondientes es

$$\begin{aligned} 5A \qquad &= -10 \\ 4A + 5B &= 0 \\ C - 2D &= 5 \\ 2C + D &= 0, \end{aligned}$$

por lo que $A = -2$, $B = \frac{8}{5}$, $C = 1$ y $D = -2$. De tal modo, una solución particular es

$$y_p = -2xe^x + \tfrac{8}{5}e^x + \operatorname{sen} x - 2 \cos x,$$

y la solución general resulta

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) - 2xe^x + \tfrac{8}{5}e^x + \operatorname{sen} x - 2 \cos x.$$ ■

Variación de parámetros Como se mencionó en el inicio de esta discusión, el método de coeficientes indeterminados se limita al caso en el que $g(x)$ es una suma o producto finito de constantes, polinomios, exponenciales $e^{\alpha x}$, senos y cosenos. En general, el método de coeficientes indeterminados no producirá una solución particular de (1) para funciones tales como

$$g(x) = \frac{1}{x}, \qquad g(x) = \ln x, \qquad g(x) = \tan x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \operatorname{sen}^{-1} x.$$

El método que consideraremos a continuación, denominado **variación de parámetros**, producirá una solución particular y_p *siempre* que pueda resolverse la ecuación homogénea asociada.

Empezamos nuestra discusión de este método poniendo la ecuación diferencial no homogénea en (1) en la **forma estándar**

$$y'' + Py' + Qy = f(x)$$

dividiendo ambos lados de la ecuación por el primer coeficiente a. Después, dejamos que y_1 y y_2 sean soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial homogénea asociada (2); así que

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0.$$

Después de esto preguntamos: ¿es posible encontrar dos funciones u_1 y u_2 de manera que

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{6}$$

sea una solución particular de (1)? Advierta que nuestra suposición para y_p tiene la misma forma que $y_c = C_1y_1 + C_2y_2$, aunque hemos sustituido C_1 y C_2 por los "parámetros de la variable" u_1 y u_2. Debido a que estamos buscando dos funciones desconocidas u_1 y u_2, la razón nos indica que necesitamos dos ecuaciones.

Al emplear la regla del producto para diferenciar (6) dos veces, obtenemos

$$y_p' = u_1y_1' + y_1u_1' + u_2y_2' + y_2u_2'$$
$$y_p'' = u_1y_1'' + y_1'u_1' + y_1u_1'' + u_1'y_1' + u_2y_2'' + y_2'u_2' + y_2u_2'' + u_2'y_2'.$$

Al sustituir (6) y las derivadas anteriores en la forma estándar de la ecuación diferencial y agrupar términos, se obtiene

$$\begin{aligned} y_p'' + Py_p' + Qy_p &= u_1[\underbrace{y_1'' + Py_1' + Qy_1}_{\text{cero}}] + u_2[\underbrace{y_2'' + Py_2' + Qy_2}_{\text{cero}}] \\ &\quad + y_1u_1'' + u_1'y_1' + y_2u_2'' + u_2'y_2' + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1'] + \frac{d}{dx}[y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' \\ &= \frac{d}{dx}[y_1u_1' + y_2u_2'] + P[y_1u_1' + y_2u_2'] + y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x). \end{aligned} \tag{7}$$

En este punto hacemos la suposición de que u_1 y u_2 son funciones para las cuales $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$. Esta suposición no sale de la nada sino de los primeros dos términos en (7), puesto que $y_1u_1' + y_2u_2' = 0$, entonces (7) se reduce a $y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$. Ahora tenemos nuestras dos ecuaciones deseadas, aunque dos ecuaciones para determinar las derivadas u_1' y u_2'. Por la regla de Cramer, la solución del sistema

$$y_1u_1' + y_2u_2' = 0$$
$$y_1'u_1' + y_2'u_2' = f(x)$$

puede expresarse en términos de determinantes de 2×2:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} \quad \text{y} \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

El determinante $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ recibe el nombre de **wronkskiano** y suele denotarse mediante W.

EJEMPLO 4 Solución general utilizando variación de parámetros

Resuelva $4y'' + 36y = \csc 3x$.

Solución Para usar (6) y (8) es necesario escribir primero la ecuación diferencial en forma estándar. Para ese fin empezamos dividiendo la ecuación dada por el coeficiente de y'':

$$y'' + 9y = \tfrac{1}{4}\csc 3x.$$

Puesto que las raíces de la ecuación auxiliar $m^2 + 9 = 0$ son $m_1 = 3i$ y $m_2 = -3i$, la función complementaria es

$$y_c = C_1 \cos 3x + C_2 \operatorname{sen} 3x.$$

Identificando $y_1 = \cos 3x$ y $y_2 = \operatorname{sen} 3x$, vemos que el wronkskiano es

$$W = \begin{vmatrix} \cos 3x & \operatorname{sen} 3x \\ -3\operatorname{sen} 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3.$$

De (8) encontramos

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} 3x \\ \frac{1}{4}\csc 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix}}{W} = \frac{(\operatorname{sen} 3x)\left(\frac{1}{4}\csc 3x\right)}{3} = -\frac{1}{12}$$

y

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\operatorname{sen} 3x & \frac{1}{4}\csc 3x \end{vmatrix}}{W} = \frac{(\cos 3x)\left(\frac{1}{4}\csc 3x\right)}{3} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Integrando u_1' y u_2' se produce

$$u_1 = -\tfrac{1}{12}x \qquad \text{y} \qquad u_2 = \tfrac{1}{36}\ln|\text{sen } 3x|.$$

Por tanto,

$$y_p = -\tfrac{1}{12}x \cos 3x + \tfrac{1}{36}(\text{sen } 3x)\ln|\text{sen } 3x|,$$

y la solución general es

$$y = y_c + y_p = C_1 \cos 3x + C_2 \text{ sen } 3x - \tfrac{1}{12}x \cos 3x + \tfrac{1}{36}(\text{sen } 3x)\ln|\text{sen } 3x|. \qquad \blacksquare$$

Constantes de integración Al calcular las integrales indefinidas de u_1' y u_2', no es necesario introducir ninguna constante. Para ver lo anterior, suponga que a_1 y a_2 son constantes introducidas en la integración de u_1' y u_2'. Entonces la solución general $y = y_c + y_p$ se convierte en

$$\begin{aligned} y &= \overbrace{C_1y_1 + C_2y_2}^{y_c} + \overbrace{(u_1 + a_1)y_1 + (u_2 + a_2)y_2}^{y_p} \\ &= (C_1 + a_1)y_1 + (C_2 + a_2)y_2 + u_1y_1 + u_2y_2 \\ &= c_1y_1 + c_2y_2 + u_1y_1 + u_2y_2, \end{aligned}$$

donde $c_1 = C_1 + a_1$ y $c_2 = C_2 + a_2$ son constantes.

Ejercicios 16.3

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1-10, resuelva la ecuación diferencial dada por coeficientes indeterminados.

1. $y'' - 9y = 54$

2. $2y'' - 7y' + 5y = -29$

3. $y'' + 4y' + 4y = 2x + 6$

4. $y'' - 2y' + y = x^3 + 4x$

5. $y'' + 25y = 6 \text{ sen } x$

6. $y'' - 4y = 7e^{4x}$

7. $y'' - 2y' - 3y = 4e^{2x} + 2x^3$

8. $y'' + y' + y = x^2e^x + 3$

9. $y'' - 8y' + 25y = e^{3x} - 6 \cos 2x$

10. $y'' - 5y' + 4y = 2 \text{ senh } 3x$

En los problemas 11 y 12, resuelva la ecuación diferencial dada por coeficientes indeterminados sujetos a las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

11. $y'' - 64y = 16$

12. $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}$

En los problemas 13-32, resuelva la ecuación diferencial dada por variación de parámetros.

13. $y'' + y = \sec x$

14. $y'' + y = \tan x$

15. $y'' + y = \text{sen} x$

16. $y'' + y = \sec x \tan x$

17. $y'' + y = \cos^2 x$

18. $y'' + y = \sec^2 x$

19. $y'' - y = \cosh x$

20. $y'' - y = \text{senh } 2x$

21. $y'' - 4y = e^{2x}/x$

22. $y'' - 9y = 9xe^{-3x}$

23. $y'' + 3y' + 2y = 1/(1 + e^x)$

24. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}/(1 + e^x)$

25. $y'' + 3y' + 2y = \text{sen } e^x$

26. $y'' - 2y' + y = e^x \arctan x$

27. $y'' - 2y' + y = e^x/(1 + x^2)$

28. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sec x$

29. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

30. $y'' + 10y' + 25y = e^{-10x}/x^2$

31. $4y'' - 4y' + y = 8e^{-x} + x$

32. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\sqrt{1 - x^2}$

En los problemas 33 y 34, resuelva la ecuación diferencial dada por variación de parámetros sujetos a las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$.

33. $y'' - y = xe^x$

34. $2y'' + y' - y = x + 1$

35. Dado que $y_1 = x$ y $y_2 = x \ln x$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - xy' + y = 0$, emplee variación de parámetros para resolver $x^2y'' - xy' + y = 4x\ln x$ para $x > 0$.

36. Dado que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ son soluciones linealmente independientes de $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, use variación de parámetros para resolver $x^2y'' - 4xy' + 6y = 1/x$ para $x > 0$.

Aplicaciones

37. Puesto que el fosfato es a menudo un nutriente limitante para el crecimiento de algas en lagos, en el manejo de la calidad del agua es importante ser capaces de predecir la entrada de fosfato en lagos. Una fuente es el sedimento en el lecho del lago. Un modelo matemático que describe la concentración del fosfato en el sedimento del lecho de un lago es la ecuación diferencial

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{C(x) - C(\infty)}{\lambda^2},$$

donde $C(x)$ es la concentración de fosfato a una profundidad x desde la superficie del sedimento, $C(\infty)$ es la concentración de equilibrio a profundidad "infinita", esto es, $C(\infty) = \lim_{x\to\infty} C(x)$, y $\lambda > 0$ es un parámetro de "norma de espesor" de la porosidad del sedimento, el coeficiente de difusión del ion fosfato y una tasa de absorción constante. Resuelva esta ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $C(0) = 0$.

≡ Piense en ello

38. Si y_c y y_p son la función complementaria y la solución particular, respectivamente, de la ecuación diferencial no homogénea (1), demuestre que $y = y_c + y_p$ es una solución de (1).

39. ***a***) Demuestre que la solución particular de la forma $y_p = Ae^x$ no puede encontrarse para la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 3y = 10e^x$.

b) Encuentre una solución particular de la ecuación diferencial en el inciso *a*) de la forma $y_p = Axe^x$.

c) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial del inciso *a*).

40. Utilice coeficientes indeterminados y las ideas del problema 39 para encontrar la solución general de $y'' - y = e^{-x} - e^x$.

16.4 Modelos matemáticos

Introducción Una importante rama de las matemáticas implica el estudio de *sistemas dinámicos*, sistemas en general que cambian o evolucionan con el tiempo. Más precisamente, un sistema dinámico consiste en un conjunto de variables dependientes del tiempo, denominadas *variables de estado*, junto con una regla que nos permite determinar el estado del sistema (que puede ser un estado pasado, presente o futuro) en términos de un estado prescrito en algún tiempo t_0.

En esta sección nos concentramos primero en un modelo matemático de uno de tales sistemas dinámicos —un sistema de masa/resorte— cuyo estado (posición x y velocidad dx/dt de la masa) en cualquier tiempo futuro $t > 0$ depende de las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_1$. Las condiciones iniciales representan el estado de la masa en el tiempo $t = 0$. Introducimos después un sistema análogo que puede usarse para modelar circuitos eléctricos.

Ley de Hooke Suponga, como en la FIGURA 16.4.1*b*), una masa m_1 unida a un resorte flexible suspendido de un soporte rígido. Cuando m_1 se sustituye por una masa diferente m_2, la cantidad de alargamiento o elongación del resorte será desde luego diferente.

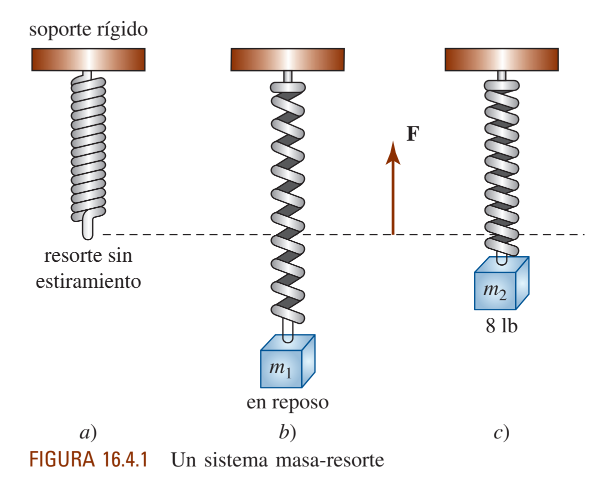


FIGURA 16.4.1 Un sistema masa-resorte

Por la ley de Hooke, el resorte mismo ejerce una fuerza restauradora F opuesta a la dirección de elongación y proporcional a la cantidad de elongación s. Enunciado de manera simple, $F = ks$, donde k es una constante de proporcionalidad. Aunque masas con diferentes pesos alargarán un resorte en diferentes cantidades, el resorte se caracteriza esencialmente por medio del número k. Por ejemplo, si una masa que pesa 10 lb alarga un resorte $\frac{1}{2}$ pie, entonces

$$10 = k \cdot \tfrac{1}{2} \qquad \text{implica} \qquad k = 20 \text{ lb/pie}.$$

Consecuentemente, una masa que pese 8 lb alarga al mismo resorte $s = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ pie.

Segunda ley de Newton Luego de que una masa m se una a un resorte, alargará el resorte en una cantidad s y alcanzará una **posición de equilibrio** en la cual su peso W está equilibrado por la fuerza restauradora ks. Recuerde que el peso está definido por $W = mg$, donde la masa m se mide en slugs, kilogramos o gramos, y $g = 32$ pies/s^2, 9.8 m/s^2, o 980 cm/s^2, respectivamente. Como se indica en la FIGURA 16.4.2*b*), la condición de equilibrio es $mg = ks$ o $mg - ks = 0$.

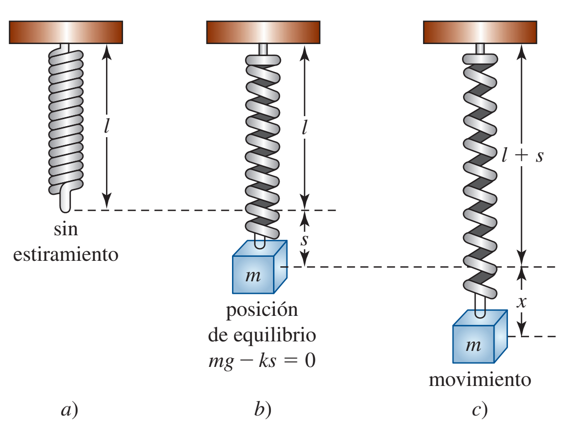


FIGURA 16.4.2 Un sistema masa-resorte en equilibrio y en movimiento

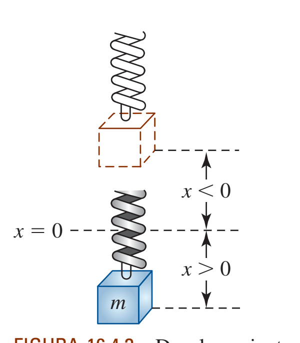


FIGURA 16.4.3 Desplazamientos negativo y positivo

Si la masa se desplaza después en una cantidad x desde su posición de equilibrio y se suelta, la fuerza neta F en este caso dinámico está dada por la **segunda ley de movimiento de Newton**, $F = ma$, donde a es la aceleración d^2x/dt^2. Suponiendo que no hay fuerzas retardadoras que actúan sobre el sistema y que la masa vibra sin influencia de otras fuerzas externas —**movimiento libre**—, podemos igualar F con la fuerza resultante del peso y la fuerza restauradora:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(s + x) + mg = -kx + \underbrace{mg - ks}_{\text{cero}} = -kx. \tag{1}$$

El signo negativo en (1) indica que la fuerza restauradora del resorte actúa opuesta a la dirección de movimiento. Además, debemos adoptar la convención de que los desplazamientos medidos *debajo* de la posición de equilibrio son positivos. Vea la FIGURA 16.4.3.



Movimiento subamortiguado libre Al dividir (1) entre la masa m obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{2}$$

donde $\omega^2 = k/m$. Se afirma que la ecuación (2) describe el **movimiento armónico simple**, o **movimiento subamortiguado libre**. Hay dos condiciones iniciales evidentes asociadas con esta ecuación diferencial:

$$x(0) = s_0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0, \tag{3}$$

que representan la cantidad de desplazamiento inicial y de velocidad inicial, respectivamente. Por ejemplo, si $s_0 > 0$, $v_0 < 0$, la masa empezaría desde un punto *debajo* de la posición de equilibrio con una velocidad impartida *hacia arriba*. Si $s_0 < 0$, $v_0 = 0$, la masa se liberaría desde el reposo a partir de un punto $|s_0|$ unidades *arriba* de la posición de equilibrio, etcétera.

La solución y la ecuación de movimiento Para resolver (2) notamos que las soluciones de la ecuación auxiliar $m^2 + \omega^2 = 0$ son los números complejos

$$m_1 = \omega i, \qquad m_2 = -\omega i.$$

De tal modo, de (6) de la sección 16.2 encontramos que la solución general de la ecuación es

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t. \tag{4}$$

El **periodo** de vibraciones libres descritas por (4) es $T = 2\pi/\omega$ y la **frecuencia** es $f = 1/T = \omega/2\pi$. Por último, cuando se usan las condiciones iniciales (3) para determinar las

constantes C_1 y C_2 en (4), afirmamos que la solución particular resultante es la **ecuación de movimiento** de la masa.

EJEMPLO 1 Un sistema que describe el movimiento armónico simple

Resuelva e interprete el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 16x = 0, \qquad x(0) = 10, x'(0) = 0.$$

Solución El problema es equivalente a jalar una masa en un resorte 10 unidades hacia abajo de la posición equilibrio, sosteniéndola hasta $t = 0$, y después soltándola desde el reposo. La aplicación de las condiciones iniciales a la solución

$$x(t) = C_1 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t$$

da

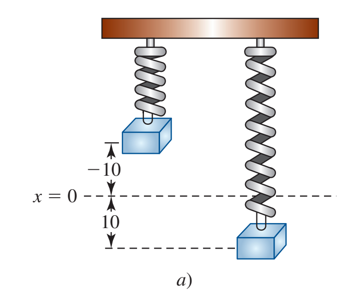
$$x(0) = 10 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0,$$

de manera que $C_1 = 10$, y consecuentemente,

$$x(t) = 10 \cos 4t + C_2 \operatorname{sen} 4t$$
$$x'(t) = -40 \operatorname{sen} 4t + 4C_2 \cos 4t$$
$$x'(0) = 0 = 4C_2 \cdot 1.$$

La última ecuación implica que $C_2 = 0$, por lo que la ecuación de movimiento es $x(t) = 10 \cos 4t$.

La solución muestra claramente que una vez que el sistema se pone en movimiento, se mantiene en movimiento con la masa rebotando arriba y abajo 10 unidades con respecto a la posición de equilibrio $x = 0$. Como se ilustra en la FIGURA 16.4.4*b*), el periodo de oscilación es $2\pi/4 = \pi/2$ s. ■



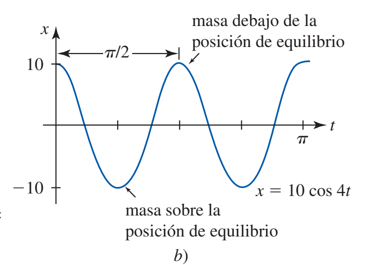


FIGURA 16.4.4 Movimiento armónico simple del sistema masa-resorte del ejemplo 1

Movimiento amortiguado libre La discusión del movimiento armónico simple del ejemplo 1 es un poco irreal. A menos que la masa esté suspendida en un vacío perfecto, habrá una fuerza de resistencia debida al medio circundante. Por ejemplo, como muestra la FIGURA 16.4.5, la masa m podría estar suspendida en un medio viscoso o conectada a un dispositivo de amortiguamiento hidráulico. En el estudio de la mecánica, las fuerzas de amortiguamiento que actúan sobre un cuerpo se consideran proporcionales a la potencial de la velocidad instantánea. En particular, supondremos que esta fuerza está dada por un múltiplo constante de dx/dt. De tal modo, si no se aplican otras fuerzas externas sobre el sistema, se deduce de la segunda ley de Newton que

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt}, \tag{5}$$

donde β es una *constante de amortiguamiento* positiva y el signo negativo es una consecuencia del hecho de que la fuerza de amortiguamiento actúa en una dirección opuesta al movimiento. Cuando dividimos (5) por la masa m, la ecuación diferencial del **movimiento amortiguado libre** es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \tag{6}$$

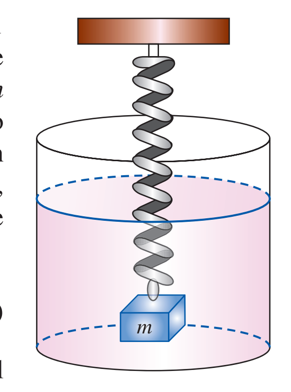
donde $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$. El símbolo 2λ se usa sólo por conveniencia algebraica, puesto que la ecuación auxiliar es $m^2 + 2\lambda m + \omega^2 = 0$ y las raíces correspondientes son entonces

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}, \quad m_2 = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega^2}.$$

Cuando $\lambda^2 - \omega^2 \neq 0$ la solución de la ecuación diferencial tiene la forma

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right), \tag{7}$$

y vemos que cada solución contendrá el **factor de amortiguación** $e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$. (Como se muestra abajo, éste también es el caso cuando $\lambda^2 - \omega^2 = 0$.) Así, los desplazamientos de la masa llegarán a ser despreciables conforme aumente el tiempo. A continuación se consideran los tres casos posibles determinados por el signo algebraico de $\lambda^2 - \omega^2$.



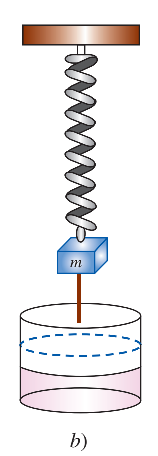
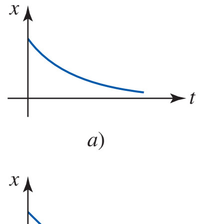
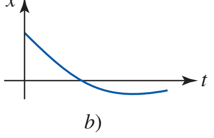


FIGURA 16.4.5 Un sistema masa-resorte con movimiento armónico amortiguado

CASO I: $\lambda^2 - \omega^2 > 0$ Aquí las raíces de la ecuación auxiliar son reales y distintas y el sistema se dice que está **sobreamortiguado**. Se demuestra fácilmente que cuando $\lambda^2 - \omega^2 > 0$, $\beta^2 > 4km$,



a)



b)

FIGURA 16.4.6 Movimiento sobreamortiguado de un sistema masa-resorte

por lo que la constante de amortiguamiento β es grande cuando se compara con la constante k del resorte. La correspondiente ecuación de movimiento está dada por (7):

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 e^{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda^2-\omega^2}\,t}\right).$$

Dos posibles gráficas de $x(t)$ se muestran en la FIGURA 16.4.6, ilustrando el hecho de que el movimiento de la masa es no oscilatorio y rápidamente se mueve hacia la posición de equilibrio.

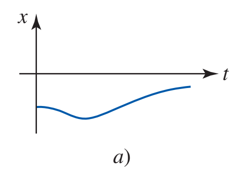
CASO II: $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ Aquí $m_1 = m_2 = -\lambda$ y se dice que el sistema está **críticamente amortiguado**, puesto que cualquier reducción ligera en la fuerza de amortiguamiento resultaría en un movimiento oscilatorio. La solución general de (6) es

$$x(t) = C_1 e^{m_1 t} + C_2 t e^{m_1 t}$$

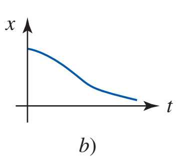
o

$$x(t) = e^{-\lambda t}(C_1 + C_2 t). \tag{8}$$

Algunas gráficas del movimiento típico se presentan en la FIGURA 16.4.7. Advierta que el movimiento es bastante similar al de un sistema sobreamortiguado. También es claro de (8) que la masa puede pasar por la posición de equilibrio al menos una vez.



a)



b)

FIGURA 16.4.7 Movimiento críticamente amortiguado de un sistema masa-resorte

CASO III: $\lambda^2 - \omega^2 < 0$ En este caso tenemos $\beta^2 < 4km$, por lo que la constante de amortiguamiento es pequeña comparada con la constante k del resorte, y se dice que el sistema está **subamortiguado**. Las raíces m_1 y m_2 son en este caso números complejos:

$$m_1 = -\lambda + \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i, \qquad m_2 = -\lambda - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,i,$$

por lo que la ecuación de movimiento dada en (7) puede escribirse como

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(C_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\,t\right). \tag{9}$$

Como se indica en la FIGURA 16.4.8, el movimiento descrito por (9) es oscilatorio, aunque debido al coeficiente $e^{-\lambda t}$ vemos que las amplitudes de vibración $\to 0$ cuando $t \to \infty$.

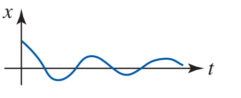


FIGURA 16.4.8 Movimiento subamortiguado de una masa-resorte

EJEMPLO 2 Un sistema con movimiento críticamente amortiguado

Una masa que pesa 8 libras estira un resorte 2 pies. Suponiendo que sobre el sistema actúa una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a dos veces la velocidad instantánea, determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 pies/s. Determine el tipo de amortiguamiento exhibido por el sistema y grafique la ecuación de movimiento.

Solución De la ley de Hooke tenemos

$$8 = k \cdot 2 \qquad \text{así que} \qquad k = 4 \text{ lb/pie},$$

y de $m = W/g$,

$$m = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}\text{slug}.$$

Puesto que la constante de amortiguamiento es $\beta = 2$, la ecuación diferencial de movimiento es

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 2\frac{dx}{dt} \qquad \text{o} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x = 0.$$

En vista de que la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 3 pies/s, las condiciones iniciales son

$$x(0) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -3.$$

Como la ecuación auxiliar de la ecuación diferencial es

$$m^2 + 8m + 16 = (m + 4)^2 = 0,$$

tenemos $m_1 = m_2 = -4$, y el sistema está críticamente amortiguado. La solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 t e^{-4t}.$$

La condición inicial $x(0) = 0$ implica de inmediato que $C_1 = 0$, en tanto que al usar $x'(0) = -3$ se obtiene $C_2 = -3$. De tal modo, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = -3te^{-4t}.$$

Para graficar $x(t)$ encontramos el tiempo en el cual $x'(t) = 0$:

$$x'(t) = -3(-4te^{-4t} + e^{-4t}) = -3e^{-4t}(1 - 4t).$$

Claramente, $x'(t) = 0$ cuando $t = \frac{1}{4}$, y el desplazamiento correspondiente es

$$x\left(\tfrac{1}{4}\right) = -\tfrac{3}{4}e^{-1} = -0.276 \text{ pie}.$$

Como se ilustra en la FIGURA 16.4.9, interpretamos que este valor significa que el peso alcanza una altura máxima de 0.276 pie sobre la posición de equilibrio. ■

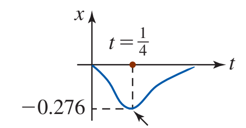


FIGURA 16.4.9 Gráfica de la ecuación de movimiento del ejemplo 2

EJEMPLO 3 Un sistema con movimiento subamortiguado

Una masa que pesa 16 lb se une a un resorte de 5 pies de largo. En equilibrio el resorte mide 8.2 pies. Si la masa se empuja hacia arriba y se suelta desde el reposo en un punto a 2 pies por arriba de la posición de equilibrio, encuentre los desplazamientos $x(t)$ si se sabe además que el medio circundante ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Determine el tipo de amortiguamiento exhibido por el sistema.

Solución La elongación del resorte después de que se une el peso es $8.2 - 5 = 3.2$ pies, por lo que se sigue de la ley de Hooke que

$$16 = k \cdot (3.2) \quad \text{y} \quad k = 5 \text{ lb/pie}.$$

Además,

$$m = \frac{16}{32} = \frac{1}{2} \text{ slug} \quad \text{y} \quad \beta = 1,$$

por lo que la ecuación diferencial está dada por

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} = -5x - \frac{dx}{dt} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 0.$$

Esta última ecuación se resuelve sujeta a las condiciones iniciales

$$x(0) = -2, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Prosiguiendo, encontramos que las raíces de $m^2 + 2m + 10 = 0$ son $m_1 = -1 + 3i$ y $m_2 = -1 - 3i$, lo cual implica entonces que el sistema está subamortiguado y

$$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos 3t + C_2 \text{ sen } 3t).$$

Ahora

$$x(0) = -2 = C_1$$
$$x(t) = e^{-t}(-2 \cos 3t + C_2 \text{ sen } 3t)$$
$$x'(t) = e^{-t}(6 \text{ sen } 3t + 3C_2 \cos 3t) - e^{-t}(-2 \cos 3t + C_2 \text{ sen } 3t)$$
$$x'(0) = 0 = 3C_2 + 2,$$

lo cual produce $C_2 = -\frac{2}{3}$. De tal modo, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = e^{-t}\left(-2 \cos 3t - \tfrac{2}{3}\text{sen } 3t\right).$$ ■

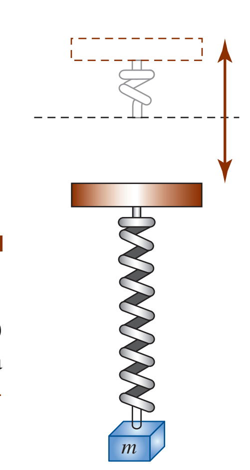


FIGURA 16.4.10 Un sistema masa-resorte forzado

Movimiento forzado Suponga que ahora tomamos en consideración una fuerza externa $f(t)$ que actúa sobre una masa vibrante en un resorte. Por ejemplo, $f(t)$ podría representar una fuerza accionadora que produjera un movimiento vertical oscilatorio del soporte del resorte. Vea la FIGURA 16.4.10. La inclusión de $f(t)$ en la formulación de la segunda ley de Newton produce

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + f(t),$$

por lo que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{f(t)}{m} \quad \text{o} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t), \tag{10}$$

donde $F(t) = f(t)/m$ y, como antes, $2\lambda = \beta/m$ y $\omega^2 = k/m$. Para resolver la última ecuación no homogénea, podemos emplear el método de coeficientes indeterminados o el de variación de parámetros.

El siguiente ejemplo ilustra el movimiento forzado sin amortiguamiento.

EJEMPLO 4 Un sistema con movimiento forzado

Resuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \operatorname{sen} \gamma t, \qquad F_0 = \text{constante},$$

$$x(0) = 0, \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

Solución La función complementaria es $x_c(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t$. Para obtener una solución particular requerimos que $\gamma \neq \omega$ y usamos el método de coeficientes indeterminados. Entonces, suponiendo $x_p = A \cos \gamma t + B \operatorname{sen} \gamma t$, tenemos

$$\begin{aligned} x_p' &= -A\gamma \operatorname{sen} \gamma t + B\gamma \cos \gamma t \\ x_p'' &= -A\gamma^2 \cos \gamma t - B\gamma^2 \operatorname{sen} \gamma t \\ x_p'' + \omega^2 x_p &= A(\omega^2 - \gamma^2) \cos \gamma t + B(\omega^2 - \gamma^2) \operatorname{sen} \gamma t \\ &= F_0 \operatorname{sen} \gamma t. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$A = 0 \quad \text{y} \quad B = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Por tanto,

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t.$$

Aplicando las condiciones iniciales dadas a la solución general

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \operatorname{sen} \omega t + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \operatorname{sen} \gamma t$$

se obtiene $C_1 = 0$ y $C_2 = -\gamma F_0/\omega(\omega^2 - \gamma^2)$. De esta manera, la ecuación de movimiento del sistema forzado es

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}(-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t), \quad \gamma \neq \omega. \tag{11}$$ ■

Resonancia pura Aunque (11) no está definida para $\gamma = \omega$, es interesante observar que su valor límite cuando $\gamma \to \omega$ puede obtenerse aplicando la regla de L'Hôpital. Este proceso de límite es análogo a "sintonizar" la frecuencia de la fuerza accionadora $\gamma/2\pi$ a la frecuencia de las vibraciones libres $\omega/2\pi$. Por intuición esperamos que, sobre una longitud de tiempo, seamos capaces de aumentar de manera sustancial las amplitudes de vibración. Para $\gamma = \omega$, definimos la solución como

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{\gamma \to \omega} F_0 \frac{-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{\dfrac{d}{d\gamma}[-\gamma \operatorname{sen} \omega t + \omega \operatorname{sen} \gamma t]}{\dfrac{d}{d\gamma}[\omega^3 - \omega\gamma^2]} \qquad \leftarrow \text{por la regla de L'Hôpital} \\ &= F_0 \lim_{\gamma \to \omega} \frac{-\operatorname{sen} \omega t + \omega t \cos \gamma t}{-2\omega\gamma} \end{aligned}$$

$$= \frac{F_0}{2\omega^2}(\text{sen } \omega t - \omega t \cos \omega t)$$

$$= \frac{F_0}{2\omega^2} \text{sen } \omega t - \frac{F_0}{2\omega} t \cos \omega t. \qquad (12)$$

Como se sospecha, cuando $t \to \infty$ estos desplazamientos se vuelven grandes; de hecho, $|x(t)| \to \infty$. El fenómeno que acabamos de describir se conoce como **resonancia pura**. La gráfica en la FIGURA 16.4.11 presenta el movimiento característico en este caso.

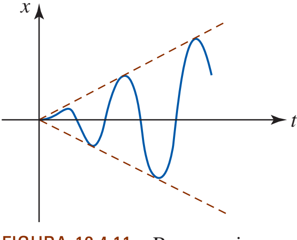


FIGURA 16.4.11 Resonancia pura

Debe notarse que no hay necesidad real de usar un proceso de límite en (11) para obtener la solución de $\gamma = \omega$. De modo alterno, (12) se deduce al resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \text{ sen } \omega t, \quad x(0) = 0, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

directamente por métodos convencionales.

Análogo de circuito en serie En conclusión, examinamos otro sistema físico que puede modelarse mediante una ecuación diferencial lineal de segundo orden similar a la ecuación diferencial de un sistema masa-resorte forzado con amortiguamiento:

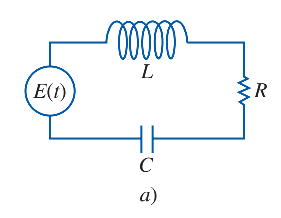
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{dx}{dt} + kx = f(t).$$

Si $i(t)$ denota la corriente en el **circuito eléctrico en serie *LRC*** que se muestra en la FIGURA 16.4.12*a*), entonces las caídas de voltaje en el inductor, resistor y capacitor son como se muestran en la figura 16.4.12*b*). Por la segunda ley de Kirchhoff, la suma de estos voltajes es igual al voltaje $E(t)$ ejercido sobre el circuito; esto es,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E(t). \qquad (13)$$

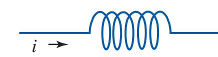
Puesto que la carga $q(t)$ sobre el capacitor se relaciona con la corriente $i(t)$ por $i = dq/dt$, (13) se convierte en la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t). \qquad (14)$$



a)

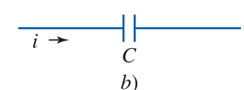
Inductor
Inductancia L: henrys (h)
caída de voltaje: $L\,\frac{di}{dt}$



Resistor
Resistencia R: ohms (Ω)
caída de voltaje: iR



Capacitor
Capacitancia C: farads (f)
caída de voltaje: $\frac{1}{C}q$



b)

FIGURA 16.4.12 Un circuito eléctrico en serie *LRC* con caídas de voltaje

Excepto por la interpretación de los símbolos utilizados en (10) y (14), no hay diferencia entre las matemáticas de los resortes vibrantes y los circuitos en serie simples. Incluso gran parte de la terminología es la misma. Si $E(t) = 0$, se dice que las vibraciones eléctricas del circuito son **libres**. Puesto que la ecuación auxiliar para (14) es $Lm^2 + Rm + 1/C = 0$, habrá tres formas de solución cuando $R \neq 0$, dependiendo del valor del discriminante $R^2 - 4L/C$. Afirmamos que el circuito es

	sobreamortiguado si	$R^2 - 4L/C > 0$,
	críticamente amortiguado si	$R^2 - 4L/C = 0$,
y	**sin amortiguamiento** si	$R^2 - 4L/C < 0$.

En cada uno de estos tres casos, la solución general de (14) contiene el factor $e^{-Rt/2L}$ y por ello la carga $q(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. En el caso sin amortiguamiento, cuando al menos la carga inicial o la corriente inicial no son cero, la carga en el capacitor oscila conforme decae. Esto es, el capacitor se carga y descarga cuando $t \to \infty$.

Recuerde que la corriente i es la derivada de la carga q, por lo que es lo mismo decir que una de las condiciones iniciales no es cero.

EJEMPLO 5 Un circuito en serie

Determine la carga $q(t)$ en el capacitor en un circuito en serie *LRC* cuando $L = 0.25$ henry (h), $R = 10$ ohms (Ω), $C = 0.001$ farad (f), $E(t) = 200$ sen $40t$ volts (V), $q(0) = 3$ coulombs (C) e $i(0) = 0$ amperes (A).

Solución Puesto que $1/C = 1\,000$, la ecuación (14) se vuelve

$$\tfrac{1}{4}q'' + 10q' + 1\,000q = 200 \text{ sen } 40t$$

o

$$q'' + 40q' + 4\,000q = 800 \text{ sen } 40t.$$

El circuito no tiene amortiguamiento debido a que las raíces de la ecuación auxiliar son números complejos $m_1 = -20 + 60i$ y $m_2 = -20 - 60i$. De tal modo, la función complementaria de la ecuación diferencial es $q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t)$. Para determinar una solución particular q_p empleamos coeficientes indeterminados y asumimos una solución de la forma $q_p = A \operatorname{sen} 40t + B \cos 40t$. Al sustituir esta expresión en la ecuación diferencial encontramos $A = \frac{3}{13}$ y $B = -\frac{2}{13}$. Así, la carga en el capacitor es

$$q(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 60t + c_2 \operatorname{sen} 60t) + \tfrac{3}{13} \operatorname{sen} 40t - \tfrac{2}{13} \cos 40t.$$

Aplicando las condiciones iniciales $q(0) = 3$ e $i(0) = q'(0) = 0$, obtenemos $c_1 = \frac{41}{13}$ y $c_2 = \frac{35}{39}$, de modo que

$$q(t) = e^{-20t}\left(\tfrac{41}{13} \cos 60t + \tfrac{35}{36} \operatorname{sen} 60t\right) + \tfrac{3}{13} \operatorname{sen} 40t - \tfrac{2}{13} \cos 40t. \quad ■$$



NOTAS DESDE EL AULA

i) Las vibraciones acústicas pueden ser tan destructivas como las grandes vibraciones mecánicas. En comerciales de televisión, cantantes de jazz han causado la destrucción de una pequeña copa de vino. Los sonidos de los órganos y los flautines se sabe que agrietan vidrios de ventanas.

Entonces el pueblo gritó y los sacerdotes tocaron las trompetas; y sucedió que cuando el pueblo oyó el sonido de la trompeta el pueblo gritó a gran voz y la muralla se vino abajo… (*Josué* 6:20)

¿La potencia de la resonancia acústica provocó el derrumbe de la muralla de Jericó? Es la conjetura de algunos eruditos contemporáneos.

ii) El fenómeno de la resonancia no siempre es destructivo. Por ejemplo, es la resonancia de un circuito eléctrico lo que permite que un radio se sintonice en una estación específica.



Efecto de rompimiento por resonancia acústica

Ejercicios 16.4

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1 y 2, enuncie en palabras una interpretación física del problema de valores iniciales indicado.

1. $\frac{4}{32}x'' + 3x = 0; \quad x(0) = -3, x'(0) = -2$

2. $\frac{1}{16}x'' + 4x = 0; \quad x(0) = 0.7, x'(0) = 0$

3. Una masa que pesa 8 lb unida a un resorte presenta movimiento armónico simple. Determine la ecuación de movimiento si la constante de resorte es 1 lb/pie y si la masa se suelta 6 pulg debajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de $\frac{3}{2}$ pies/s.

4. Una masa que pesa 24 lb unida a un resorte presenta movimiento armónico simple. Cuando se pone en el resorte, la masa lo alarga 4 pulg. Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta desde el reposo en un punto a 3 pulg encima de la posición de equilibrio.

5. Una fuerza de 400 N alarga 2 m un resorte. Una masa de 50 kg unida al resorte presenta movimiento armónico simple. Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 m/s.

6. Una masa que pesa 2 lb unida a un resorte exhibe movimiento armónico simple. En $t = 0$ la masa se suelta desde un punto a 8 pulg debajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de $\frac{4}{3}$ pies/s. Si la constante del resorte es $k = 4$ lb/pie, encuentre la ecuación de movimiento.

En los problemas 7 y 8, enuncie en palabras una interpretación física del problema de valores iniciales indicado.

7. $\frac{1}{16}x'' + 2x' + x = 0; \quad x(0) = 0, \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -1.5$

8. $\frac{16}{32}x'' + x' + 2x = 0; \quad x(0) = -2, x'(0) = 1$

9. Una masa que pesa 4 libras unida a un resorte exhibe movimiento amortiguado libre. La constante de resorte es 2 lb/pie y el medio ofrece una resistencia al movimiento de la masa numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si la masa se suelta desde 1 pie arriba de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 8 pies/s, determine el tiempo en que la masa pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el tiempo en el cual la masa alcanza su desplazamiento máximo desde la posición de equilibrio. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

10. Una masa de 40 g alarga 10 cm un resorte. Un dispositivo de amortiguamiento imparte una resistencia al movimiento numéricamente igual a 560 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento libre si la masa se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 2 cm/s.

11. Después de que una masa con 10 lb de peso se une a un resorte de 5 pies, el resorte mide 7 pies. La masa se quita y se sustituye por otra masa que pesa 8 lb y después el sistema completo se pone en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta $\frac{1}{2}$ pie debajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de 1 pie/s.

12. Una masa que pesa 24 lb alarga un resorte 4 pies. El movimiento subsecuente ocurre en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Si la masa parte desde la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 2 pies/s, demuestre que si $\beta > 3\sqrt{2}$, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = \frac{-3}{\sqrt{\beta^2 - 18}} e^{-2\beta t/3} \operatorname{senh} \frac{2}{3}\sqrt{\beta^2 - 18}\, t.$$

13. Una masa que pesa 10 lb está unida a un resorte que lo alarga 2 pies. El sistema se pone después en movimiento en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a β ($\beta > 0$) veces la velocidad instantánea. Determine los valores de β de manera que el movimiento sea

a) sobreamortiguado,
b) críticamente amortiguado y
c) sin amortiguamiento

14. Cuando una masa de 1 slug se une a un resorte lo alarga 2 pies y después queda en reposo en la posición de equilibrio. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa igual a $f(t) = 8$ sen $4t$ se aplica al sistema. Encuentre la ecuación de movimiento si el medio circundante presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a ocho veces la velocidad instantánea.

15. Resuelva el problema 14 cuando $f(t) = e^{-t}$ sen $4t$. Analice los desplazamientos para $t \to \infty$.

16. Resuelva e interprete el problema de valores iniciales:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 9x = 5 \operatorname{sen} 3t, \quad x(0) = 2, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0.$$

17. Determine la carga en el capacitor de un circuito en serie *LRC* en $t = 0.01$ s cuando $L = 0.05$ h, $R = 2\Omega$, $C = 0.01$ f, $E(t) = 0$ V, $q(0) = 5$ C e $i(0) = 0$ A. Determine la primera vez en la cual la carga en el capacitor es igual a 0.

18. Encuentre la carga en el capacitor de un circuito en serie *LRC* cuando $L = \frac{1}{4}$ h, $R = 20\Omega$, $C = \frac{1}{300}$ f, $E(t) = 0$ V, $q(0) = 4$ C e $i(0) = 0$ A. ¿La carga en el capacitor alguna vez es igual a cero?

En los problemas 19 y 20, encuentre la carga en el capacitor y la corriente del circuito en serie *LRC* dado. Determine la carga máxima en el capacitor.

19. $L = \frac{5}{3}$ h, $R = 10\ \Omega$, $C = \frac{1}{30}$ f, $E(t) = 300$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 0$ A

20. $L = 1$ h, $R = 100\Omega$, $C = 0.0004$ f, $E(t) = 30$ V, $q(0) = 0$ C, $i(0) = 2$ A

≡ Proyectos

21. Pulsos Cuando la frecuencia de una fuerza periódica impartida es exactamente la misma que la frecuencia de una vibración sin amortiguamiento libre, entonces un sistema de masa-resorte se encuentra en el estado de resonancia pura. En este estado, los desplazamientos de la masa crecen sin límite cuando $t \to \infty$. Pero cuando la frecuencia $\gamma/2\pi$ de una función impulsora periódica es cercana a la frecuencia $\omega/2\pi$ de vibraciones libres, la masa experimenta oscilaciones complicadas pero no acotadas que se conocen como **pulsos**.

a) Para examinar este fenómeno, emplee coeficientes indeterminados para demostrar que la solución del problema de valores iniciales

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \cos \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

es $$x(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos \gamma t - \cos \omega t), \quad \gamma \neq \omega.$$

b) Suponga que $\omega = 2$ y $F_0 = \frac{1}{2}$. Utilice un medio de graficación para, en ejes de coordenadas independientes, graficar curvas de solución que correspondan a $\gamma = 1$, $\gamma = 1.5$, $\gamma = 1.75$ y $\gamma = 1.9$. Emplee $0 \leq t \leq 60$ y $-3 \leq x \leq 3$.

c) Utilice una identidad trigonométrica para demostrar que la solución en el inciso *a*) puede escribirse como el producto

$$x(t) = \frac{2F_0}{\gamma^2 - \omega^2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma - \omega)t \operatorname{sen} \frac{1}{2}(\gamma + \omega)t, \quad \gamma \neq \omega.$$

d) Si $\varepsilon = \frac{1}{2}(\gamma - \omega)$, demuestre que cuando ε es pequeña, la solución en el inciso *c*) es aproximadamente

$$x(t) = \frac{F_0}{2\varepsilon\gamma} \operatorname{sen} \varepsilon t \operatorname{sen} \gamma t.$$

e) Utilice una herramienta de graficación para representar la función en el inciso *d*) con $\omega = 2$, $F_0 = \frac{1}{2}$, y $\gamma = 1.75$. Grafique después $\pm(F_0/2\varepsilon\gamma)$ sen εt en el mismo conjunto de ejes de coordenadas. Las gráficas de $\pm(F_0/2\varepsilon\gamma)$ sen εt reciben el nombre de *envolvente* de la gráfica de $x(t)$. Compare la gráfica de $x(t)$ que se obtuvo de esa manera con la tercera gráfica del inciso *b*).

16.5 Soluciones en series de potencias

Introducción Algunas ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con *coeficientes variables* pueden resolverse utilizando series de potencias. El procedimiento consiste en suponer una solución de la forma

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

diferenciando

$$y' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}, \qquad (1)$$

$$y'' = 2c_2 + 6c_3x + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}, \qquad (2)$$

y sustituyendo los resultados en la ecuación diferencial con la expectativa de determinar una relación de recurrencia que producirá los coeficientes c_n. Para hacer lo anterior es importante que usted se vuelva experto en la simplificación de la suma de dos o más series de potencias, cada serie expresada en notación sigma, a una expresión con una sola Σ. Como ilustra el siguiente ejemplo, la combinación de dos o más sumatorias como una sola sumatoria a menudo requiere una reindización, esto es, un corrimiento en el índice de la sumatoria. Para sumar dos series escritas en notación sigma es necesario que

- ambos índices de la sumatoria inicien con el mismo número y
- las potencias de x en cada serie estén en "fase", esto es, si una serie empieza con, digamos, x como la primera potencia, entonces deseamos que la otra serie empiece con la misma potencia.

EJEMPLO 1 Solución en series de potencia de una ecuación diferencial

Encuentre una solución en serie de potencias de $y'' - 2xy = 0$.

Solución Al sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n$ en la ecuación diferencial y utilizar (2) tenemos

$$\begin{aligned} y'' - 2xy &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty} c_nx^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_nx^{n+1} = 0. \end{aligned}$$

En cada serie sustituimos ahora k por el exponente en x. En la primera serie usamos $k = n - 2$, y en la segunda serie, $k = n + 1$. De tal modo,

$$\underset{k\,=\,n-2}{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}} - \underset{k\,=\,n+1}{\sum_{n=0}^{\infty} 2c_nx^{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k.$$

cuando $n = 2$, $k = 0$ — cuando $n = 0$, $k = 1$

Puesto que ambas series empiezan con $k = 1$, escribimos el primer término de la primera serie fuera de la notación de sigma y después combinamos las dos series:

$$\begin{aligned} y'' - 2xy &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 2c_{k-1}x^k \\ &= 2c_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1}]x^k = 0. \end{aligned}$$

Los coeficientes correspondientes de series de potencias iguales son ellos mismos iguales.

Puesto que la última igualdad es una identidad, el coeficiente de cada potencia de x debe ser cero. Esto es,

$$2c_2 = 0 \quad \text{y} \quad (k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_{k-1} = 0. \qquad (3)$$

Como $(k + 1)(k + 2) \neq 0$ para todos los valores de k, podemos resolver (3) para c_{k+2} en términos de c_{k-1}:

$$c_{k+2} = \frac{2c_{k-1}}{(k+2)(k+1)}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots . \qquad (4)$$

Ahora $2c_2 = 0$ indica evidentemente que $c_2 = 0$. Pero la expresión en (4), denominada **relación de recurrencia**, determina las restantes c_k de manera tal que podemos elegir cierto subconjunto

de estos coeficientes que sean *distintos de cero*. Dejando que k tome los enteros sucesivos indicados, (4) genera coeficientes consecutivos de la solución supuesta uno a la vez:

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \frac{2c_0}{3 \cdot 2} \\
c_4 &= \frac{2c_1}{4 \cdot 3} \\
c_5 &= \frac{2c_2}{5 \cdot 4} = 0 && \leftarrow c_2 = 0 \\
c_6 &= \frac{2c_3}{6 \cdot 5} = \frac{2^2}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0 \\
c_7 &= \frac{2c_4}{7 \cdot 6} = \frac{2^2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1 \\
c_8 &= \frac{2c_5}{8 \cdot 7} = 0 && \leftarrow c_5 = 0 \\
c_9 &= \frac{2c_6}{9 \cdot 8} = \frac{2^3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2} c_0 \\
c_{10} &= \frac{2c_7}{10 \cdot 9} = \frac{2^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3} c_1 \\
c_{11} &= \frac{2c_8}{11 \cdot 10} = 0, && \leftarrow c_8 = 0
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente. Debe ser claro que tanto c_0 como c_1 son arbitrarios. En este caso,

$$
\begin{aligned}
y &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + c_5x^5 + c_6x^6 + c_7x^7 + c_8x^8 \\
&\quad + c_9x^9 + c_{10}x^{10} + c_{11}x^{11} + \cdots \\
&= c_0 + c_1x + 0 + \frac{2}{3 \cdot 2}c_0x^3 + \frac{2}{4 \cdot 3}c_1x^4 + 0 + \frac{2^2}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0x^6 \\
&\quad + \frac{2^2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1x^7 + 0 + \frac{2^3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}c_0x^9 \\
&\quad + \frac{2^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}c_1x^{10} + 0 + \cdots \\
&= c_0\left[1 + \frac{2}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{2^2}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}x^6 + \frac{2^3}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}x^9 + \cdots\right] \\
&\quad + c_1\left[x + \frac{2}{4 \cdot 3}x^4 + \frac{2^2}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}x^7 + \frac{2^3}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}x^{10} + \cdots\right] \\
&= c_0y_1(x) + c_1y_2(x).
\end{aligned}
$$

■

Una serie de potencias representará una solución de la ecuación diferencial en algún intervalo de convergencia. Puesto que el patrón de coeficientes en el ejemplo 1 es claro, podemos escribir la solución en términos de notación de sumatoria. Utilizando las propiedades del factorial tenemos

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k[1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3k-2)]}{(3k)!}x^{3k} \tag{5}$$

y

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k[2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3k-1)]}{(3k+1)!}x^{3k+1}. \tag{6}$$

La prueba del cociente puede utilizarse en las formas (5) y (6) para demostrar que cada serie converge sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$.

EJEMPLO 2 Solución en series de potencias de una ecuación diferencial

Encuentre la solución en serie de potencias de $(x^2 + 1)y'' + xy' - y = 0$.

Solución La suposición $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ conduce a

$$\begin{aligned}
&(x^2+1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\
&= \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n}_{k=n} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}}_{k=n-2} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n}_{k=n} - \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}_{k=n} \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)c_{k+2} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} kc_k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \\
&= 2\cdot 1c_2 + 3\cdot 2c_3 x + c_1 x - c_0 - c_1 x \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} + kc_k - c_k]x^k \\
&= 2c_2 - c_0 + 6c_3 x \\
&\quad + \sum_{k=2}^{\infty} [(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2}]x^k = 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, debemos tener

$$\begin{aligned}
2c_2 - c_0 &= 0 \\
c_3 &= 0 \\
(k+1)(k-1)c_k + (k+2)(k+1)c_{k+2} &= 0.
\end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores producen $c_2 = \frac{1}{2}c_0$, $c_3 = 0$, así como la relación de recurrencia

$$c_{k+2} = -\frac{k-1}{k+2}c_k, \quad k = 2, 3, 4, \ldots.$$

Dejando que k tome los valores 2, 3, 4, . . . la última fórmula produce

$$\begin{aligned}
c_4 &= -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2\cdot 4}c_0 = -\frac{1}{2^2 2!}c_0 && \leftarrow c_2 = \frac{1}{2}c_0 \\
c_5 &= -\frac{2}{5}c_3 = 0 && \leftarrow c_3 = 0 \\
c_6 &= -\frac{3}{6}c_4 = \frac{3}{2\cdot 4\cdot 6}c_0 = \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}c_0 \\
c_7 &= -\frac{4}{7}c_5 = 0 && \leftarrow c_5 = 0 \\
c_8 &= -\frac{5}{8}c_6 = -\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}c_0 = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}c_0 \\
c_9 &= -\frac{6}{9}c_7 = 0 && \leftarrow c_7 = 0 \\
c_{10} &= -\frac{7}{10}c_8 = \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}c_0 = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}c_0,
\end{aligned}$$

y así sucesivamente. De tal modo,

$$\begin{aligned}
y &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 + c_6 x^6 + c_7 x^7 + c_8 x^8 + \cdots \\
&= c_1 x + c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2^2 2!}x^4 + \frac{1\cdot 3}{2^3 3!}x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4 4!}x^8 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^5 5!}x^{10} + \cdots\right] \\
&= c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x).
\end{aligned}$$

Dos soluciones de la ecuación diferencial son

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^{2n}$$

y $$y_2(x) = x.$$ ∎

Ejercicios 16.5 Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-48.

Fundamentos

En los problemas 1-18, encuentre soluciones en series de potencias de la ecuación diferencial dada.

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' - y = 0$
3. $y'' = y'$
4. $2y'' + y' = 0$
5. $y'' = xy$
6. $y'' + x^2y = 0$
7. $y'' - 2xy' + y = 0$
8. $y'' - xy' + 2y = 0$
9. $y'' + x^2y' + xy = 0$
10. $y'' + 2xy' + 2y = 0$
11. $(x - 1)y'' + y' = 0$
12. $(x + 2)y'' + xy' - y = 0$
13. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
14. $(x^2 + 1)y'' - 6y = 0$
15. $(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$
16. $(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$
17. $y'' - (x + 1)y' - y = 0$
18. $y'' - xy' - (x + 2)y = 0$

En los problemas 19 y 20, utilice el método de series de potencias para resolver la ecuación diferencial dada sujeta a las condiciones iniciales que se indican.

19. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0; \quad y(0) = -2, y'(0) = 6$
20. $y'' - 2xy' + 8y = 0; \quad y(0) = 3, y'(0) = 0$

Revisión del capítulo 16

Las respuestas de los problemas impares seleccionados comienzan en la página RES-49.

A. Verdadero/falso

En los problemas 1-8, indique si el enunciado dado es verdadero (V) o falso (F).

1. Si y_1 es una solución de $ay'' + by' + cy = 0$, a, b, c constantes, entonces C_1y_1 también es una solución para todo número real C_1. _____
2. Una solución general de $y'' - y = 0$ es $y = C_1 \cosh x + C_1 \operatorname{senh} x$. _____
3. $y_1 = e^x$ y $y_2 = 0$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial $y'' - y' = 0$. _____
4. La ecuación diferencial $y'' - y' = 10$ posee una solución particular constante $y_p = A$. _____
5. La ecuación diferencial $y'' - y' = 0$ posee un número infinito de soluciones constantes. _____
6. La ecuación diferencial de primer orden $2xy\,dx = (x^2 - e^{-y})\,dy$ es exacta. _____
7. El movimiento sin amortiguamiento y no forzado de una masa en un resorte recibe el nombre de movimiento armónico simple. _____
8. La resonancia pura no puede ocurrir cuando hay amortiguamiento. _____

B. Llene los espacios en blanco

En los problemas 1-5, llene los espacios en blanco.

1. Una solución del problema de valores iniciales $y'' + 9y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ es __________.
2. Una solución del problema de valores en la frontera $y'' - y' = 0$, $y(0) = 1$, $y(1) = 0$ es __________.
3. Si una masa que pesa 10 lb alarga 2.5 pies un resorte, entonces una masa que pese 32 lb alargará el mismo resorte __________ pies.
4. Si la ecuación auxiliar $am^2 + bm + c = 0$ para una ecuación diferencial homogénea de segundo orden posee las soluciones $m_1 = m_2 = -7$, entonces la solución general de la ecuación diferencial es __________.
5. Sin resolver, la forma de una solución particular de $y'' + 6y' + 9y = 5x^2 - 3xe^{2x}$ es $y_p =$ __________.

C. Ejercicios

En los problemas 1 y 2, determine si la ecuación diferencial dada es exacta. Si lo es, resuélvala.

1. $2x \cos y^3\,dx = (1 + 3x^2y^2 \operatorname{sen} y^3)\,dy$
2. $(3x^2 + 2y^3)\,dx + y^2(6x + 1)\,dy = 0$

En los problemas 3 y 4, resuelva el problema de valores iniciales dado.

3. $\frac{1}{2}xy^{-4}\,dx + (3y^{-3} - x^2y^{-5})\,dy = 0,\; y(1) = 1$

4. $(y^2 + y \operatorname{sen} x)\,dx + \left(2xy - \cos x - \dfrac{1}{1 + y^2}\right)dy = 0,\; y(0) = 1$

En los problemas 5-10, encuentre la solución general de la ecuación diferencial dada.

5. $y'' - 2y' - 2y = 0$ **6.** $y'' - 8y = 0$ **7.** $y'' - 3y' - 10y = 0$

8. $4y'' + 20y' + 25y = 0$ **9.** $9y'' + y = 0$ **10.** $2y'' - 5y' = 0$

En los problemas 11 y 12, resuelva el problema de valores iniciales.

11. $y'' + 36y = 0,\; y(\pi/2) = 24,\; y'(\pi/2) = -18$

12. $y'' + 4y' + 4y = 0,\; y(0) = -2,\; y'(0) = 0$

En los problemas 13 y 14, resuelva cada ecuación diferencial por el método de coeficientes indeterminados.

13. $y'' - y' - 12y = (x + 1)e^{2x}$ **14.** $y'' + 4y = 16x^2$

En los problemas 15 y 16, resuelva cada ecuación diferencial por el método de variación de parámetros.

15. $y'' - 2y' + 2y = e^x \tan x$ **16.** $y'' - y = 2e^x/(e^x + e^{-x})$

En los problemas 17 y 18, resuelva el problema de valores iniciales dado.

17. $y'' + y = \sec^3 x,\; y(0) = 1,\; y'(0) = \frac{1}{2}$ **18.** $y'' + 2y' + 2y = 1,\; y(0) = 0,\; y'(0) = 1$

En los problemas 19 y 20, encuentre soluciones en series de potencias de la ecuación diferencial dada.

19. $y'' + xy = 0$ **20.** $(x - 1)y'' + 3y = 0$

21. Un resorte con constante $k = 2$ está suspendido en un líquido que ofrece una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a cuatro veces la velocidad instantánea. Si una masa m se suspende del resorte, determine el valor de m para el cual el movimiento libre subsecuente sea no oscilatorio.

22. Determine una solución particular para $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = A$, donde A es una fuerza constante.

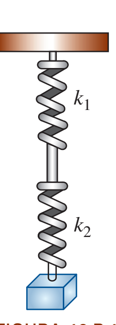


FIGURA 16.R.1 Resortes unidos del problema 24

23. Una masa que pesa 4 lb se suspende de un resorte cuya constante es 3 lb/pie. El sistema completo se sumerge en un fluido que presenta una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea. Empezando en $t = 0$, una fuerza externa igual a $f(t) = e^{-t}$ se ejerce sobre el sistema. Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta desde el reposo en un punto 2 pies por debajo de la posición de equilibrio.

24. Una masa que pesa W lb estira $\frac{1}{2}$ pie un resorte y estira $\frac{1}{4}$ pie un resorte diferente. Si los dos resortes se unen en serie, la constante de resorte efectiva k del sistema está dada por $1/k = 1/k_1 + 1/k_2$. Después la masa se une al doble resorte, como se muestra en la FIGURA 16.R.1. Suponga que el movimiento es libre y que no está presente una fuerza de amortiguamiento.

a) Determine la ecuación de movimiento si la masa se suelta en un punto a 1 pie debajo de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de $\frac{2}{3}$ pie/s.

b) Demuestre que la velocidad máxima de la masa es $\frac{2}{3}\sqrt{3g + 1}$.

25. El movimiento vertical de una masa unida a un resorte se describe mediante el problema de valores iniciales

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad x(0) = 4,\; x'(0) = 2.$$

Determine el máximo desplazamiento vertical.

Apéndice

Demostraciones de teoremas seleccionados

Sección 2.2

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.1*i*): Sea $\varepsilon > 0$ dada. Para demostrar *i*) debemos encontrar $\delta > 0$ de modo que

$$|c - c| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

Puesto que $|c - c| = 0$, lo anterior equivale a

$$\varepsilon > 0 \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

La última afirmación siempre es verdadera para cualquier elección de $\delta > 0$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3*i*): Sea $\varepsilon > 0$ dada. Para demostrar *i*) debemos encontrar $\delta > 0$ para que

$$|f(x) + g(x) - L_1 - L_2| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta.$$

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, sabemos que existen los números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ para los cuales

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1, \tag{1}$$

y

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2. \tag{2}$$

Ahora, si se elige δ como el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces *tanto* (1) *como* (2) se mantienen, por lo que

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x) - L_1 - L_2| &= |f(x) - L_1 + g(x) - L_2| \\ &\le |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

cuando $0 < |x - a| < \delta$. ■

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3*ii*): Por medio de la desigualdad del triángulo.

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - L_1L_2| &= |f(x)g(x) - f(x)L_2 + f(x)L_2 - L_1L_2| \\ &\le |f(x)g(x) - f(x)L_2| + |f(x)L_2 - L_1L_2| \\ &= |f(x)||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1| \\ &\le |f(x)||g(x) - L_2| + (1 + |L_2|)|f(x) - L_1|. \end{aligned} \tag{3}$$

Puesto que $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$, se sabe que existen números $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ tales que $|f(x) - L_1| < 1$ o

$$|f(x)| < 1 + |L_1| \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_1, \tag{4}$$

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_2|} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_2, \tag{5}$$

y

$$|g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon/2}{1 + |L_1|} \qquad \text{cuando} \qquad 0 < |x - a| < \delta_3. \tag{6}$$

En consecuencia, si se selecciona δ como el número más pequeño en el conjunto de números positivos $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces de (3), (4), (5) y (6) se tiene,

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| < (1 + |L_1|)\cdot\frac{\varepsilon/2}{1 + |L_1|} + (1 + |L_2|)\cdot\frac{\varepsilon/2}{1 + |L_2|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.2.3*iii*): Primero demostraremos que

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{L_2}, \quad L_2 \neq 0.$$

Considere

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|g(x) - L_2|}{|L_2||g(x)|}. \tag{7}$$

Puesto que $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, entonces existe una $\delta_1 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|}{2} \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_1.$$

Para estos valores de x, la desigualdad

$$|L_2| = |g(x) - (g(x) - L_2)| \leq |g(x)| + |g(x) - L_2| < |g(x)| + \frac{|L_2|}{2}$$

resulta en

$$|g(x)| > \frac{|L_2|}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|L_2|}.$$

Por tanto, de (7),

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| < \frac{2}{|L_2|^2}|g(x) - L_2|. \tag{8}$$

Ahora para $\varepsilon > 0$ existe una $\delta_2 > 0$ tal que

$$|g(x) - L_2| < \frac{|L_2|^2}{2}\varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

Al elegir δ como el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2\}$, se sigue de (8) que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Se concluye la demostración aplicando el teorema 2.2.3*ii*):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\cdot f(x) = \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}f(x) = \frac{L_1}{L_2}. \quad \blacksquare$$

Sección 2.3

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.3.3: Para demostrar el teorema primero tiene que encontrarse una $\delta > 0$ tal que

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Para tal propósito, primero consideramos que f es continua en L, en otras palabras, $\lim_{u\to L} f(u) = f(L)$. Lo anterior significa que para una $\varepsilon > 0$ dada, existen una $\delta_1 > 0$ de tal modo que

$$|f(u) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |u - L| < \delta_1.$$

Ahora si $u = g(x)$, entonces lo anterior es

$$|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |g(x) - L| < \delta_1.$$

También de la suposición de que $\lim_{x\to a} g(x) = L$, sabemos que existe una $\delta > 0$ de manera que

$$|g(x) - L| < \delta_1 \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta.$$

Ahora combinamos los últimos dos resultados. Esto es, siempre que $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|g(x) - L| < \delta_1$; pero cuando $|g(x) - L| < \delta_1$, entonces necesariamente $|f(g(x)) - f(L)| < \varepsilon$. $\blacksquare$

Sección 2.4

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 2.4.1: Se asume que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene al número a (con la posible excepción de a mismo) y donde $\lim_{x\to a} g(x) = L$ y $\lim_{x\to a} h(x) = L$. Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen los números $\delta_1 > 0$ y $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - a| < \delta_1$ y $|h(x) - L| < \varepsilon$ cuando $0 < |x - a| < \delta_2$. Esto es,

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_1$$
$$L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_2.$$

También es necesario que exista $\delta_3 > 0$ tal que

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{cuando} \quad 0 < |x - a| < \delta_3.$$

Si se considera δ el número más pequeño en el conjunto de los números positivos $\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, entonces para $0 < |x - a| < \delta$ se tiene

$$L - \varepsilon < g(x) \leq f(x) \leq h(x) < L + \varepsilon$$

o de manera equivalente $|f(x) - L| < \varepsilon$. Lo cual significa que $\lim_{x\to a} f(x) = L$. ■

Sección 9.10

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 9.10.2 Sea x un número fijo en el intervalo $(a - r, a + r)$ y considere que la diferencia entre $f(x)$ y el grado n-ésimo del polinomio de Taylor de f en a se denota por medio de

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x).$$

Para cualquier t en el intervalo $[a, x]$ definimos

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x - t) - \frac{f''(t)}{2!}(x - t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x - t)^n - \frac{R_n(x)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^{n+1}. \qquad (9)$$

Manteniendo x constante se diferencia F con respecto a t utilizando las reglas de producto y potencia:

$$\begin{aligned} F'(t) = -f'(t) &+ \left[f'(t) - \frac{f''(t)}{1!}(x - t)\right] + \left[\frac{f''(t)}{1!}(x - t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x - t)^2\right] + \cdots \\ &+ \left[\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x - t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n\right] + \frac{R_n(x)(n + 1)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^n, \end{aligned}$$

para toda t en el intervalo abierto (a, x). Puesto que la última suma es telescópica, obtenemos

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n + \frac{R_n(x)(n + 1)}{(x - a)^{n+1}}(x - t)^n. \qquad (10)$$

Ahora es evidente de (9) que F es continua en $[a, x]$ y que

$$F(x) = f(x) - f(x) - 0 - \cdots - 0 = 0.$$

Adicionalmente, $$F(a) = f(x) - P_n(x) - R_n(x) = 0.$$

Por tanto, $F(t)$ satisface la hipótesis del teorema de Rolle (teorema 4.4.1) en $[a, x]$ y por ello existe un número c entre a y x para el cual $F'(c) = 0$. De (10) se obtiene

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}.$$ ■

Repaso de álgebra

Enteros

$\{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Enteros positivos (números naturales)

$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Enteros no negativos (números enteros)

$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Números racionales

Un número racional es un número en la forma p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números irracionales

Un número irracional es un número que no puede escribirse en la forma p/q, donde p y $q \neq 0$ son enteros.

Números reales

El conjunto R de números reales es la unión de los conjuntos de números racionales e irracionales.

Leyes de exponentes

$$a^m a^n = a^{m+n}, \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad a^0 = 1, a \neq 0$$

Exponente negativo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \; n > 0$$

Radical

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \; n > 0 \text{ un entero}$$

Exponentes racionales y radicales

$$a^{m/n} = \left(a^m\right)^{1/n} = \left(a^{1/n}\right)^m$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Fórmula cuadrática

Las raíces de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Expansiones binomiales

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Triángulo de Pascal

Los coeficientes en la expansión de $(a + b)^n$ siguen el patrón:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
⋮

Cada número en el interior de este arreglo es la suma de los dos números directamente arriba del mismo:

1 4 6 4 1
↘↙↘↙↘↙↘↙
1 5 10 10 5 1

El último renglón son los coeficientes en la expansión de $(a + b)^5$.

Fórmulas de factorización

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$$

Definición del valor absoluto

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \text{ es no negativo } (a \geq 0) \\ -a & \text{si } a \text{ es negativo } (a < 0) \end{cases}$$

Propiedades de desigualdades

Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
Si $a < b$, entonces $ac < bc$ para $c > 0$.
Si $a < b$, entonces $ac > bc$ para $c < 0$.

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Fórmulas de geometría

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Área A, circunferencia C, volumen V, área superficial S

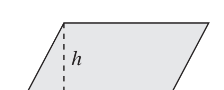
RECTÁNGULO

w

l

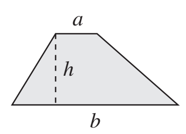
$A = lw, \ C = 2l + 2w$

PARALELOGRAMO



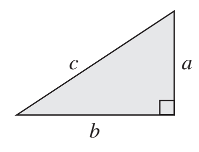
$A = bh$

TRAPEZOIDE



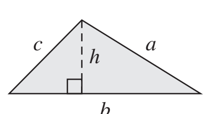
$A = \frac{1}{2}(a + b)h$

TRIÁNGULO RECTÁNGULO



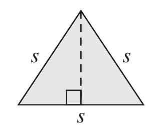
Teorema de Pitágoras:
$c^2 = a^2 + b^2$

TRIÁNGULO



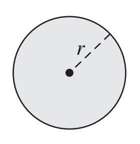
$A = \frac{1}{2}bh, \ C = a + b + c$

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



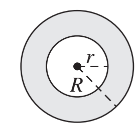
$h = \frac{\sqrt{3}}{2}s, \ A = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$

CÍRCULO



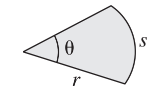
$A = \pi r^2, \ C = 2\pi r$

ANILLO CIRCULAR



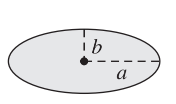
$A = \pi(R^2 - r^2)$

SECTOR CIRCULAR



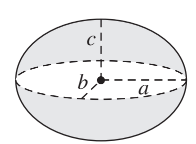
$A = \frac{1}{2}r^2\theta, \ s = r\theta$

ELIPSE



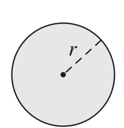
$A = \pi ab$

ELIPSOIDE

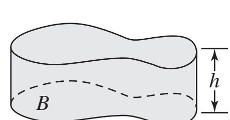
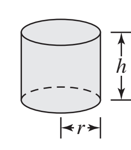
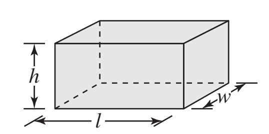
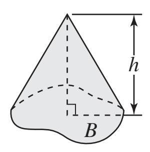
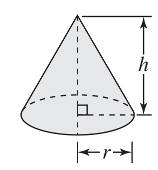
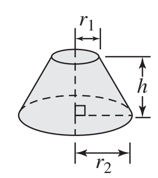


$V = \frac{4}{3}\pi abc$


ESFERA



$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \ S = 4\pi r^2$

CILINDRO RECTO	CILINDRO CIRCULAR RECTO	PARALELEPÍPEDO RECTANGULAR
		
$V = Bh$, B, área de la base	$V = \pi r^2 h$, $S = 2\pi rh$ (lado lateral)	$V = lwh$, $S = 2(hl + lw + hw)$
CONO	CONO CIRCULAR RECTO	FRUSTO DE UN CONO
		
$V = \frac{1}{3}Bh$, B, área de la base	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$	$V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

Gráficas y funciones

Para encontrar intersecciones

intersecciones y: Sea $x = 0$ en la ecuación y resolvemos para y
intersecciones x: Sea $y = 0$ en la ecuación y resolvemos para x

Funciones de polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde n es un entero no negativo.

Función lineal

$$f(x) = ax + b, a \neq 0$$

La gráfica de una función lineal es una recta.

Formas de ecuaciones de rectas:

Punto pendiente: $y - x_0 = m(x - x_0)$,
Pendiente ordenada al origen: $y = mx + b$,

donde m es la pendiente.

Función cuadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola.

Vértice (*h*, *k*) de una parábola

Complete el cuadrado en x para $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obtener $f(x) = a(x - h)^2 + k$. De manera alterna, calcule las coordenadas

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

Funciones par e impar

Par: $f(-x) = f(x)$; simetría de la gráfica: el eje y
Impar: $f(-x) = -f(x)$; simetría de la gráfica: el origen

Transformaciones rígidas

La gráfica de $y = f(x)$ para $c > 0$:

$y = f(x) + c$, desplazada hacia arriba c unidades
$y = f(x) - c$, desplazada hacia abajo c unidades
$y = f(x + c)$, desplazada hacia la izquierda c unidades
$y = f(x - c)$, desplazada hacia la derecha c unidades
$y = f(-x)$, reflexión sobre el eje y
$y = -f(x)$, reflexión sobre el eje x

Función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales.

Asíntotas

Si las funciones polinomiales $p(x)$ y $q(x)$ no tienen ningún factor en común, entonces la gráfica de la función racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

tiene una

Asíntota vertical:
$x = a$ cuando $q(a) = 0$,
Asíntota horizontal:
$y = a_n/b_m$ cuando $n = m$ y $y = 0$ cuando $n < m$,
Asíntota oblicua:
$y = ax + b$ cuando $n = m + 1$.

La gráfica no tiene una asíntota horizontal cuando $n > m$. Una asíntota oblicua se encuentra mediante una división.

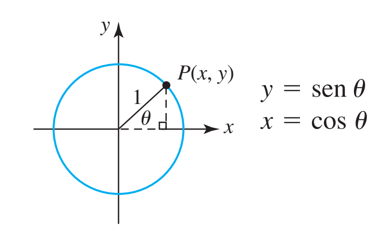
Función potencia

$$f(x) = x^n,$$

donde n es cualquier número real.

Revisión de trigonometría

Definición de seno y coseno de acuerdo con el círculo unitario



Otras funciones trigonométricas

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

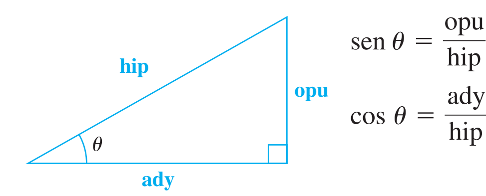
$$\sec\theta = \frac{1}{x} = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \csc\theta = \frac{1}{y} = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}$$

Fórmulas de conversión

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes}$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Definición de seno y coseno de acuerdo con el triángulo recto

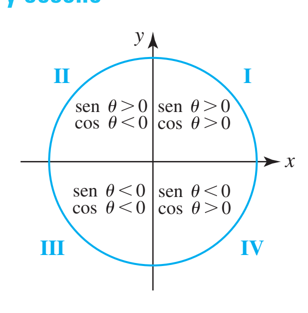


Otras funciones trigonométricas

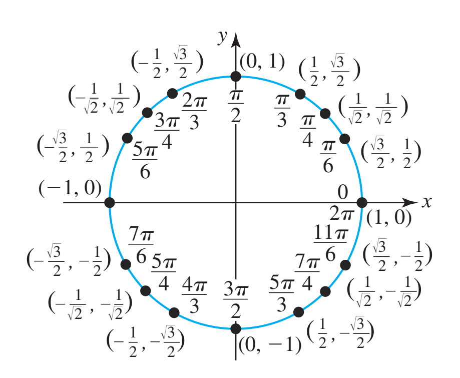
$$\tan\theta = \frac{\text{opu}}{\text{ady}}, \quad \cot\theta = \frac{\text{ady}}{\text{opu}}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{hip}}{\text{ady}}, \quad \csc\theta = \frac{\text{hip}}{\text{opu}}$$

Signos de seno y coseno



Valores de seno y coseno para ángulos especiales



Límites para las funciones seno y coseno

$-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ y $-1 \le \cos x \le 1$

Periodicidad de las funciones trigonométricas

$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\sec(x + 2\pi) = \sec x, \quad \csc(x + 2\pi) = \csc x$

$\tan(x + \pi) = \tan x, \quad \cot(x + \pi) = \cot x$

Identidades de cofunción

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Identidades pitagóricas

$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Identidades par/impar

Par	Impar
$\cos(-x) = \cos x$	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

Fórmulas de suma

$$\operatorname{sen}(x_1 + x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 + x_2) = \frac{\tan x_1 + \tan x_2}{1 - \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas de diferencia

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\cos(x_1 - x_2) = \cos x_1 \cos x_2 + \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2$$

$$\tan(x_1 - x_2) = \frac{\tan x_1 - \tan x_2}{1 + \tan x_1 \tan x_2}$$

Fórmulas del ángulo doble

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

Fórmulas alternas del ángulo doble para coseno

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Fórmulas del medio ángulo como se usa en cálculo

$$\operatorname{sen}^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

Leyes de los senos

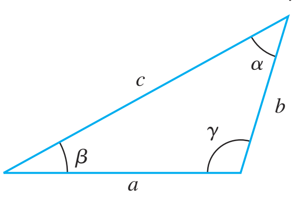
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c}$$

Leyes de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$



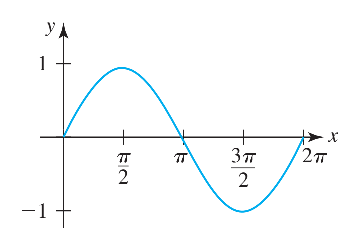
Funciones trigonométricas inversas

$y = \operatorname{sen}^{-1} x$ si y sólo si $x = \operatorname{sen} y$, $\quad -\pi/2 \le y \le \pi/2$

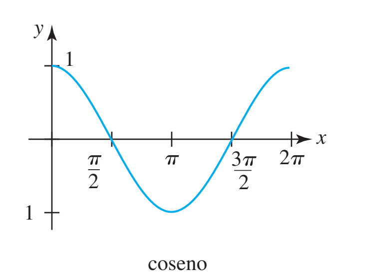
$y = \cos^{-1} x$ si y sólo si $x = \cos y$, $\quad 0 \le y \le \pi$

$y = \tan^{-1} x$ si y sólo si $x = \tan y$, $\quad -\pi/2 < y < \pi/2$

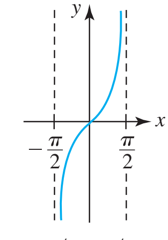
Ciclos para seno, coseno y tangente



seno



coseno



tangente

Funciones exponencial y logarítmica

El número e

$e = 2.718281828459...$

Definiciones del número e

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$e = \lim_{h \to 0}(1 + h)^{1/h}$$

Función exponencial

$f(x) = b^x,\ b > 0, b \neq 1$

Función exponencial natural

$f(x) = e^x$

Función logarítmica

$f(x) = \log_b x, \quad x > 0$

donde $y = \log_b x$ es equivalente a $x = b^y$

Función logarítmica natural

$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$

donde $y = \ln x$ es equivalente a $x = e^y$

Leyes de logaritmos

$\log_b MN = \log_b M + \log_b N$

$\log_b \dfrac{M}{N} = \log_b M - \log_b N$

$\log_b M^c = c \log_b M$

Propiedades de logaritmos

$\log_b b = 1, \qquad \log_b 1 = 0$

$\log_b b^x = x, \qquad b^{\log_b x} = x$

Cambio de la base b a la base e

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

Funciones hiperbólicas

$\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$

$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

Funciones hiperbólicas inversas como logaritmos

$\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right), \ x \geq 1$

$\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1 + x}{1 - x}\right), \ |x| < 1$

$\coth^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right), \ |x| > 1$

$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right), \ 0 < x \leq 1$

$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{|x|}\right), \ x \neq 0$

Identidades par/impar

Par	**Impar**
$\cosh(-x) = \cosh x$	$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$

Identidades adicionales

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$

$\operatorname{senh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{senh} x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \operatorname{senh} x_2$

$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \operatorname{senh} x_1 \operatorname{senh} x_2$

$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x$

$\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}(-1 + \cosh 2x)$

$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cosh 2x)$

Diferenciación

Reglas

1. Constante: $\dfrac{d}{dx}c = 0$

2. Múltiplo constante: $\dfrac{d}{dx}cf(x) = cf'(x)$

3. Suma: $\dfrac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$

4. Producto: $\dfrac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$

5. Cociente: $\dfrac{d}{dx}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

6. Cadena: $\dfrac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

7. Potencia: $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

8. Potencia: $\dfrac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1}g'(x)$

Funciones

Trigonométricas:

9. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$

10. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$

11. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

12. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

13. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

14. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Trigonométricas inversas:

15. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

16. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

17. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} x = \dfrac{1}{1 + x^2}$

18. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1} x = -\dfrac{1}{1 + x^2}$

19. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

20. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1} x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Hiperbólicas:

21. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} x = \cosh x$

22. $\dfrac{d}{dx}\cosh x = \operatorname{senh} x$

23. $\dfrac{d}{dx}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$

24. $\dfrac{d}{dx}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$

25. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$

26. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$

Hiperbólicas inversas:

27. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28. $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1 - x^2}$

30. $\dfrac{d}{dx}\coth^{-1} x = \dfrac{1}{1 - x^2}$

31. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} x = -\dfrac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$

32. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 + 1}}$

Exponenciales:

33. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

34. $\dfrac{d}{dx}b^x = b^x(\ln b)$

Logarítmicas:

35. $\dfrac{d}{dx}\ln|x| = \dfrac{1}{x}$

36. $\dfrac{d}{dx}\log_b x = \dfrac{1}{x(\ln b)}$

Fórmulas de integración

Formas básicas

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + C,\ n \neq -1$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \frac{1}{\ln a}a^u + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

17. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

18. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

19. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

20. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2 + u^2}$

21. $\int \sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} + \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

22. $\int u^2\sqrt{a^2+u^2}\,du = \frac{u}{8}(a^2 + 2u^2)\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^4}{8}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

23. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2+u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+u^2}}{u}\right| + C$

24. $\int \frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{u} + \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

25. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

26. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{a^2+u^2} - \frac{a^2}{2}\ln|u + \sqrt{a^2+u^2}| + C$

27. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+u^2}+a}{u}\right| + C$

28. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+u^2}}{a^2u} + C$

29. $\int \frac{du}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2+u^2}} + C$

Formas que implican $\sqrt{a^2 - u^2}$

30. $\int \sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

31. $\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2 - a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

32. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u}\,du = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

33. $\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2}\,du = -\frac{1}{u}\sqrt{a^2-u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

34. $\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

35. $\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$

36. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a^2u}\sqrt{a^2-u^2}+C$

37. $\displaystyle\int (a^2-u^2)^{3/2}\,du = -\frac{u}{8}(2u^2-5a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{3a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a}+C$

38. $\displaystyle\int \frac{du}{(a^2-u^2)^{3/2}} = \frac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}}+C$

Formas que implican $\sqrt{u^2-a^2}$

39. $\displaystyle\int \sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

40. $\displaystyle\int u^2\sqrt{u^2-a^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{u^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

41. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u}\,du = \sqrt{u^2-a^2} - a\cos^{-1}\frac{a}{u}+C$

42. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u} + \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

44. $\displaystyle\int \frac{u^2du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$

45. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{\sqrt{u^2-a^2}}{a^2u}+C$

46. $\displaystyle\int \frac{du}{(u^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{u}{a^2\sqrt{u^2-a^2}}+C$

Formas que implican $a + bu$

47. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{a+bu} = \frac{1}{b^2}(a+bu-a\ln|a+bu|)+C$

48. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{a+bu} = \frac{1}{2b^3}\left[(a+bu)^2-4a(a+bu) + 2a^2\ln|a+bu|\right]+C$

49. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{u}{a+bu}\right|+C$

50. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2(a+bu)} = -\frac{1}{au}+\frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

51. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{(a+bu)^2} = \frac{a}{b^2(a+bu)}+\frac{1}{b^2}\ln|a+bu|+C$

52. $\displaystyle\int \frac{du}{u(a+bu)^2} = \frac{1}{a(a+bu)}-\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right|+C$

53. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{(a+bu)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bu-\frac{a^2}{a+bu}-2a\ln|a+bu|\right)+C$

54. $\displaystyle\int u\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2}{15b^2}(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}+C$

55. $\displaystyle\int \frac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{3b^2}(bu-2a)\sqrt{a+bu}+C$

56. $\displaystyle\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2}{15b^3}(8a^2+3b^2u^2-4abu)\sqrt{a+bu}+C$

57. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\frac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right|+C,\ \text{si } a>0$

$\displaystyle = \frac{2}{\sqrt{-a}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+bu}{-a}}+C,\ \text{si } a<0$

58. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u}\,du = 2\sqrt{a+bu}+a\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

59. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a+bu}}{u^2}\,du = -\frac{\sqrt{a+bu}}{u}+\frac{b}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{a+bu}}$

60. $\displaystyle\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \frac{2u^n(a+bu)^{3/2}}{b(2n+3)} - \frac{2na}{b(2n+3)}\int u^{n-1}\sqrt{a+bu}\,du$

61. $\displaystyle\int \frac{u^n\,du}{\sqrt{a+bu}} = \frac{2u^n\sqrt{a+bu}}{b(2n+1)}-\frac{2na}{b(2n+1)}\int\frac{u^{n-1}\,du}{\sqrt{a+bu}}$

62. $\displaystyle\int \frac{du}{u^n\sqrt{a+bu}} = -\frac{\sqrt{a+bu}}{a(n-1)u^{n-1}} - \frac{b(2n-3)}{2a(n-1)}\int\frac{du}{u^{n-1}\sqrt{a+bu}}$

Formas trigonométricas

63. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{1}{2}u-\frac{1}{4}\operatorname{sen}2u+C$

64. $\displaystyle\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\operatorname{sen}2u+C$

65. $\displaystyle\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

66. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

67. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\frac{1}{3}(2+\operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

68. $\displaystyle\int \cos^3 u\,du = \frac{1}{3}(2+\cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

69. $\displaystyle\int \tan^3 u\,du = \frac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

70. $\displaystyle\int \cot^2 u\,du = -\frac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

71. $\displaystyle\int \sec^3 u\,du = \frac{1}{2}\sec u\tan u + \frac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

72. $\int \csc^3 u\, du = -\frac{1}{2}\csc u \cot u + \frac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

73. $\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

74. $\int \cos^n u\, du = \frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

75. $\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du$

76. $\int \cot^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du$

77. $\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan u \sec^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du$

78. $\int \csc^n u\, du = \frac{-1}{n-1}\cot u \csc^{n-2} u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du$

79. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

80. $\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C$

81. $\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C$

82. $\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

83. $\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

84. $\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1}\cos u\, du$

85. $\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1}\operatorname{sen} u\, du$

86. $$\int \operatorname{sen}^n u \cos^m u\, du = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} u \cos^{m+1} u}{n+m} + \frac{n-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^{n-1} u \cos^m u\, du = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} u \cos^{m-1} u}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \operatorname{sen}^n u \cos^{m-2} u\, du$$

87. $\int \frac{du}{1 - \operatorname{sen} au} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + C$

88. $\int \frac{du}{1 + \operatorname{sen} au} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right) + C$

89. $$\int \frac{u\,du}{1 - \operatorname{sen} au} = \frac{u}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{au}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ln\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{au}{2}\right)\right| + C$$

Formas trigonométricas inversas

90. $\int \operatorname{sen}^{-1} u\, du = u \operatorname{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

91. $\int \cos^{-1} u\, du = u \cos^{-1} u - \sqrt{1-u^2} + C$

92. $\int \tan^{-1} u\, du = u \tan^{-1} u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

93. $\int u \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\operatorname{sen}^{-1} u + \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

94. $\int u \cos^{-1} u\, du = \frac{2u^2-1}{4}\cos^{-1} u - \frac{u\sqrt{1-u^2}}{4} + C$

95. $\int u \tan^{-1} u\, du = \frac{u^2+1}{2}\tan^{-1} u - \frac{u}{2} + C$

96. $$\int u^n \operatorname{sen}^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\operatorname{sen}^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$$

97. $$\int u^n \cos^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\cos^{-1} u + \int \frac{u^{n+1}\,du}{\sqrt{1-u^2}}\right], \quad n \neq -1$$

98. $$\int u^n \tan^{-1} u\, du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}\,du}{1+u^2}\right], \quad n \neq -1$$

Formas exponenciales y logarítmicas

99. $\int ue^{au}\, du = \frac{1}{a^2}(au-1)e^{au} + C$

100. $\int u^n e^{au}\, du = \frac{1}{a}u^n e^{au} - \frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}\, du$

101. $\int e^{au}\operatorname{sen} bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a \operatorname{sen} bu - b\cos bu) + C$

102. $\int e^{au}\cos bu\, du = \frac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\operatorname{sen} bu) + C$

103. $\int \ln u\, du = u\ln u - u + C$

104. $\int \frac{1}{u\ln u}\, du = \ln|\ln u| + C$

105. $\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + C$

106. $$\int u^m \ln^n u\, du = \frac{u^{m+1}\ln^n u}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int u^m \ln^{n-1} u\, du, \quad m \neq -1$$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

107. $\int \ln(u^2 + a^2)\, du = u \ln(u^2 + a^2) - 2u + 2a \tan^{-1}\frac{u}{a} + C$

108. $\int \ln|u^2 - a^2|\, du = u \ln|u^2 - a^2| - 2u + a \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$

109. $\int \frac{du}{a + be^u} = \frac{u}{a} - \frac{1}{a}\ln|a + be^u| + C$

Formas hiperbólicas

110. $\int \operatorname{senh} u\, du = \cosh u + C$

111. $\int \cosh u\, du = \operatorname{senh} u + C$

112. $\int \tanh u\, du = \ln(\cosh u) + C$

113. $\int \coth u\, du = \ln|\operatorname{senh} u| + C$

114. $\int \operatorname{sech} u\, du = \tan^{-1}(\operatorname{senh} u) + C$

115. $\int \operatorname{csch} u\, du = \ln|\tanh \tfrac{1}{2} u| + C$

116. $\int \operatorname{sech}^2 u\, du = \tanh u + C$

117. $\int \operatorname{csch}^2 u\, du = -\coth u + C$

118. $\int \operatorname{sech} u \tanh u\, du = -\operatorname{sech} u + C$

119. $\int \operatorname{csch} u \coth u\, du = -\operatorname{csch} u + C$

Formas que implican $\sqrt{2au - u^2}$

120. $\int \sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{u-a}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

121. $\int u\sqrt{2au - u^2}\, du = \frac{2u^2 - au - 3a^2}{6}\sqrt{2au - u^2} + \frac{a^3}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

122. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u}\, du = \sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

123. $\int \frac{\sqrt{2au - u^2}}{u^2}\, du = -\frac{2\sqrt{2au - u^2}}{u} - \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

124. $\int \frac{du}{\sqrt{2au - u^2}} = \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

125. $\int \frac{u\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\sqrt{2au - u^2} + a \cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

126. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{2au - u^2}} = -\frac{(u + 3a)}{2}\sqrt{2au - u^2} + \frac{3a^2}{2}\cos^{-1}\left(\frac{a-u}{a}\right) + C$

127. $\int \frac{du}{u\sqrt{2ua - u^2}} = -\frac{\sqrt{2au - u^2}}{au} + C$

Algunas integrales definidas

128. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

129. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

FÓRMULAS MATEMÁTICAS

Respuestas de los problemas impares seleccionados

Autoevaluación, página xiii

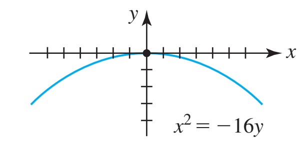
1. falso **2.** verdadero
3. falso **4.** verdadero
5. 12 **6.** -243
7. $\dfrac{3x^3+8x}{\sqrt{x^2+4}}$ **8.** $2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$
9. ***a)*** 0, 7 ***b)*** $-1+\sqrt{6}, -1-\sqrt{6}$
c) 1 ***d)*** 1
10. ***a)*** $(5x+1)(2x-3)$ ***b)*** $x^2(x+3)(x-5)$
c) $(x-3)(x^2+3x+9)$ ***d)*** $(x-2)(x+2)(x^2+4)$
11. falso **12.** falso
13. verdadero **14.** 6; -6
15. $-a+5$ **16.** ***a***), ***b***), ***d***), ***e***), ***g***), ***h***), ***i***), ***l***)
17. *i*) ***d***); *ii*) ***c***), *iii*) ***a***); *iv*) ***b***)
18. ***a)*** $-2<x<2$; ***b)*** $|x|<2$
19. (recta numérica: -1, 3) **20.** $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{8}{3},\infty\right)$
21. $(-\infty,-5]\cup[3,\infty)$ **22.** $(-\infty,-2)\cup[0,1]$
23. cuarto **24.** $(5,-7)$
25. -12; 9
26. ***a)*** $(1,-5)$ ***b)*** $(-1,5)$ ***c)*** $(-1,-5)$
27. $(-2,0)$, $(0,-4)$, $(0,4)$ **28.** segundo y cuarto
29. $x=6$ o $x=-4$ **30.** $x^2+y^2=25$
31. $d(P_1,P_2)+d(P_2,P_3)=d(P_1,P_3)$
32. ***c)*** **33.** falso
34. -27 **35.** 8
36. $\frac{2}{3}$; $(-9,0)$; $(0,6)$ **37.** $y=-5x+3$
38. $y=2x-14$ **39.** $y=-\frac{1}{3}x+3$
40. $y=-\frac{5}{8}x$ **41.** $x-\sqrt{3}y+4\sqrt{3}-7=0$
42. *i*) ***g***); *ii*) ***e***); *iii*) ***h***); *iv*) ***a***); *v*) ***b***); *vi*) ***f***); *vii*) ***d***); *viii*) ***c***)
43. falso **44.** falso **45.** $4\pi/3$ **46.** 15
47. 0.23 **48.** $\cos t=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$
49. $\operatorname{sen}\theta=\frac{3}{5}$; $\cos\theta=\frac{4}{5}$; $\tan\theta=\frac{3}{4}$; $\cot\theta=\frac{4}{3}$; $\sec\theta=\frac{5}{4}$; $\csc\theta=\frac{5}{3}$
50. $b=10\tan\theta$, $c=10\sec\theta$ **51.** $k=10\ln 5$
52. $4=64^{1/3}$ **53.** $\log_b 125$
54. aproximadamente 2.3347 **55.** 1 000
56. verdadero

Ejercicios 10.1, página 558

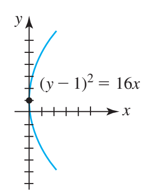
1. vértice: $(0,0)$; foco: $(1,0)$; directriz: $x=-1$; eje: $y=0$;

$y^2=4x$

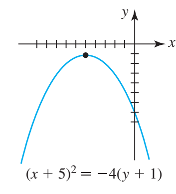
3. vértice: $(0,0)$; foco: $(0,-4)$; directriz: $y=4$; eje: $x=0$;



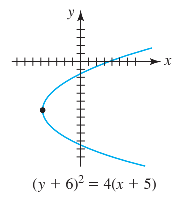
5. vértice: $(0,1)$; foco: $(4,1)$; directriz: $x=-4$; eje: $y=1$;



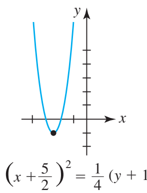
7. vértice: $(-5,-1)$; foco: $(-5,-2)$; directriz: $y=0$; eje: $x=-5$;



9. vértice: $(-5,-6)$; foco: $(-4,-6)$; directriz: $x=-6$; eje: $y=-6$

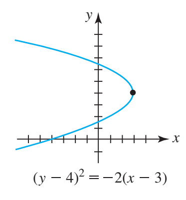


11. vértice: $\left(-\frac{5}{2},-1\right)$; foco: $\left(-\frac{5}{2},-\frac{15}{16}\right)$; directriz: $y=-\frac{17}{16}$; eje: $x=-\frac{5}{2}$;



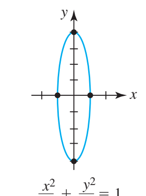
$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(y+1)$

13. vértice: $(3,4)$; foco: $\left(\frac{5}{2},4\right)$; directriz: $x=\frac{7}{2}$; eje: $y=4$;

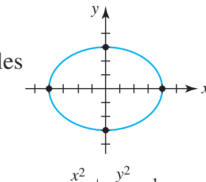


15. $x^2=28y$ **17.** $y^2=10x$ **19.** $(y+7)^2=12(x+2)$
21. $x^2=\frac{1}{2}y$ **23.** $(3,0)$, $(0,-2)$, $(0,-6)$

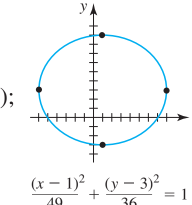
25. centro: $(0,0)$; focos: $\left(0,\pm\sqrt{15}\right)$; terminales del eje menor: $(\pm1,0)$; vértices: $(0,\pm4)$; puntos excentricidad: $\frac{\sqrt{15}}{4}$;



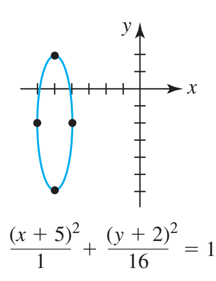
27. centro: $(0,0)$; focos: $\left(\pm\sqrt{7},0\right)$; vértices: $(\pm4,0)$; puntos terminales del eje menor: $(0,\pm3)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{7}}{4}$



29. centro: $(1,3)$; focos: $\left(1\pm\sqrt{13},3\right)$; vértices: $(-6,3)$, $(8,3)$; puntos terminales del eje menor: $(1,-3)$, $(1,9)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{13}}{7}$.

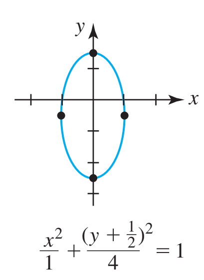


31. centro: $(-5, -2)$; focos: $\left(-5, -2 \pm \sqrt{15}\right)$; vértices: $(-5, -6)$; $(-5, 2)$; puntos terminales del eje menor: $(-6, -2)$, $(-4, -2)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{15}}{4}$;



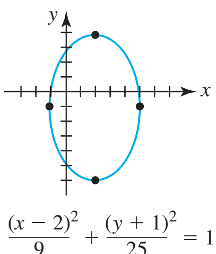
$$\frac{(x+5)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

33. centro: $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$; focos: $\left(0, -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}\right)$; vértices: $\left(0, -\frac{5}{2}\right), \left(0, \frac{3}{2}\right)$; puntos terminales del eje menor: $\left(-1, -\frac{1}{2}\right), \left(1, -\frac{1}{2}\right)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{3}}{2}$;



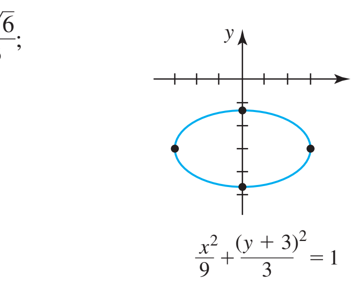
$$\frac{x^2}{1} + \frac{(y+\frac{1}{2})^2}{4} = 1$$

35. centro: $(2, -1)$; focos: $(2, -5)$, $(2, 3)$; vértices: $(2, -6)$, $(2, 4)$; puntos terminales del eje menor: $(-1, -1)$, $(5, -1)$; excentricidad: $\frac{4}{5}$;



$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

37. centro: $(0, -3)$; focos: $\left(\pm\sqrt{6}, -3\right)$; vértices: $(-3, -3)$, $(3, -3)$; puntos terminales del eje menor: $\left(0, -3 \pm \sqrt{3}\right)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{6}}{3}$;



$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{3} = 1$$

39. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

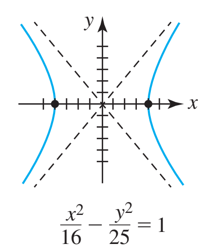
41. $\dfrac{(x-1)^2}{16} + \dfrac{(y+3)^2}{4} = 1$

43. $\dfrac{x^2}{11} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

45. $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{12} = 1$

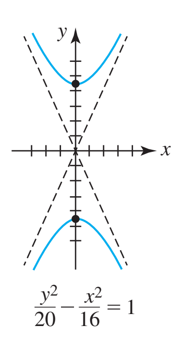
47. $\dfrac{(x-1)^2}{7} + \dfrac{(y-3)^2}{16} = 1$

49. centro: $(0, 0)$; focos: $\left(\pm\sqrt{41}, 0\right)$; vértices: $(\pm 4, 0)$; asíntotas: $y = \pm\frac{5}{4}x$; excentricidad: $\frac{\sqrt{41}}{4}$;



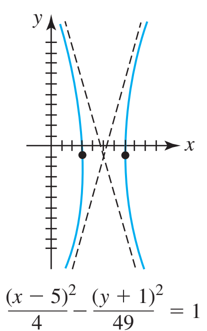
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$$

51. centro: $(0, 0)$; focos: $\left(0, \pm 2\sqrt{6}\right)$; vértices: $\left(0, \pm 2\sqrt{5}\right)$; asíntotas: $y = \pm\sqrt{5}x$; excentricidad: $\sqrt{\frac{6}{5}}$;



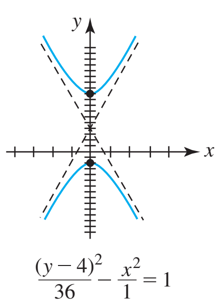
$$\frac{y^2}{20} - \frac{x^2}{16} = 1$$

53. centro: $(5, -1)$; focos: $\left(5 \pm \sqrt{53}, -1\right)$; vértices: $(3, -1)$ $(7, -1)$; asíntotas: $y = -1 \pm \frac{7}{2}(x-5)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{53}}{2}$;



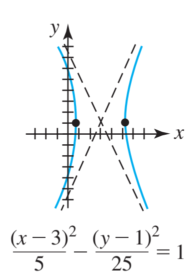
$$\frac{(x-5)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{49} = 1$$

55. centro: $(0, 4)$; focos: $\left(0, 4 \pm \sqrt{37}\right)$; vértices: $(0, -2)$, $(0, 10)$; asíntotas: $y = 4 \pm 6x$; excentricidad: $\frac{\sqrt{37}}{6}$;

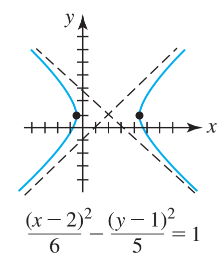


$$\frac{(y-4)^2}{36} - \frac{x^2}{1} = 1$$

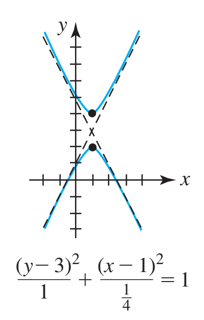
57. centro: $(3, 1)$; focos: $\left(3 \pm \sqrt{30}, 1\right)$; vértices: $\left(3 \pm \sqrt{5}, 1\right)$; asíntotas: $y = 1 \pm \sqrt{5}\,(x - 3)$; excentricidad: $\sqrt{6}$;



59. centro: $(2, 1)$; focos: $\left(2 \pm \sqrt{11}, 1\right)$; vértices: $\left(2 \pm \sqrt{6}, 1\right)$; asíntotas: $y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{6}}(x - 2)$; excentricidad: $\sqrt{\frac{11}{6}}$;



61. centro: $(1, 3)$; focos: $\left(1, 3 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$; vértices: $(1, 2)$, $(1, 4)$; asíntotas: $y = 3 \pm 2(x - 1)$; excentricidad: $\frac{\sqrt{5}}{2}$;



63. $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

65. $\frac{(y + 3)^2}{4} - \frac{(x - 1)^2}{5} = 1$

67. $(y - 3)^2 - \frac{(x + 1)^2}{4} = 1$

69. $(y - 4)^2 - \frac{(x - 2)^2}{4} = 1$

71. en el foco a 6 pulg del vértice

73. 76.5625 pies

75. 12.65 m del punto en el suelo directamente abajo del final del tubo

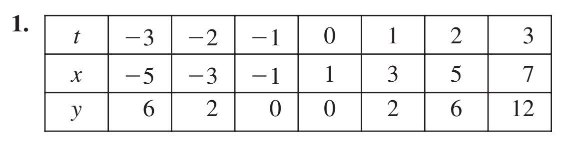
77. la distancia mínima es 28.5 millones de millas; la máxima es 43.5 millones de millas

79. 0.97 aproximadamente

81. 12 pies

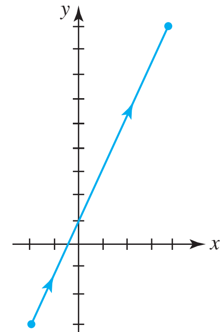
Ejercicios 10.2, página 564

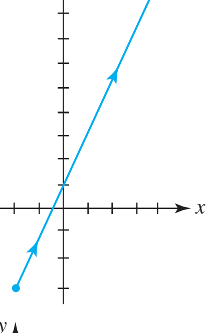
1.



t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	-5	-3	-1	1	3	5	7
y	6	2	0	0	2	6	12

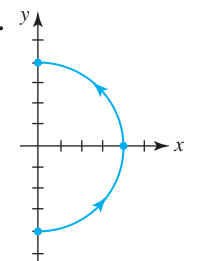
3.



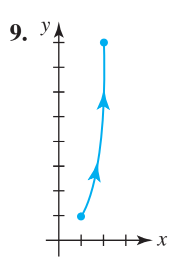


5.

7.



9.

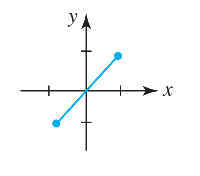


11. $y = x^2 + 3x - 1,\ x \geq 0$

13. $x = -1 + 2y^2,\ -1 \leq x \leq 0$

15. $y = \ln x,\ x > 0$

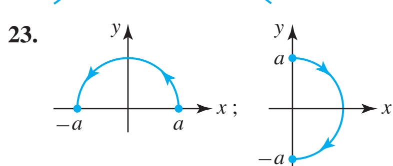
17.



19.

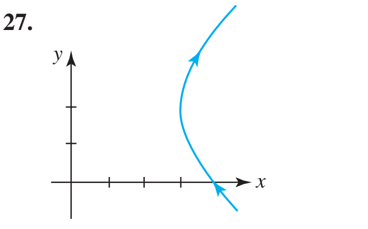
21.

23.



25.

27.



29. sí

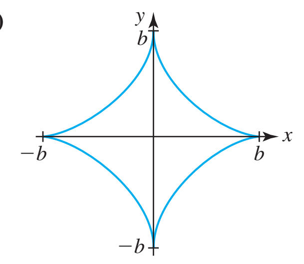
31. no

33. no

35. $x = \pm\sqrt{r^2 - L^2 \operatorname{sen}^2 \phi},\ y = L \operatorname{sen} \phi$

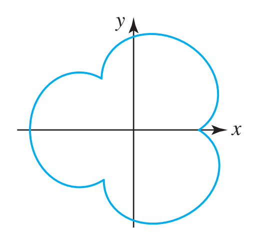
37. $x = a(\cos\theta + \theta \operatorname{sen}\theta),\ y = a(\operatorname{sen}\theta - \theta\cos\theta)$

39. ***b***)



c) $x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}$

41. ***b***)



Ejercicios 10.3, página 572

1. $\frac{3}{5}$

3. 24

5. -1

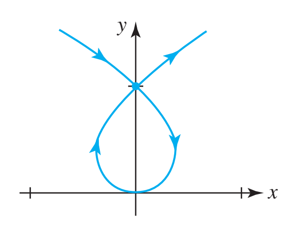
7. $y = -2x - 1$

9. $y = \frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$

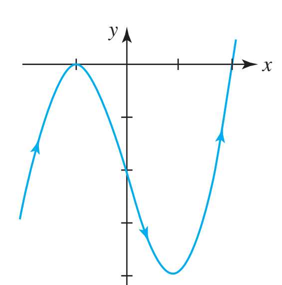
11. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

13. $y = 3x - 7$

15. tangente horizontal en (0, 0), tangente vertical en $\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$ y en $\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3}\right)$;



17. tangentes horizontales en $(-1, 0)$ y $(1, -4)$, no hay tangentes verticales;



19. $3t$; $1/(2t)$; $-1/(12t^3)$

21. $-2e^{3t} - 3e^{4t}$; $6e^{4t} + 12e^{5t}$; $-24e^{5t} - 60e^{6t}$

23. cóncava hacia arriba para $0 < t < 2$, cóncava hacia abajo para $t < 0$ y $t > 2$

25. $\frac{104}{3}$

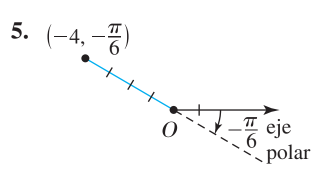
27. $\sqrt{2}(e^{\pi} - 1)$

29. $\frac{3}{2}|b|$

31. ***a***) -0.6551 ***b***) $-5.9991, 1.0446, 9.7361$

Ejercicios 10.4, página 576

1.



3. (figure: O, $\frac{\pi}{2}$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, eje polar)

5. $\left(-4, -\frac{\pi}{6}\right)$ (figure: O, $-\frac{\pi}{6}$, eje polar)

7. ***a***) $(2, -5\pi/4)$ ***b***) $(2, 11\pi/4)$
c) $(-2, 7\pi/4)$ ***d***) $(-2, -\pi/4)$

9. ***a***) $(4, -5\pi/3)$ ***b***) $(4, 7\pi/3)$
c) $(-4, 4\pi/3)$ ***d***) $(-4, -2\pi/3)$

11. ***a***) $(1, -11\pi/6)$ ***b***) $(1, 13\pi/6)$
c) $(-1, 7\pi/6)$ ***d***) $(-1, -5\pi/6)$

13. $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

15. $\left(-3, 3\sqrt{3}\right)$

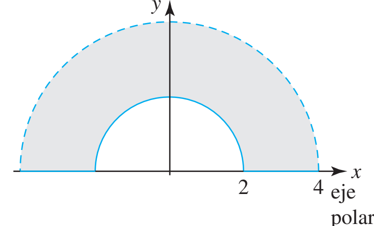
17. $(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

19. ***a***) $(2\sqrt{2}, -3\pi/4)$ ***b***) $(-2\sqrt{2}, \pi/4)$

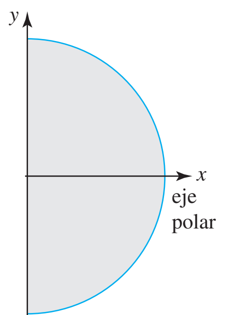
21. ***a***) $(2, -\pi/3)$ ***b***) $(-2, 2\pi/3)$

23. ***a***) $(7, 0)$ ***b***) $(-7, \pi)$

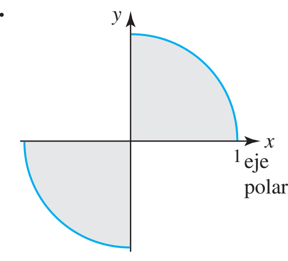
25.



27.



29.



31. $r = 5 \csc\theta$

33. $\theta = \tan^{-1} 7$

35. $r = 2/(1 + \cos\theta)$

37. $r = 6$

39. $r = 1 - \cos\theta$

41. $x = 2$

43. $(x^2 + y^2)^3 = 144x^2y^2$

45. $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$

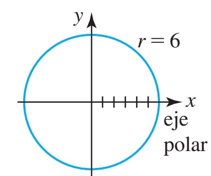
47. $x^2 + y^2 + 5y = 0$

49. $8x^2 - 12x - y^2 + 4 = 0$

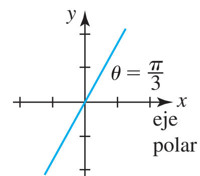
51. $3x + 8y = 5$

Ejercicios 10.5, página 583

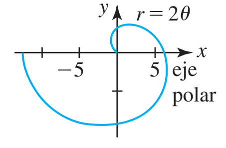
1. círculo;



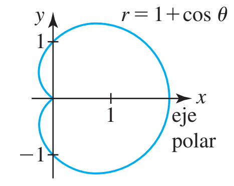
3. recta por el origen;



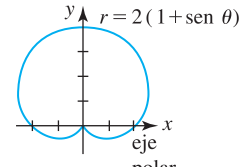
5. espiral;



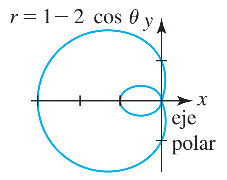
7. cardioide;



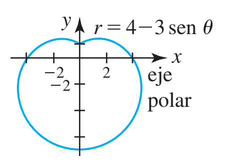
9. cardioide;



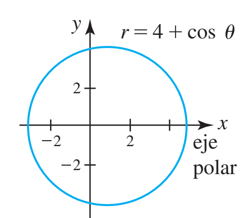
11. limacón con un lazo interior;



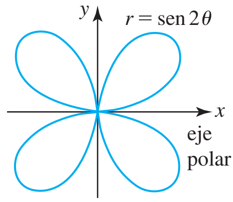
13. limacón;



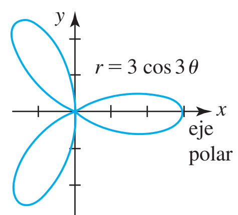
15. limacón convexa;



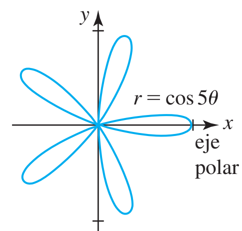
17. curva de la rosa;



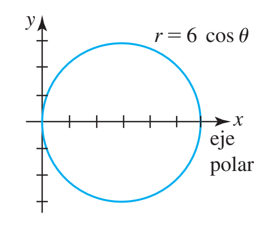
19. curva de la rosa;



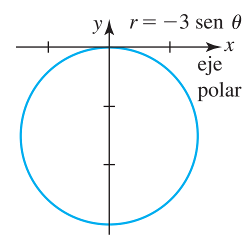
21. curva de la rosa;



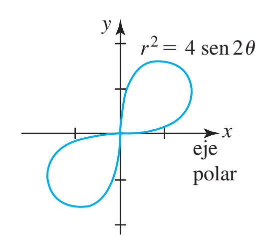
23. círculo con centro sobre el eje *x*;



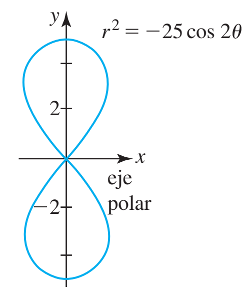
25. círculo con centro sobre el eje *y*;



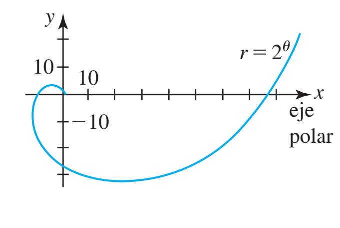
27. lemniscata;



29. lemniscata;



31.



33. $r = \dfrac{5}{2}$ **35.** $r = 4 - 3\cos\theta$

37. $r = 2\cos 4\theta$ **39.** $(2, \pi/6), (2, 5\pi/6)$

41. $(1, \pi/2), (1, 3\pi/2)$, origen

43. $(3, \pi/12), (3, 5\pi/12), (3, 13\pi/12), (3, 17\pi/12), (3, -\pi/12), (3, -5\pi/12), (3, -13\pi/12), (3, -17\pi/12)$

45. $(0, 0), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \pi/3\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\pi/3\right)$ **49.** ***d*)**

51. ***b*)**

Ejercicios 10.6, página 590

1. $-2/\pi$ **3.** $\dfrac{\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{3} - 1}$

5. $\sqrt{3}$

7. tangente horizontal en $(3, \pi/3)$ y $(3, 5\pi/3)$, tangente vertical en $(4, 0)$, $(1, 2\pi/3)$ y $(1, 4\pi/3)$

9. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x + \dfrac{8}{\sqrt{3}}, y = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}x - \dfrac{8}{\sqrt{3}}$

11. $\theta = 0$ **13.** $\theta = 5\pi/4, \theta = 7\pi/4$

15. $\theta = \pi/10, \theta = 3\pi/10, \theta = \pi/2, \theta = 7\pi/10, \theta = 9\pi/10$

17. π **19.** 24π

21. 11π **23.** $\dfrac{9}{2}\pi$

25. $\dfrac{9}{4}\pi^3$ **27.** $\dfrac{1}{4}(e^{2\pi} - 1)$

29. $\dfrac{1}{8}(4 - \pi)$ **31.** $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

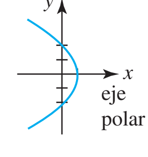
33. $\dfrac{1}{6}\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right)$ **35.** $\pi + 6\sqrt{3}$

37. $18\sqrt{3} - 4\pi$ **39.** 6π

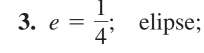
41. $\sqrt{5}(e^2 - 1)$ **43.** 24

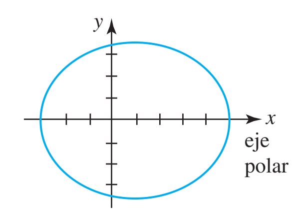
Ejercicios 10.7, página 596

1. $e = 1$; parábola;

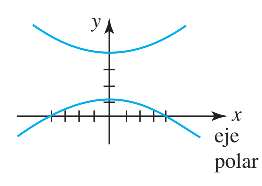


3. $e = \frac{1}{4}$; elipse;

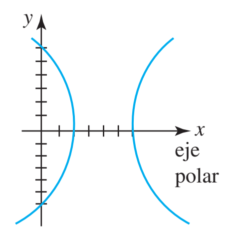




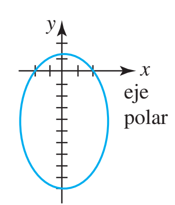
5. $e = 2$; hipérbola



7. $e = 2$; hipérbola



9. $e = \frac{4}{5}$; elipse;



11. $e = 2$; $\dfrac{(y-4)^2}{4} - \dfrac{x^2}{12} = 1$

13. $e = \frac{2}{3}$; $\dfrac{\left(x - \frac{24}{5}\right)^2}{\frac{1\,296}{25}} + \dfrac{y^2}{\frac{144}{5}} = 1$

15. $r = \dfrac{3}{1 + \cos\theta}$

17. $r = \dfrac{4}{3 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

19. $r = \dfrac{12}{1 + 2\cos\theta}$

21. $r = \dfrac{3}{1 + \cos(\theta + 2\pi/3)}$

23. $r = \dfrac{3}{1 - \text{sen}\,\theta}$

25. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\theta}$

27. $r = \dfrac{1}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$

29. vértice: $(2, \pi/4)$

31. vértices: $(10, \pi/3)$ y $\left(\frac{10}{3}, 4\pi/3\right)$

33. $r_p = 8\,000$ km

35. $r = \dfrac{1.495 \times 10^8}{1 - 0.0167\cos\theta}$

Revisión del capítulo 10, página 597

A. **1.** verdadero **3.** verdadero **5.** verdadero **7.** falso **9.** verdadero **11.** verdadero **13.** falso **15.** verdadero **17.** verdadero **19.** falso **21.** verdadero **23.** verdadero **25.** falso

B. **1.** $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ **3.** $(0, -3)$

5. $y = -5$ **7.** $(-10, -2)$

9. $(2, -1), (6, -1)$ **11.** $(4, -3)$

13. $(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$ **15.** recta que pasa por el origen

17. círculo que pasa por el origen **19.** $\theta = 0, \theta = \pi/3, \theta = 2\pi/3$

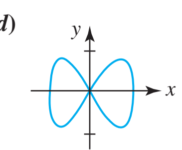
21. $(0, 0), (5, 3\pi/2)$

C. **1.** $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{\sqrt{3}\pi}{9}$ **3.** $(8, -26)$

5. ***b)*** $x = \text{sen}\,t, y = \text{sen}\,2t, 0 \le t \le 2\pi$

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$

d)



7. $5\pi/4$

9. ***a)*** $x + y = 2\sqrt{2}$

b) $r = 2\sqrt{2}/(\cos\theta + \text{sen}\,\theta)$

11. $x^2 + y^2 = x + y$

13. $r^2 = 5\csc 2\theta$

15. $r = 1/(1 - \cos\theta)$

17. $r = 3\,\text{sen}\,10\theta$

19. $\dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{36} = 1$

21. $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}, y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$

23. ***a)*** $r = \dfrac{3a\cos\theta\,\text{sen}\,\theta}{\cos^3\theta + \text{sen}^3\,\theta}$

b) $\frac{3}{2}a^2$

25. $\pi - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

27. ***a)*** $r = 2\cos(\theta - \pi/4)$

b) $x^2 + y^2 = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y$

29. 10^8 m; 9×10^8 m

Ejercicios 11.1, página 606

1. ***a***) $6\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$ ***b***) $\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ ***c***) $3\mathbf{i}$ ***d***) $\sqrt{65}$ ***e***) 3

3. ***a***) $\langle 12, 0\rangle$ ***b***) $\langle 4, -5\rangle$ ***c***) $\langle 4, 5\rangle$ ***d***) $\sqrt{41}$ ***e***) $\sqrt{41}$

5. ***a***) $-9\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ ***b***) $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j}$ ***c***) $-3\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$
d) $3\sqrt{10}$ ***e***) $\sqrt{34}$

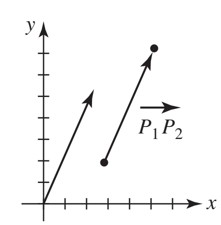
7. ***a***) $-6\mathbf{i} + 27\mathbf{j}$ ***b***) $\mathbf{0}$ ***c***) $-4\mathbf{i} + 18\mathbf{j}$ ***d***) 0 ***e***) $2\sqrt{85}$

9. ***a***) $\langle 6, -14\rangle$ ***b***) $\langle 2, 4\rangle$

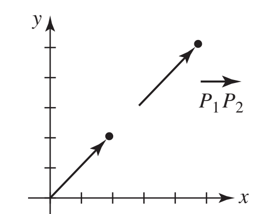
11. ***a***) $10\mathbf{i} - 12\mathbf{j}$ ***b***) $12\mathbf{i} - 17\mathbf{j}$

13. ***a***) $\langle 20, 52\rangle$ ***b***) $\langle -2, 0\rangle$

15. $2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$



17. $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$



19. (1, 18)

21. ***a***), ***b***), ***c***), ***e***), ***f***)

23. $\langle 6, 15\rangle$

25. ***a***) $\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$ ***b***) $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$

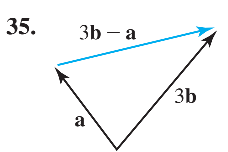
27. ***a***) $\langle 0, -1\rangle$ ***b***) $\langle 0, 1\rangle$

29. $\left\langle \frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right\rangle$

31. $\dfrac{6}{\sqrt{58}}\mathbf{i} + \dfrac{14}{\sqrt{58}}\mathbf{j}$

33. $\left\langle -3, -\frac{15}{2}\right\rangle$

35.



37. $-(\mathbf{a} + \mathbf{b})$

41. $\mathbf{a} = \dfrac{5}{2}\mathbf{b} - \dfrac{1}{2}\mathbf{c}$

43. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

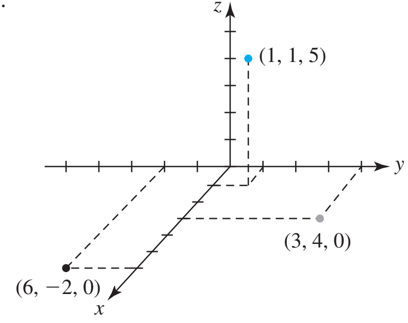
45. ***a***) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \le |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
b) cuando P_1, P_2 y P_3 son colineales y P_2 yace entre P_1 y P_3

47. ***b***) 31° aproximadamente

49. 153 libras, aproximadamente

Ejercicios 11.2, página 612

1, 3, 5.



7. El conjunto $\{(x, y, 5)|x, y$ números reales$\}$ es un plano perpendicular al eje z, 5 unidades arriba del plano xy.

9. El conjunto $\{(2, 3, z)|z$ un número real$\}$ es la recta perpendicular al plano xy en (2, 3, 0).

11. (2, 0, 0), (2, 5, 0), (2, 0, 8), (2, 5, 8), (0, 5, 0), (0, 5, 8), (0, 0, 8), (0, 0, 0)

13. ***a***) (−2, 5, 0), (−2, 0, 4), (0, 5, 4)
b) (−2, 5, −2) ***c***) (3, 5, 4)

15. la unión de los planos de coordenadas

17. el punto (−1, 2, −3)

19. la unión de los planos $z = 5$ y $z = -5$

21. $\sqrt{70}$

23. ***a***) 7 ***b***) 5

25. triángulo recto

27. triángulo isósceles

29. colineal

31. no colineal

33. 6 o −2

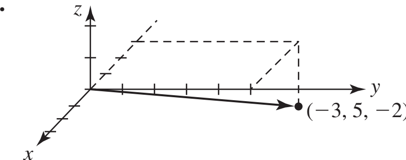
35. $\left(4, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

37. (−4, −11, 10)

39. $\langle -3, -6, 1\rangle$

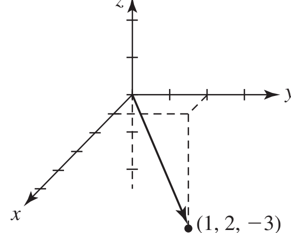
41. $\langle 2, 1, 1\rangle$

43.



RESPUESTAS DE LOS PROBLEMAS IMPARES SELECCIONADOS, CAPÍTULO 11

45.

47. plano xy

49. eje z positivo, plano xz, plano yz

51. $\langle 2, 4, 12\rangle$

53. $\langle -11, -41, -49\rangle$

55. $\sqrt{139}$

57. 6

59. $\left\langle -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right\rangle$

61. $4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

Ejercicios 11.3, página 620

1. 12

3. -16

5. 48

7. 29

9. 25

11. $\left\langle -\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 2\right\rangle$

13. $25\sqrt{2}$

15. -3

17. 1.11 radianes o 63.43°

19. 1.89 radianes o 108.4°

21. ***a)*** y ***f)***, ***c)*** y ***d)***, ***b)*** y ***e)***

23. $\left\langle \frac{4}{9}, -\frac{1}{3}, 1\right\rangle$

27. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{14}}, \cos\beta = \dfrac{2}{\sqrt{14}}, \cos\gamma = \dfrac{3}{\sqrt{14}};$

$\alpha = 74.5°, \beta = 57.69°, \gamma = 36.7°$

29. $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = -\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$\alpha = 60°, \beta = 90°, \gamma = 150°$

31. 0.9553 radián o 57.74°; 0.6155 radián o 35.26°

33. $\dfrac{5}{7}$

35. $-\dfrac{6}{\sqrt{11}}$

37. $\dfrac{72}{\sqrt{109}}$

39. ***a)*** $-\dfrac{21}{5}\mathbf{i} + \dfrac{28}{5}\mathbf{j}$ ***b)*** $-\dfrac{4}{5}\mathbf{i} - \dfrac{3}{5}\mathbf{j}$

41. ***a)*** $\left\langle -\frac{12}{7}, \frac{6}{7}, \frac{4}{7}\right\rangle$ ***b)*** $\left\langle \frac{5}{7}, -\frac{20}{7}, \frac{45}{7}\right\rangle$

43. $\dfrac{72}{25}\mathbf{i} + \dfrac{96}{25}\mathbf{j}$

45. 1 000 pies-lb

47. 45 N-m

49. $\dfrac{78}{5}$ pie-lb

Ejercicios 11.4, página 628

1. $-5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

3. $\langle -12, -2, 6\rangle$

5. $-5\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$

7. $\langle -3, 2, 3\rangle$

9. $\mathbf{0}$

11. $6\mathbf{i} + 14\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

13. $-3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, o cualquier múltiplo distinto de cero de este vector

17. ***a)*** $\mathbf{j} - \mathbf{k}$; $-\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

19. $2\mathbf{k}$

21. $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$

23. $-24\mathbf{k}$

25. $5\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$

27. 0

29. $\sqrt{41}$

31. $-\mathbf{j}$

33. $\mathbf{0}$

35. 6

37. $12\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 18\mathbf{k}$

39. $-4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

41. $-21\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 22\mathbf{k}$

43. -10

45. ***b)*** 14

47. $\dfrac{1}{2}$

49. $\dfrac{7}{2}$

51. 10

53. Los vectores son coplanares.

55. Los puntos son coplanares.

57. ***a)*** 32 ***b)*** 30° del eje x positivo en la dirección del eje y negativo ***c)*** $16\sqrt{3}\mathbf{i} - 16\mathbf{j}$

Ejercicios 11.5, página 633

1. $\langle x, y, z\rangle = \langle 4, 6, -7\rangle + t\left\langle 3, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right\rangle$

3. $\langle x, y, z\rangle = t\langle 5, 9, 4\rangle$

5. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 2, 1\rangle + t\langle 2, 3, -3\rangle$

7. $\langle x, y, z\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right\rangle + t\left\langle -2, 3, -\frac{3}{2}\right\rangle$

9. $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 1, -1\rangle + t\langle 5, 0, 0\rangle$

11. $x = 2 + 4t, y = 3 - 4t, z = 5 + 3t$

13. $x = 1 + 2t, y = -2t, z = -7t$

15. $x = 4 + 10t, y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4}t, z = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}t$

17. $\dfrac{x-1}{9} = \dfrac{y-4}{10} = \dfrac{z+9}{7}$

19. $\dfrac{x+7}{11} = \dfrac{z-5}{-4}, y = 2$

21. $x = 5, \dfrac{y-10}{9} = \dfrac{z+2}{12}$

23. $x = 6 + 2t, y = 4 - 3t, z = -2 + 6t$

25. $x = 2 + t, y = -2, z = 15$

27. Las dos rectas pasan por el origen y tienen vectores direccionales paralelos.

29. ***a)*** $t = -5$ ***b)*** $s = 12$

31. $(0, 5, 15), \left(5, 0, \frac{15}{2}\right), (10, -5, 0)$

33. $(2, 3, -5)$

35. Las rectas no se intersecan.

37. sí

39. $x = 2 + 4t, y = 5 - 6t, z = 9 - 6t, 0 \le t \le 1$

41. 40.37°

43. $x = 4 - 6t, y = 1 + 3t, z = 6 + 3t$

45. Las rectas no son paralelas y no se intersecan.

Ejercicios 11.6, página 638

1. $2x - 3y + 4z = 19$

3. $5x - 3z = 51$

5. $6x + 8y - 4z = 11$

7. $5x - 3y + z = 2$

9. $3x - 4y + z = 0$

11. Los puntos son colineales.

13. $x + y - 4z = 25$

15. $z = 12$

17. $-3x + y + 10z = 18$

19. $9x - 7y + 5z = 17$

21. $6x - 2y + z = 12$

23. perpendicular: ***a)*** y ***d)***, ***b)*** y ***c)***, ***d)*** y ***f)***, ***b)*** y ***e)***; paralelo: ***a)*** y ***f)***, ***c)*** y ***e)***

25. ***c)***, ***d)***

27. $x = 2 + t, y = \dfrac{1}{2} - t, z = t$

29. $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t,\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t,\ z = t$

31. $(-5, 5, 9)$

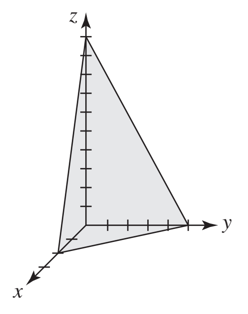
33. $(1, 2, -5)$

35. $x = 5 + t,\ y = 6 + 3t,\ z = -12 + t$

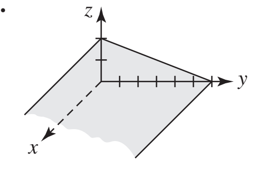
37. $3x - y - 2z = 10$

39.

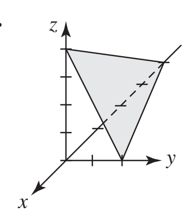




41.



43.

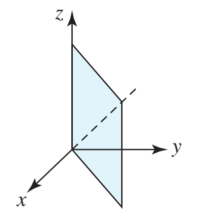


47. $\frac{3}{\sqrt{11}}$

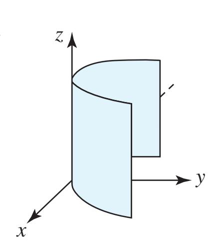
49. 107.98°

Ejercicios 11.7, página 642

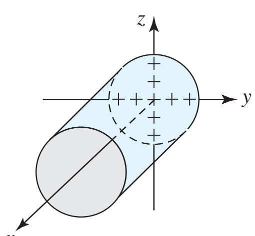
1.



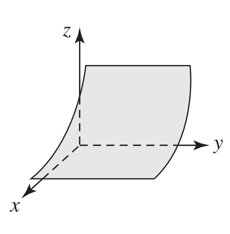
3.



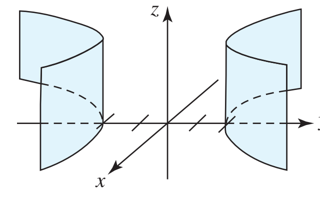
5.



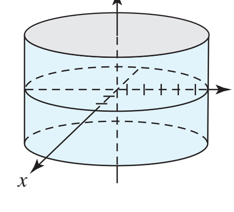
7.



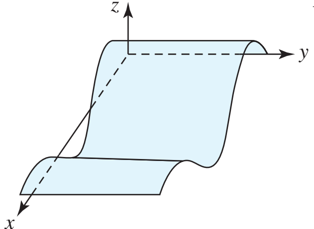
9.



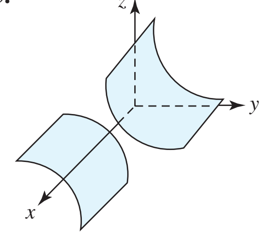
11.



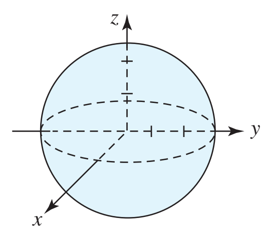
13.



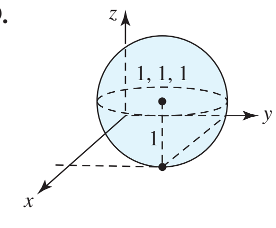
15.



17.



19.



21. centro $(-4, 3, 2)$; radio 6

23. centro $(0, 0, 8)$; radio 8

25. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 6)^2 = 3$

27. $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 4)^2 = 16$

29. $x^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 4$ o $x^2 + (y - 8)^2 + z^2 = 4$

31. $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 = 90$

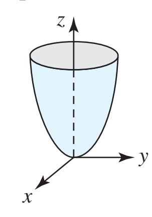
33. todos los puntos en la mitad superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$ (hemisferio superior)

35. todos los puntos sobre o en el exterior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

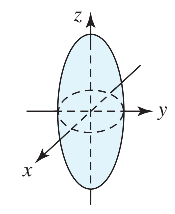
37. todos los puntos sobre y entre esferas concéntricas de radio 1 y radio 3 centradas en el origen

Ejercicios 11.8, página 649

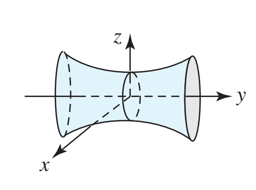
1. paraboloide;



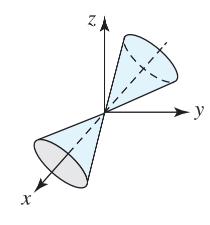
3. elipsoide;



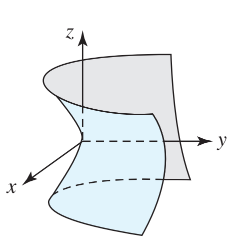
5. hiperboloide de una hoja;



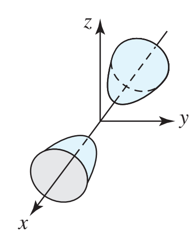
7. cono elíptico;



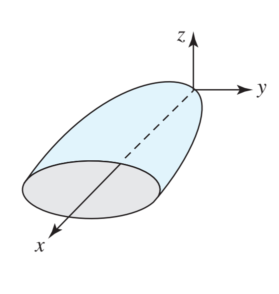
9. paraboloide hiperbólico;



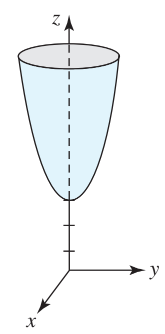
11. hiperboloide de dos hojas;



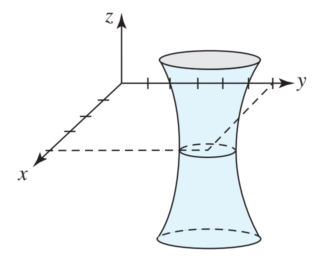
13. paraboloide elíptico;



15.



17.



19. una posibilidad es $y^2 + z^2 = 1$; eje z

21. una posibilidad es $y = e^{x^2}$; eje y

23. $y^2 = 4(x^2 + z^2)$

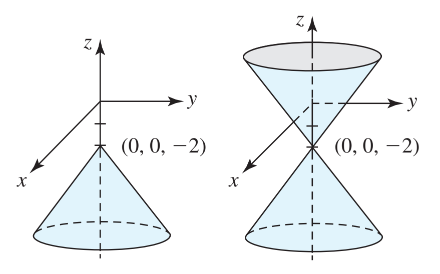
25. $y^2 + z^2 = (9 - x^2)^2, x \geq 0$

27. $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

29. $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

31. Las superficies en los problemas 1, 4, 6, 10 y 14 son superficies de revolución alrededor del eje z. La superficie en el problema 2 es la superficie de revolución alrededor del eje y. La superficie en el problema 11 es la superficie de revolución alrededor del eje x.

33.



35. ***a***) área de una sección transversal es $\pi ab(c - z)$ ***b***) $\frac{1}{2}\pi abc^2$

37. $(2, -2, 6), (-2, 4, 3)$

Revisión del capítulo 11, página 650

A. 1. verdadero

3. falso

5. verdadero

7. verdadero

9. verdadero

11. verdadero

13. verdadero

15. falso

17. falso

19. verdadero

B. 1. $9\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

3. $5\mathbf{i}$

5. 14

7. 26

9. $-6\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

11. $(4, 7, 5)$

13. $(5, 6, 3)$

15. $-36\sqrt{2}$

17. $(12, 0, 0), (0, -8, 0), (0, 0, 6)$

19. $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$

21. 2

23. elipsoide

C. 1. $\dfrac{1}{\sqrt{11}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$

3. 2

5. $\left\langle \frac{16}{5}, \frac{12}{5}, 0 \right\rangle$

7. cilindro elíptico

9. hiperboloide de dos hojas

11. paraboloide hiperbólico

13. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, hiperboloide de una hoja; $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, hiperboloide de dos hojas

15. ***a***) esfera ***b***) plano

17. $\dfrac{x - 7}{4} = \dfrac{y - 3}{-2} = \dfrac{z + 5}{6}$

19. Los vectores direccionales son ortogonales y el punto de intersección es $(3, -3, 0)$.

21. $14x - 5y - 3z = 0$

23. $-6x - 3y + 4z = 5$

27. ***a***) $-qvB\mathbf{k}$ ***b***) $\mathbf{v} = \dfrac{1}{m|\mathbf{r}|^2}(\mathbf{L} \times \mathbf{r})$

29. 192.4 N-m aproximadamente

Ejercicios 12.1, página 659

1. $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

3. $[-1, 1]$

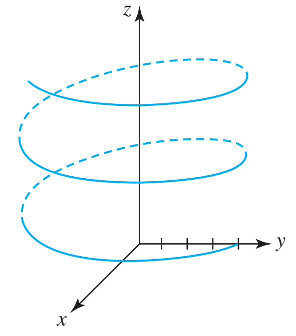
5. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\, \pi t\mathbf{i} + \cos \pi t\mathbf{j} - \cos^2 \pi t\mathbf{k}$

7. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j} + e^{3t}\mathbf{k}$

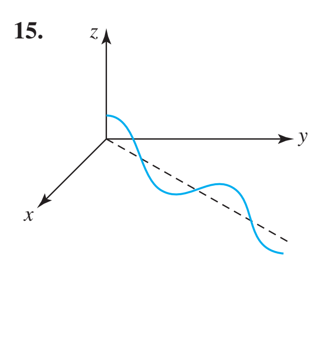
9. $x = t^2, y = \text{sen}\, t, z = \cos t$

11. $x = \ln t, y = 1 + t, z = t^3$

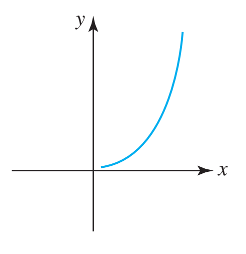
13.



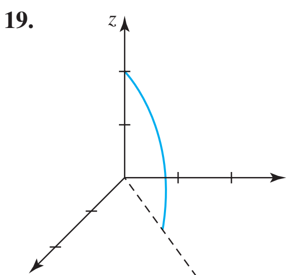
15.



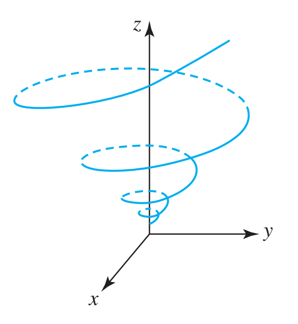
17.



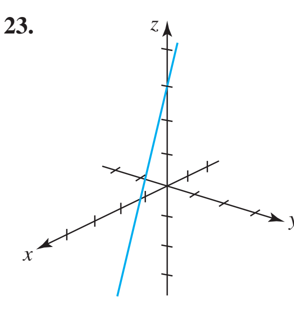
19.



21.

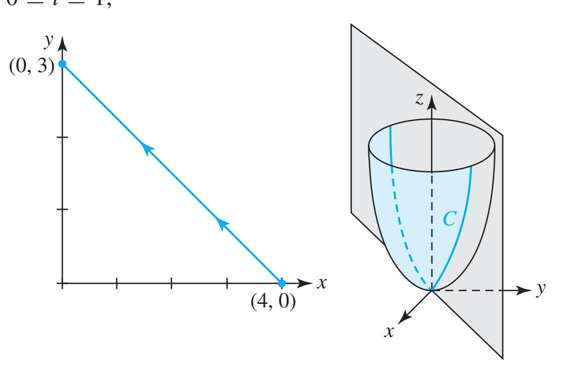


23.

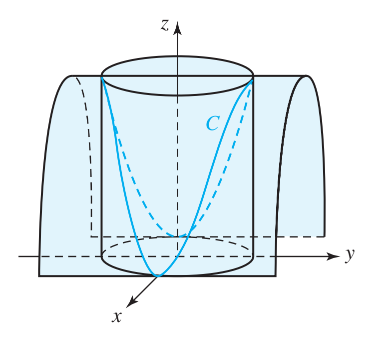


25. $\mathbf{r}(t) = (1 - t)\langle 4, 0\rangle + t\langle 0, 3\rangle$, $0 \leq t \leq 1$;

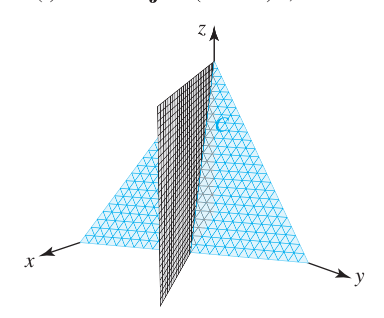
27. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$;



29. $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\mathbf{i} + 3\operatorname{sen} t\mathbf{j} + 9\operatorname{sen}^2 t\mathbf{k}$;

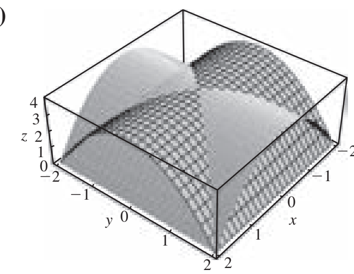


31. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (1 - 2t)\mathbf{k}$;



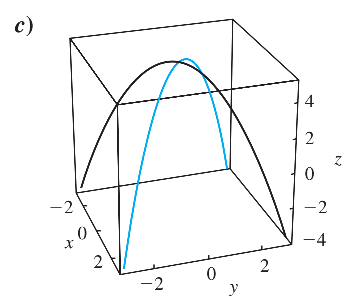
33. *b)** **35.** *d)*

43. *a)*



b) $\mathbf{r}_1(t) = t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}, \mathbf{r}_2(t) = t\mathbf{i} - t\mathbf{j} + (4 - t^2)\mathbf{k}$

c)



Ejercicios 12.2, página 667

1. $8\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 32\mathbf{k}$ **3.** $\langle 2, 2, 2\rangle$

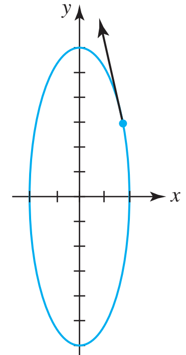
5. $2\mathbf{i} + 23\mathbf{j} + 17\mathbf{k}$ **7.** discontinua

9. $3\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$; $3\mathbf{i} + 8.4\mathbf{j} + 9.5\mathbf{k}$

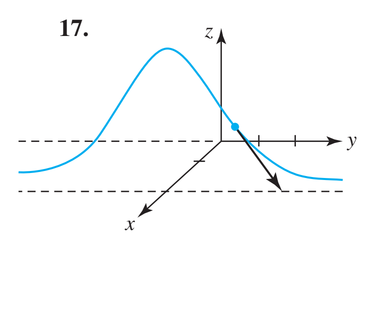
11. $(1/t)\mathbf{i} - (1/t^2)\mathbf{j}$; $-(1/t^2)\mathbf{i} + (2/t^3)\mathbf{j}$

13. $\langle 2te^{2t} + e^{2t}, 3t^2, 8t - 1\rangle$; $\langle 4te^{2t} + 4e^{2t}, 6t, 8\rangle$

15.

17.



19. $x = 2 + t, y = 2 + 2t, z = \frac{8}{3} + 4t$

21. $\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$; $x = \frac{1}{\sqrt{6}}t, y = \frac{2}{\sqrt{6}}t, z = -\frac{1}{\sqrt{6}}t$

23. $\mathbf{r}(t) = \left\langle \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}t, \pi/3 + t\right\rangle$

25. $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}''(t)$ **27.** $\mathbf{r}(t) \cdot (\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}'''(t))$

29. $2\mathbf{r}_1'(2t) - (1/t^2)\mathbf{r}_2'(1/t)$ **31.** $\frac{3}{2}\mathbf{i} + 9\mathbf{j} + 15\mathbf{k}$

33. $(te^t - e^t)\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{-2t}\mathbf{j} + \frac{1}{2}e^{t^2}\mathbf{k} + \mathbf{C}$

35. $(6t + 1)\mathbf{i} + (3t^2 - 2)\mathbf{j} + (t^3 + 1)\mathbf{k}$

37. $(2t^3 - 6t + 6)\mathbf{i} + (7t - 4t^{3/2} - 3)\mathbf{j} + (t^2 - 2t)\mathbf{k}$

39. $2\pi\sqrt{a^2 + c^2}$ **41.** $\sqrt{6}(e^{3\pi} - 1)$

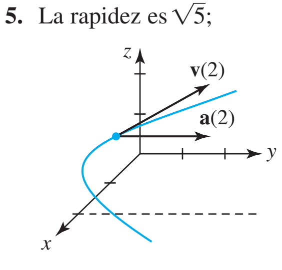
43. $\mathbf{r}(s) = 9\cos(s/9)\mathbf{i} + 9\operatorname{sen}(s/9)\mathbf{j}$

45. $\mathbf{r}(s) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{i} + \left(5 - \frac{3}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{j} + \left(2 + \frac{4}{\sqrt{29}}s\right)\mathbf{k}$

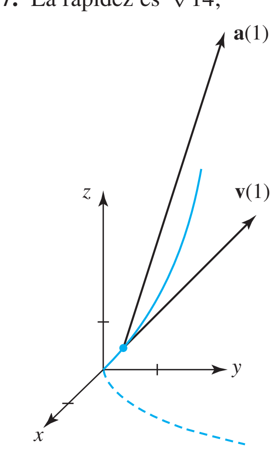
Ejercicios 12.3, página 671

1. La rapidez es $\sqrt{5}$; **3.** La rapidez es 2;

5. La rapidez es $\sqrt{5}$;



7. La rapidez es $\sqrt{14}$;



9. ***a***) (0, 0, 0) y (25, 115, 0)

b) $\mathbf{v}(0) = -2\mathbf{i} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(0) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$;

$\mathbf{v}(5) = 10\mathbf{i} + 73\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(5) = 2\mathbf{i} + 30\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

11. ***a***) $\mathbf{r}(t) = 240\sqrt{3}t\mathbf{i} + (-16t^2 + 240t)\mathbf{j}$;
$x(t) = 240\sqrt{3}t$, $y(t) = -16t^2 + 240t$

b) 900 pies

c) aproximadamente 6 235 pies

d) 480 pies/s

13. 72.11 pies/s **15.** 97.98 pies/s

19. Suponga que (x_0, y_0) son las coordenadas del centro del blanco en el tiempo $t = 0$. Entonces $\mathbf{r}_p = \mathbf{r}_t$ cuando $t = x_0/(v_0 \cos\theta) = y_0/(v_0 \operatorname{sen}\theta)$. Lo que implica que $\tan\theta = y_0/x_0$. En otras palabras, apunte directamente al blanco en $t = 0$.

21. 191.33 libras aproximadamente

25. $\mathbf{r}(t) = k_1 e^{2t^3}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2t^2 + k_2}\mathbf{j} + (k_3 e^{t^2} - 1)\mathbf{k}$

27. Puesto que **F** está dirigido a lo largo de **r**, es necesario tener $\mathbf{F} = c\mathbf{r}$ para alguna constante c. En consecuencia, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times (c\mathbf{r}) = c(\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = \mathbf{0}$. Si $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$, entonces $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{0}$. Lo anterior implica que **L** es una constante.

Ejercicios 12.4, página 678

1. $\mathbf{T} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-\operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

3. $\mathbf{T} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a \operatorname{sen} t\mathbf{i} + a\cos t\mathbf{j} + c\mathbf{k})$;
$\mathbf{N} = -\cos t\mathbf{i} - \operatorname{sen} t\mathbf{j}$;
$\mathbf{B} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(c \operatorname{sen} t\mathbf{i} - c\cos t\mathbf{j} + a\mathbf{k})$; $\kappa = a/(a^2 + c^2)$

5. ***a***) $3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 4z = 3\pi$

b) $-4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y + 12z = 9\pi$

c) $x + y = 2\sqrt{2}$

7. $a_T = 4t/\sqrt{1 + 4t^2}$; $a_N = 2/\sqrt{1 + 4t^2}$

9. $a_T = 2\sqrt{6}$; $a_N = 0$, $t > 0$

11. $a_T = 2t/\sqrt{1 + t^2}$; $a_N = 2/\sqrt{1 + t^2}$

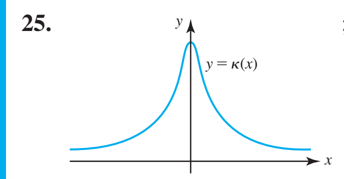
13. $a_T = 0$; $a_N = 5$

15. $a_T = -\sqrt{3}e^{-t}$; $a_N = 0$

17. $\kappa = \dfrac{\sqrt{b^2c^2 \operatorname{sen}^2 t + a^2c^2\cos^2 t + a^2b^2}}{(a^2\operatorname{sen}^2 t + b^2\cos^2 t + c^2)^{3/2}}$

23. $\kappa = 2$, $\rho = \frac{1}{2}$; $\kappa = 2/\sqrt{125} \approx 0.18$, $\rho = \sqrt{125}/2 \approx 5.59$; la curva es más pronunciada en (0, 0)

25.



; para valores mayores que $|x|$ la gráfica de $y = x^2$ se comporta como una recta puesto que $\kappa(x) \to 0$.

Revisión del capítulo 12, página 679

A. 1. verdadero **3.** verdadero **5.** verdadero **7.** verdadero **9.** falso

B. 1. $y = 4$ **3.** $\langle 1, 2, 1\rangle$

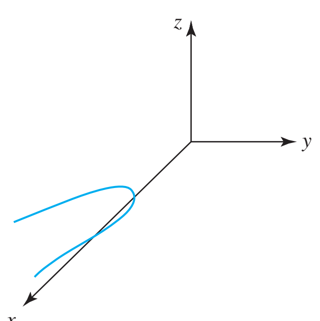
5. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ **7.** $\left\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$

9. $3x + 6y + 3z = 10$

C. 1. $\sqrt{2}\pi$

3. $x = -27 - 18t$, $y = 8 + t$, $z = 1 + t$

5.



7. $-t^2 \operatorname{sen} t + 2t\cos t - 2\operatorname{sen} t\cos t + 8t^3e^{2t} + 12t^2e^{2t}$

9. $(t + 1)\mathbf{i} + \left(\dfrac{1}{m}t^2 + t + 1\right)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$;

$x = t + 1$, $y = \dfrac{1}{m}t^2 + t + 1$, $z = t$

11. $\mathbf{v}(1) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v}(4) = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 8\mathbf{k}$,
$\mathbf{a}(1) = 2\mathbf{k}$, $\mathbf{a}(4) = 2\mathbf{k}$

13. $\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (3\pi/4)\mathbf{k}$

15. $\mathbf{T} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\tanh 1\mathbf{i} + \mathbf{j} + \operatorname{sech} 1\mathbf{k})$;

$\mathbf{N} = \operatorname{sech} 1\mathbf{i} - \tanh 1\mathbf{k}$;

$\mathbf{B} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\tanh 1\mathbf{i} + \mathbf{j} - \operatorname{sech} 1\mathbf{k})$;

$\kappa = \dfrac{1}{2}\operatorname{sech}^2 1$

Ejercicios 13.1, página 686

1. $\{(x, y) | (x, y) \neq (0, 0)\}$ **3.** $\{(x, y) | y \neq -x^2\}$

5. $\{(s, t) | s, t$ cualesquiera números reales$\}$

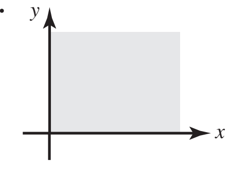
7. $\{(r, s) | r$ cualquier número real, $|s| \geq 1\}$

9. $\{(u, v, w) | u^2 + v^2 + w^2 \geq 16\}$

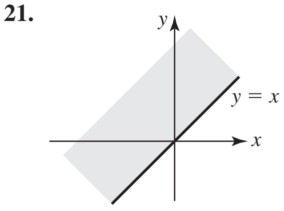
11. ***c***) **13.** ***b***)

15. ***d***) **17.** ***f***)

19.



21.



23. $\{z | z \geq 10\}$ **25.** $\{w | -1 \leq w \leq 1\}$

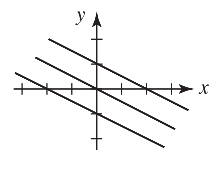
27. 10, −2 **29.** 4, 4

31. plano por el origen perpendicular al plano xz

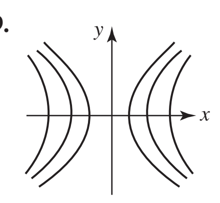
33. manto superior de un cono circular

35. mitad superior de un elipsoide

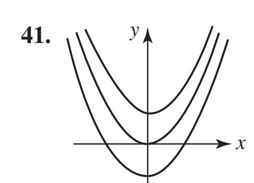
37.



39.



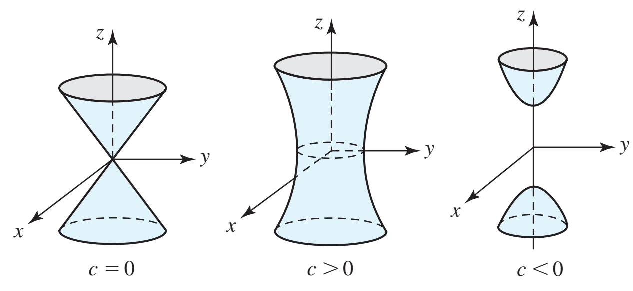
41.



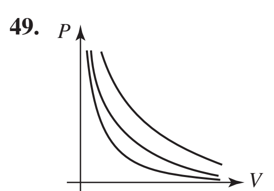
43. cilindro elíptico

45. elipsoides

47.



49.



51. $C(r, h) = 2.8\pi r^2 + 4.6\pi rh$

53. $V = \frac{11}{9}\pi r^2 h$

55. 15 600 cm^2

Ejercicios 13.2, página 694

1. 26
3. no existe
5. 1
7. no existe
9. 108
11. 1
13. $\frac{1}{3}$
15. $-\frac{1}{3}$
17. 360
19. no existe
21. -3
23. 0
25. 0
27. 0
29. 0
31. $\{(x, y)|x \geq 0 \text{ y } y \geq -x\}$
33. $\{(x, y)|y \neq 0 \text{ y } x/y \neq (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$
35. ***a)*** continua ***b)*** no continua ***c)*** no continua
37. f es continua en (0, 0).

Ejercicios 13.3, página 701

1. $\partial z/\partial x = 7, \partial z/\partial y = 16y$
3. $\partial z/\partial x = 6xy + 4y^2, \partial z/\partial y = 3x^2 + 8xy$
5. $\partial z/\partial x = 2x - y^2, \partial z/\partial y = -2xy + 20y^4$
7. $\partial z/\partial x = 20x^3y^3 - 2xy^6 + 30x^4, \partial z/\partial y = 15x^4y^2 - 6x^2y^5 - 4$
9. $\partial z/\partial x = 2x^{-1/2}/(3y^2 + 1), \partial z/\partial y = -24y\sqrt{x}/(3y^2 + 1)^2$
11. $\partial z/\partial x = -3x^2(x^3 - y^2)^{-2}, \partial z/\partial y = 2y(x^3 - y^2)^{-2}$
13. $\partial z/\partial x = -10 \cos 5x \text{ sen } 5x, \partial z/\partial y = 10 \text{ sen } 5y \cos 5y$
15. $f_x = (3x^3y + 1)e^{x^3y}, f_y = x^4e^{x^3y}$
17. $f_x = 7y/(x + 2y)^2, f_y = -7x/(x + 2y)^2$
19. $g_u = 8u/(4u^2 + 5v^3), g_v = 15v^2/(4u^2 + 5v^3)$
21. $w_x = x^{-1/2}y, w_y = 2\sqrt{x} - (y/z)e^{y/z} - e^{y/z}, w_z = (y^2/z^2)e^{y/z}$
23. $F_u = 2uw^2 - v^3 - vwt^2 \text{ sen}(ut^2), F_v = -3uv^2 + w \cos(ut^2),$
$F_x = 128x^7t^4, F_t = -2uvwt \text{ sen}(ut^2) + 64x^8t^3$
25. -16
27. $x = -1, y = 4 + t, z = -24 + 2t$
29. -2
31. $\partial^2 z/\partial x^2 = y^2e^{xy}$
33. $f_{xy} = 20xy - 6y^2$
35. $w_{tuv} = 18uv^2t^2$
37. $F_{r\theta r} = -2e^{r^2}(2r^2 + 1) \text{ sen } \theta$
39. $-60x^3y^2 + 8y$
41. $-48uvt^2$
43. $\partial z/\partial x = -x/z, \partial z/\partial y = -y/z$
45. $\partial z/\partial u = (vz - 2uv^3)/(2z - uv), \partial z/\partial v = (uz - 3u^2v^2)/(2z - uv)$
47. $A_x = y \text{ sen } \theta, A_y = x \text{ sen } \theta, A_\theta = xy \cos \theta$
59. ***a)*** $\frac{\partial u}{\partial t} = \begin{cases} -gx/a, & 0 \leq x \leq at \\ -gt, & x > at \end{cases}$; para $x > at$ el movimiento es de caída libre
b) $\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} (-g/a^2)(at - x), & 0 \leq x \leq at \\ 0, & x > at \end{cases}$; para $x > at$ el movimiento es horizontal

Ejercicios 13.4, página 709

1. $L(x, y) = 2 - 2(x - 1) + 6(y - 1)$
3. $L(x, y) = 136 + \frac{353}{17}(x - 8) + \frac{120}{17}(y - 15)$
5. $L(x, y) = \ln 2 - (x + 1) + \frac{3}{2}(y - 1)$
7. 13.0907
9. 61.44
11. $dz = 2x \text{ sen } 4y\, dx + 4x^2 \cos 4y\, dy$
13. $dz = 2x(2x^2 - 4y^3)^{-1/2}\, dx - 6y^2(2x^2 - 4y^3)^{-1/2}\, dy$
15. $df = 7t(s + 3t)^{-2}\, ds - 7s(s + 3t)^{-2}\, dt$
17. $dw = 2xy^4z^{-5}\, dx + 4x^2y^3z^{-5}\, dy - 5x^2y^4z^{-6}\, dz$
19. $dF = 3r^2\, dr - 2s^{-3}\, ds - 2t^{-1/2}\, dt$
21. $dw = du/u + dv/v - ds/s - dt/t$
23. $\Delta z = 0.2, dz = 0.2$
25. $\Delta z = -0.79, dz = -0.8$
27. $\varepsilon_1 = 5\Delta x, \varepsilon_2 = -\Delta x$
29. $\varepsilon_1 = y^2\Delta x + 4xy\Delta y + 2y\Delta x\Delta y,$
$\varepsilon_2 = x^2\Delta y + 2x\Delta x\Delta y + (\Delta x)^2\Delta y$
31. 0.9%
33. $-mg(0.009)$; decrece
35. 15%
37. 4.9%

Ejercicios 13.5, página 716

1. $\frac{dz}{dt} = \frac{4xt - 4yt^{-3}}{x^2 + y^2}$
3. $\left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=\pi} = -2$
5. $\frac{dp}{du} = \frac{2u}{2s + t} + \frac{4r}{u^3(2s + t)^2} - \frac{r}{2\sqrt{u}(2s + t)^2}$
7. $\partial z/\partial u = 3u^2y^2e^{xy^2} + 2xye^{xy^2}, \partial z/\partial v = -4vxye^{xy^2}$
9. $\partial z/\partial u = 16u^3 - 40y(2u - v), \partial z/\partial v = -96v^2 + 20y(2u - v)$
11. $\partial w/\partial t = -3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \text{ sen } \theta - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \cos \theta,$
$\partial w/\partial \theta = 3u(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \cos \theta - 3v(u^2 + v^2)^{1/2}e^{-t} \text{ sen } \theta$
13. $\partial R/\partial u = s^2t^4e^{v^2} - 4rst^4uve^{-u^2} + 8rs^2t^3uv^2e^{u^2v^2},$
$\partial R/\partial v = 2s^2t^4uve^{v^2} + 2rst^4e^{-u^2} + 8rs^2t^3u^2ve^{u^2v^2}$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{xu}{\sqrt{x^2 + y^2}(rs + tu)} + \dfrac{y \cosh rs}{u\sqrt{x^2 + y^2}}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{xs}{\sqrt{x^2 + y^2}(rs + tu)} + \dfrac{sty \operatorname{senh} rs}{u\sqrt{x^2 + y^2}}$,
$\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{xt}{\sqrt{x^2 + y^2}(rs + tu)} - \dfrac{ty \cosh rs}{u^2\sqrt{x^2 + y^2}}$

17. $dy/dx = (4xy^2 - 3x^2)/(1 - 4x^2y)$

19. $dy/dx = y \cos x y/(1 - x \cos xy)$

21. $\partial z/\partial x = x/z$, $\partial z/\partial y = y/z$

23. $\partial z/\partial x = (2x + y^2z^3)/(10z - 3xy^2z^2)$,
$\partial z/\partial y = (2xyz^3 - 2y)/(10z - 3xy^2z^2)$

33. 5.31 cm^2/s **35.** 0.5976 pulg^2/año

39. *a*) aproximadamente 380 ciclos por segundo *b*) decreciente

Ejercicios 13.6, página 723

1. $(2x - 3x^2y^2)\mathbf{i} + (-2x^3y + 4y^3)\mathbf{j}$

3. $(y^2/z^3)\mathbf{i} + (2xy/z^3)\mathbf{j} - (3xy^2/z^4)\mathbf{k}$

5. $4\mathbf{i} - 32\mathbf{j}$ **7.** $2\sqrt{3}\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 4\sqrt{3}\mathbf{k}$

9. $\sqrt{3}x + y$ **11.** $\dfrac{15}{2}(\sqrt{3} - 2)$

13. $-\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$ **15.** $\dfrac{98}{\sqrt{5}}$

17. $-3\sqrt{2}$ **19.** -1

21. $-\dfrac{12}{\sqrt{17}}$ **23.** $\sqrt{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$; $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

25. $-2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $2\sqrt{6}$

27. $-8\sqrt{\pi/6}\mathbf{i} - 8\sqrt{\pi/6}\mathbf{j}$; $-8\sqrt{\pi/3}$

29. $-\dfrac{3}{8}\mathbf{i} - 12\mathbf{j} - \dfrac{2}{3}\mathbf{k}$; $-\dfrac{\sqrt{83\,281}}{24}$

31. $\pm\dfrac{31}{\sqrt{17}}$

33. *a*) $\mathbf{u} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$ *b*) $\mathbf{u} = \frac{4}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j}$ *c*) $\mathbf{u} = -\frac{4}{5}\mathbf{i} - \frac{3}{5}\mathbf{j}$

35. *a*) $D_{\mathbf{u}} f = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(9x^2 + 3y^2 - 18xy^2 - 6x^2y)$

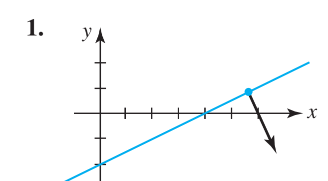
b) $D_{\mathbf{u}}F = \dfrac{1}{5}(-3x^2 - 27y^2 + 27x + 3y - 36xy)$

37. $(2, 5), (-2, 5)$ **39.** $-16\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

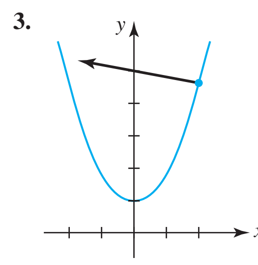
41. $x = 3e^{-4t}$, $y = 4e^{-2t}$ o $16x = 3y^2$, $y \geq 0$

Ejercicios 13.7, página 727

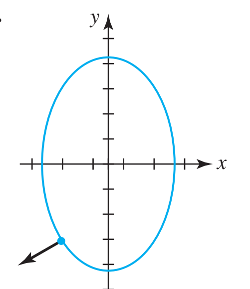
1.



3.

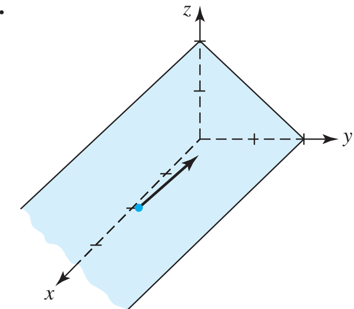


5.

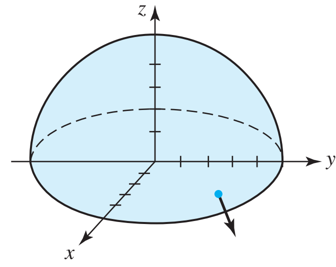


7.

9.



11.



13. $(-4, -1, 17)$ **15.** $-2x + 2y + z = 9$

17. $6x - 2y - 9z = 5$ **19.** $6x - 8y + z = 50$

21. $2x + y - \sqrt{2}z = 1 + \frac{5}{4}\pi$ **23.** $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - z = 2$

25. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$,

27. $(-2, 0, 5), (-2, 0, -3)$

31. $x = 1 + 2t$, $y = -1 - 4t$, $z = 1 + 2t$

33. $\dfrac{x - \frac{1}{2}}{4} = \dfrac{y - \frac{1}{3}}{6} = \dfrac{z - 3}{-1}$

Ejercicios 13.8, página 734

1. mín. rel. $f(0, 0) = 5$

3. máx. rel. $f(4, 3) = 25$

5. mín. rel. $f(-2, 1) = 15$

7. máx. rel. $f(-1, -1) = 10$; mín. rel. $f(1, 1) = -10$

9. mín. rel. $f(3, 1) = -14$

11. no extrema

13. máx. rel. $f(1, 1) = 12$

15. mín. rel. $f(-1, -2) = 14$

17. máx. rel. $f(-1, (2n + 1)\pi/2) = e^{-1}$, n impar;
mín. rel. $f(-1, (2n + 1)\pi/2) = -e^{-1}$, n par

19. máx. rel. $f((2m + 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2) = 2$, m y n pares;
mín. rel. $f((2m + 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2) = -2$, m y n impares

21. $x = 7, y = 7, z = 7$

23. $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

25. $(2, 2, 2), (2, -2, -2), (-2, 2, -2), (-2, -2, 2)$; en estos puntos la distancia mínima es $2\sqrt{3}$

27. $\dfrac{8}{9}\sqrt{3}abc$

29. $x = P/(4 + 2\sqrt{3}), y = P(\sqrt{3} - 1)/(2\sqrt{3}), \theta = 30°$

31. máx. abs. $f(0, 0) = 16$

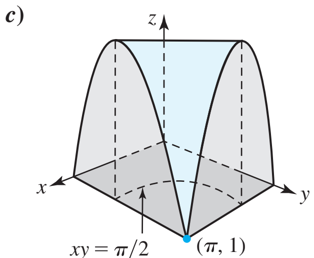
33. mín. abs. $f(0, 0) = -8$

35. máx. abs. $f\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2$; mín. abs. $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2$

37. máx. abs. $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{2}$;
mín. abs. $f(0, 0) = 0$

39. máx. abs. $f\left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right) = 10$; mín. abs. $f\left(-\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right) = -10$

41. ***a***) $(0, 0)$ y todos los puntos $(x, 2\pi/x)$ para $0 < x \le \pi$
b) máx. abs. $f(x, \pi/2x) = 1, 0 < x \le \pi$;
mín. abs. $f(0, 0) = f(0, y) = f(x, 0) = f(\pi, 1) = 0$
c)



43. $x = 2, y = 2, z = 15$

Ejercicios 13.9, página 737

1. $y = 0.4x + 0.6$

3. $y = 1.1x - 0.3$

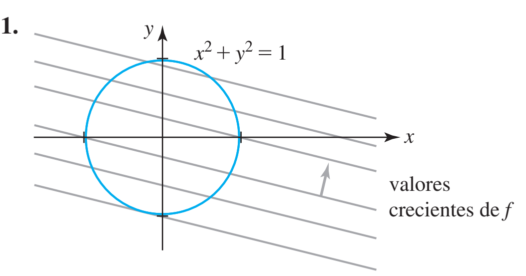
5. $y = 1.3571x + 1.9286$

7. $v = -0.8357T + 234.333$; 117.335, 100.621

9. ***a***) $y = 0.5996x + 4.3665$;
$y = -0.0232x^2 + 0.5618x + 4.5942$;
$y = 0.00079x^3 - 0.0212x^2 + 0.5498x + 4.5840$

Ejercicios 13.10, página 743

1.



f parece tener un máximo restringido y un mínimo restringido

3. máx. $f\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{10}$;
mín. $f\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = -\sqrt{10}$

5. máx. $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$;
mín. $f(1, -1) = f(-1, 1) = -1$

7. mín. $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{2}$

9. máx. $f(1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = f(-1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2}) = f(1/\sqrt[4]{2}, -1/\sqrt[4]{2}) = f(-1/\sqrt[4]{2}, 1/\sqrt[4]{2}) = \sqrt{2}$;
mín. $f(0, 1) = f(0, -1) = f(1, 0) = f(-1, 0) = 1$

11. máx. $f\left(\frac{9}{16}, \frac{1}{16}\right) = \frac{729}{65\,536}$; mín. $f(0, 1) = f(1, 0) = 0$

13. máx. $f(\sqrt{5}, 2\sqrt{5}, \sqrt{5}) = 6\sqrt{5}$;
mín. $f(-\sqrt{5}, -2\sqrt{5}, -\sqrt{5}) = -6\sqrt{5}$

15. máx. $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

17. mín. $f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$

19. mín. $f\left(\frac{1}{3}, \frac{16}{15}, -\frac{11}{15}\right) = \frac{134}{75}$

21. máx. $A\left(\dfrac{4}{2 + \sqrt{2}}, \dfrac{4}{2 + \sqrt{2}}\right) = \dfrac{4}{3 + 2\sqrt{2}}$

23. $x = 12 - \dfrac{9}{2\sqrt{5}}$ m, $y = \dfrac{6}{\sqrt{5}}$ m

25. $z = P + \dfrac{4}{\sqrt{27k}}\left(2 - \sqrt{4 + P\sqrt{27k}}\right)$

Revisión del capítulo 13, página 744

A. **1.** falso **3.** verdadero
5. falso **7.** falso
9. verdadero

B. **1.** $-\dfrac{1}{4}$ **3.** $3x^2 + y^2 = 28$

5. $\dfrac{\partial F}{\partial r}g'(w) + \dfrac{\partial F}{\partial s}h'(w)$ **7.** f_{yyzx}

9. $F(y); -F(x)$

11. $f_x(x, y)g'(y)h'(z) + f_{xy}(x, y)g(y)h'(z)$

C. **1.** $e^{-x^3y}(-x^3y + 1)$ **3.** $-\dfrac{3}{2}r^2\theta(r^3 + \theta^2)^{-3/2}$

5. $6x^2y \operatorname{senh}(x^2y^3) + 9x^4y^4\cosh(x^2y^3)$

7. $-60s^2t^4v^{-5}$ **9.** $\dfrac{1}{2}\mathbf{i} + \dfrac{1}{2}\mathbf{j}$

11. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x^2 - y^2 - 4xy)$ **13.**

15. $2x\Delta y + 2y\Delta x + 2\Delta x\Delta y - 2y\Delta y - (\Delta y)^2$

17. $dz = 11y\,dx/(4x + 3y)^2 - 11x\,dy/(4x + 3y)^2$

19. $x = -\sqrt{5}, \dfrac{z - 3}{4} = \dfrac{y - 1}{3}$

21. ***a***) 2 ***b***) $-\sqrt{2}$ ***c***) 4

23. $4\pi x + 3y - 12z = 4\pi - 6\sqrt{3}$

25. $3x + 4y = 25$ **27.** $x = 2, y = 1, z = 2$

29. aproximadamente -8.77 cm/s **33.** no un extremo

35. máximo relativo **37.** $A = \frac{1}{2}L^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta$

39. $A = 2xz + 2yz - 5z^2$ **41.** $V = 16xy - 4xy\sqrt{x^2 + y^2}$

Ejercicios 14.1, página 752

1. 52 **3.** *a)* 8 *b)* 8

5. 60 **7.** 10π

9. No. El integrando $f(x, y) = x + 5y$ no es no negativo sobre la región R.

11. 80 **13.** 34

15. 66 **17.** 18

Ejercicios 14.2, página 756

1. $y + c_1(x)$ **3.** $2x^3y - \frac{3}{2}x^2\sqrt{y} + c_2(y)$

5. $\dfrac{\ln|y + 1|}{x} + c_1(x)$ **7.** $3y \operatorname{sen} 4x - 3x \operatorname{sen} y + c_2(y)$

9. $y(2x + 3y)^{1/2} + c_2(y)$ **11.** $24y - 20e^y$

13. $x^2e^{3x^2} - x^2e^x$ **15.** $\frac{1}{2}x \ln 5$

17. $2 - \operatorname{sen} y$ **19.** $\cos^2 x - \frac{1}{3}\cos^4 x$

21. 37 **23.** $-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

25. $-\dfrac{4}{21}$ **27.** $18 - e^3 + 3e$

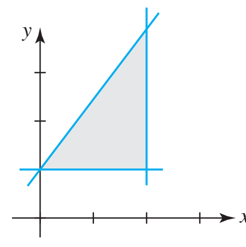
29. $\dfrac{10}{3}$ **31.** $\dfrac{\pi}{4}\ln 9$

33. $\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$ **35.** π

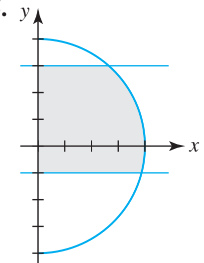
37. e^{-1} **39.** $2 - \pi$

41. $\frac{1}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$

43.



45.



47. Ambas integrales iguales $\frac{32}{5}$. **49.** Ambas integrales iguales 9.

51. Ambas integrales iguales $13\pi^2 - 16$.

Ejercicios 14.3, página 762

1. $\dfrac{1}{21}$ **3.** $\dfrac{25}{84}$

5. 96 **7.** $2\ln 2 - 1$

9. $\dfrac{14}{3}$ **11.** 40

13. $\dfrac{9}{2}$ **15.** $e^4 - e + 3 - 4\ln 4$

17. $\dfrac{63}{4}$ **19.** el volumen es 16π

21. 18 **23.** 2π

25. 4 **27.** $30 \ln 6$

29. $\dfrac{15\pi}{4}$ **31.** $\dfrac{16}{9}$

33. $\dfrac{35}{6}$ **35.** $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y)\,dy\,dx$

37. $\displaystyle\int_1^{e^3}\int_{\ln y}^3 f(x, y)\,dx\,dy$ **39.** $\displaystyle\int_0^1\int_{y^3}^{2-y} f(x, y)\,dx\,dy$

41. $\frac{1}{18}(2\sqrt{2} - 1)$ **43.** $\frac{2}{3}\operatorname{sen} 8$

45. $\dfrac{\pi}{8}$ **47.** $\dfrac{a + b}{2}\cdot\dfrac{c + d}{2}$

Ejercicios 14.4, página 767

1. $\bar{x} = \frac{8}{3}, \bar{y} = 2$ **3.** $\bar{x} = 3, \bar{y} = \frac{3}{2}$

5. $\bar{x} = \frac{17}{21}, \bar{y} = \frac{55}{147}$ **7.** $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{7}$

9. $\bar{x} = \dfrac{3e^4 + 1}{4(e^4 - 1)}, \bar{y} = \dfrac{16(e^5 - 1)}{25(e^4 - 1)}$ **11.** $\dfrac{1}{105}$

13. $\frac{4}{9}k$ **15.** $\dfrac{256}{21}$

17. $\dfrac{941}{10}$ **19.** $\dfrac{\sqrt{10}}{5}a$

21. *a)* $\frac{1}{4}ab^3\pi$ *b)* $\frac{1}{4}a^3b\pi$ *c)* $\frac{1}{2}b$ *d)* $\frac{1}{2}a$

23. $\frac{1}{6}ka^4$ **25.** $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}k$

27. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$

Ejercicios 14.5, página 771

1. $\frac{27}{2}\pi$ **3.** $\frac{1}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$

5. $\frac{25}{3}\pi$ **7.** $\frac{2}{3}\pi(15\sqrt{15} - 7\sqrt{7})$

9. $\dfrac{5}{4}$ **11.** $\bar{x} = \dfrac{13}{3\pi}, \bar{y} = \dfrac{13}{3\pi}$

13. $\bar{x} = \dfrac{12}{5}, \bar{y} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ **15.** $\bar{x} = \frac{1}{6}(4 + 3\pi), \bar{y} = \frac{4}{3}$

17. $\frac{1}{4}\pi a^4k$ **19.** $\frac{1}{12}ak(15\sqrt{3} - 4\pi)$

21. $\frac{1}{2}\pi a^4k$ **23.** $4k$

25. 9π **27.** $\frac{1}{4}\pi(e - 1)$

29. $\frac{3}{8}\pi$ **31.** 250

33. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

35. aproximadamente 1 450 m^3

37. ***a)*** $2\pi dD_0[d - (R + d)e^{-R/d}]$

b) $\dfrac{2d^2 - (R^2 + 2dR + 2d^2)e^{-R/d}}{d - (R + d)e^{-R/d}}$

c) $2\pi d^2 D_0,\ 2d$

Ejercicios 14.6, página 775

1. $3\sqrt{29}$

3. $\frac{10}{3}\pi$

5. $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$

7. $\frac{25}{6}\pi$

9. $2a^2(\pi - 2)$

11. $8a^2$

13. $2\pi a(c_2 - c_1)$

Ejercicios 14.7, página 782

1. 48

3. 36

5. $\pi - 2$

7. $\frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{2}e$

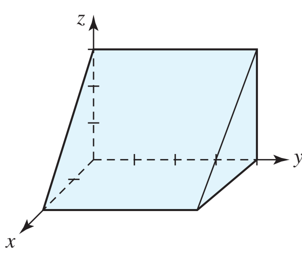
9. 50

11. $\int_0^4\int_0^{2-(x/2)}\int_{x+2y}^4 f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$, $\int_0^2\int_{2y}^4\int_0^{z-2y} f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy$, $\int_0^4\int_0^{z/2}\int_0^{z-2y} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, $\int_0^4\int_x^4\int_0^{(z-x)/2} f(x, y, z)\, dy\, dz\, dx$, $\int_0^4\int_0^z\int_0^{(z-x)/2} f(x, y, z)\, dy\, dx\, dz$

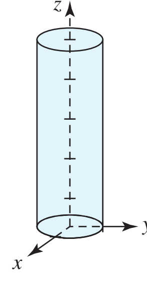
13. ***a)*** $\int_0^2\int_{x^3}^8\int_0^4 dz\, dy\, dx$ ***b)*** $\int_0^8\int_0^4\int_0^{\sqrt[3]{y}} dx\, dz\, dy$

c) $\int_0^4\int_0^2\int_{x^3}^8 dy\, dx\, dz$

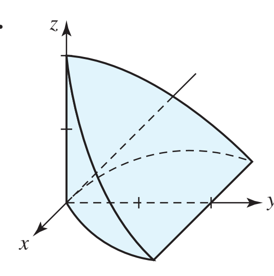
15.



17.



19.



21. $16\sqrt{2}$

23. 16π

25. $\bar{x} = \frac{4}{5}, \bar{y} = \frac{32}{7}, \bar{z} = \frac{8}{3}$

27. $\bar{x} = 0, \bar{y} = 2, \bar{z} = 0$

29. $\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{2y+2}^{8-y}(x + y + 4)\, dz\, dy\, dx$

31. $\frac{2\,560}{3}k,\ \frac{4}{3}\sqrt{5}$

33. $\frac{1}{30}k$

35. $k\int_{-5}^5\int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^5 (x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dz\, dy\, dx$

Ejercicios 14.8, página 789

1. $(-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 5)$

3. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, -4\right)$

5. $(0, 5, 1)$

7. $(\sqrt{2}, -\pi/4, -9)$

9. $(2\sqrt{2}, 2\pi/3, 2)$

11. $(4, -\pi/2, 0)$

13. $r^2 + z^2 = 25$

15. $r^2 - z^2 = 1$

17. $z = x^2 + y^2$

19. $x = 5$

21. $\frac{2}{3}\pi(64 - 24\sqrt{3})$

23. $\frac{625}{2}\pi$

25. $\left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$

27. $\frac{8}{3}\pi k$

29. ***a)*** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ ***b)*** $\left(\frac{2}{3}, \pi/6, 0\right)$

31. ***a)*** $(-4, 4, 4\sqrt{2})$ ***b)*** $(4\sqrt{2}, 3\pi/4, 4\sqrt{2})$

33. ***a)*** $(2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2})$ ***b)*** $(2\sqrt{2}, 0, -2\sqrt{2})$

35. $(5\sqrt{2}, \pi/2, 5\pi/4)$

37. $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/6)$

39. $(6, \pi/4, -\pi/4)$

41. $\rho = 8$

43. $\phi = \pi/6, \phi = 5\pi/6$

45. $x^2 + y^2 + z^2 = 100$

47. $z = 2$

49. $9\pi(2 - \sqrt{2})$

51. $\frac{2}{9}\pi$

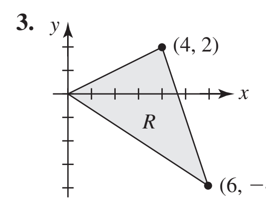
53. $\left(0, 0, \frac{7}{6}\right)$

55. πk

Ejercicios 14.9, página 795

1. (0, 0), (−2, 8), (16, 20), (14, 28)

3.

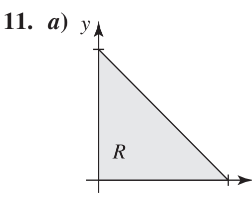


5.

7. $-2v$

9. $-\frac{1}{3u^2}$

11. ***a)***



b) (0, 0) es la imagen de todo punto sobre la frontera $u = 0$.

13. 16

15. $\frac{1}{2}$

17. $\frac{1}{4}(b - a)(d - c)$

19. $\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$

21. $\frac{315}{4}$ **23.** $\frac{1}{4}(e - e^{-1})$

25. 126 **27.** $\frac{15}{2}\pi$

Revisión del capítulo 14, página 796

A. **1.** verdadero **3.** verdadero

5. falso

B. **1.** $32y^3 - 8y^5 + 5y\ln(y^2 + 1) - 5y\ln 5$

3. región cuadrada **5.** $f(x, 4) - f(x, 2)$

7. $\int_0^4 \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\,dy\,dx$ **9.** $(\sqrt{2}, 2\pi/3, \sqrt{2})$

11. $z = r^2$; $\rho = \csc\phi\cot\phi$

C. **1.** $-3xe^{-4xy} - 5xy + y + c_1(x)$

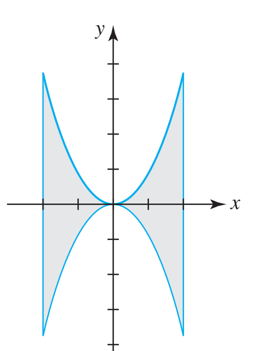
3. $-y\cos y^2 + y\cos y^4$ **5.** $e^2 - e^{-2} + 4$

7. $1 - \operatorname{sen} 1$ **9.** $\frac{10}{3}$

11. 320π **13.** $\frac{37}{60}$

15. $\int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{x^2 + y^2}\,dy\,dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{3/\sqrt{2}} \int_{x}^{\sqrt{9-x^2}} \frac{1}{x^2 + y^2}\,dy\,dx$

17.



19. $\frac{1}{2}(1 - \cos 1)$

21. $\frac{5}{8}\pi$ **23.** $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$

25. *a*) $\int_0^1 \int_x^{2x} \sqrt{1 - x^2}\,dy\,dx$

b) $\int_0^1 \int_{y/2}^{y} \sqrt{1 - x^2}\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx\,dy$

c) $\frac{1}{3}$

27. $\frac{41}{1\,512}k$ **29.** 8π

31. 0

Ejercicios 15.1, página 807

1. $-\frac{125\sqrt{2}}{6}$; $\frac{125}{6}(4 - \sqrt{2})$; $\frac{125}{2}$

3. 3; 6; $3\sqrt{5}$ **5.** 0

7. -1; $\frac{1}{2}(\pi - 2)$; $\frac{1}{8}\pi^2$; $\frac{1}{8}\pi^2\sqrt{2}$

9. 21 **11.** 30

13. 1 **15.** 1

17. 460 **19.** $\frac{26}{9}$

21. $-\frac{64}{3}$ **23.** $-\frac{8}{3}$

25. 6π **27.** $\frac{123}{2}$

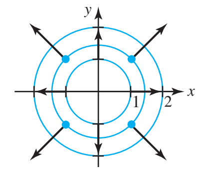
29. 70 **31.** 7

33. Sobre cada curva la integral de línea tiene el valor $\frac{208}{3}$.

35. $k\pi$

Ejercicios 15.2, página 813

1.



3. y x 1 2

5. y x 1 1

7. *b*)

9. *d*) **11.** *d*)

13. *a*) **15.** $-\frac{19}{8}$

17. 16 **19.** $9\pi^2 + 6\pi$

21. e **23.** -4

25. 0 **27.** 0

29. aproximadamente 21.5 lb

31. $\nabla f = (3x - 6y)\mathbf{i} + (12y - 6x)\mathbf{j}$

33. $\nabla f = \tan^{-1} yz\,\mathbf{i} + \frac{xz}{1 + y^2z^2}\mathbf{j} + \frac{xy}{1 + y^2z^2}\mathbf{k}$

35. $\nabla f = -e^{-y^2}\mathbf{i} + (1 + 2xye^{-y^2})\mathbf{j} + \mathbf{k}$

37. *b*) **39.** *d*)

41. $\phi(x, y) = y + \cos y + \operatorname{sen} x$ **43.** $\phi(x, y, z) = x + y^2 - 4z^3$

Ejercicios 15.3, página 823

1. $\frac{16}{3}$ **3.** 14

5. 3 **7.** 330

9. 1 096 **11.** $\phi = x^4y^3 + 3x + y + K$

13. no es un campo conservativo **15.** $\phi = \frac{1}{4}x^4 + xy + \frac{1}{4}y^4 + K$

17. $\phi(x, y, z) = x^2 + y^3 - yz + K$ **19.** $3 + e^{-1}$

21. 63 **23.** $8 + 2e^3$

25. 16 **27.** $\pi - 4$

29. $\phi = (Gm_1m_2)/|\mathbf{r}|$

Ejercicios 15.4, página 829

1. 3 **3.** 0

5. 75π **7.** 48π

9. $\frac{56}{3}$ **11.** $\frac{2}{3}$

13. $\frac{1}{8}$

15. $(b - a) \times$ (área de la región acotada por C)

19. $\frac{3}{8}a^2\pi$ **23.** $\frac{45}{2}\pi$

25. π **27.** $\frac{27}{2}\pi$

29. $\frac{3}{2}\pi$

Ejercicios 15.5, página 837

1. $x = u, y = v, z = 4u + 3v - 2$

3. $x = u, y = -\sqrt{1 + u^2 + v^2}, z = v$

5. $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - v^2)\mathbf{k}, -2 \le u \le 2, -3 \le v \le 3$

7. $x^2 + y^2 = 1$, cilindro circular

9. $x^2 = y^2 + z^2$, porción de un cono circular

11. dominio del parámetro definido por $0 \le u \le 4, 0 \le v \le \pi/2$

13. dominio del parámetro definido por $0 \le \theta \le 2\pi, \pi/2 \le \phi \le \pi$

15. $x + \sqrt{3}y = 20$ **17.** $-6x + 10y + z = 9$

19. $3x + 3y - z = 9$ **21.** $x + 3y + 2z = 4$

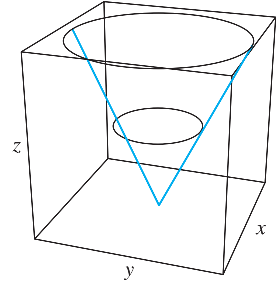
23. $8x + 6x - 5z = 25$ **25.** $4\sqrt{11}$

27. $\frac{1}{6}\pi(17\sqrt{17} - 1)$ **29.** $2\sqrt{5}\pi + \pi \ln(2 + \sqrt{5})$

31. $x = 2$ sen ϕ cos θ, $y = 2$ sen ϕ sen θ, $z = 2$ cos ϕ, $\pi/3 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi$; 12π

33. $x = 2$ sen ϕ cos θ, $y = 2$ sen ϕ sen θ, $z = 2$ cos ϕ, $0 \le \phi \le \pi/4, 0 \le \theta \le 2\pi$; $4\pi(2 - \sqrt{2})$


35.



Ejercicios 15.6, página 844

1. $\frac{26}{3}$ **3.** 0

5. 972π **7.** $\frac{1}{15}(3^{5/2} - 2^{7/2} + 1)$

9. $9(17^{3/2} - 1)$ **11.** $12\sqrt{14}$

13. $\frac{\sqrt{3}}{12}k$ **15.** 18

17. 28π **19.** 8π

21. $\frac{5}{2}\pi$ **23.** $-8\pi a^3$

25. $4\pi kq$ **27.** $\left(1, \frac{2}{3}, 2\right)$

29. ***a)*** $\left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$ ***b)*** $128\sqrt{2}\pi k$

Ejercicios 15.7, página 849

1. $(x - y)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j}$; $2z$ **3.** **0**; $4y + 8z$

5. $(4y^3 - 6xz^2)\mathbf{i} + (2z^3 - 3x^2)\mathbf{k}$; $6xy$

7. $(3e^{-z} - 8yz)\mathbf{i} - xe^{-z}\mathbf{j}$; $e^{-z} + 4z^2 - 3ye^{-z}$

9. $(xy^2e^y + 2xye^y + x^3yze^z + x^3ye^z)\mathbf{i} - y^2e^y\mathbf{j} + (-3x^2yze^z - xe^x)\mathbf{k}$; $xye^x + ye^x - x^3ze^z$

27. $2\mathbf{i} + (1 - 8y)\mathbf{j} + 8z\mathbf{k}$ **37.** 6

Ejercicios 15.8, página 855

1. -40π **3.** $\frac{45}{2}$

5. $\frac{3}{2}$ **7.** -3

9. $-\frac{3}{2}\pi$ **11.** π

13. -152π **15.** 112

17. considere la superficie como $z = 0$; $\frac{81}{4}\pi$

Ejercicios 15.9, página 862

1. $\frac{3}{2}$ **3.** $\frac{12}{5}a^5\pi$

5. 256π **7.** $\frac{62}{5}\pi$

9. $4\pi(b - a)$ **11.** 128

13. $\frac{1}{2}\pi$

Revisión del capítulo 15, página 863

A. **1.** verdadero **3.** falso

5. falso **7.** verdadero

9. verdadero **11.** verdadero

B. **1.** $\nabla\phi = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{i} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\mathbf{j}$

3. $6xy$ **5.** 0

7. 0 **9.** $4x + y - 2z = 0$

C. **1.** $\frac{56}{3}\sqrt{2}\pi^3$ **3.** 12

5. $2 + \frac{2}{3\pi}$ **7.** $\frac{1}{2}\pi^2$

9. 5π **11.** 180π

13. $\frac{1}{12}(\ln 3)(17^{3/2} - 5^{3/2})$ **15.** $6(e^{-3} - 1)$

17. $-4\pi c$ **19.** 0

21. 125π **23.** 3π

25. $\frac{5}{3}$

27. $z = x^2 - y^2$; paraboloide hiperbólico

29. $y = x^2$; cilindro parabólico

Ejercicios 16.1, página 871

1. $x^2 + 4x + \frac{3}{2}y^2 - y = C$ **3.** $\frac{5}{2}x^2 + 4xy - 2y^4 = C$

5. $x^2y^2 - 3x + 4y = C$ **7.** no exacta

9. $xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = C$ **11.** no exacta

13. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = C$ **15.** $x^3y^3 - \tan^{-1}(3x) = C$

17. $-\ln|\cos x| + \cos x \operatorname{sen} y = C$ **19.** $t^4y - 5t^3 - ty + y^3 = C$

21. $xy^2 + x^2y - y + \frac{1}{3}x^3 = \frac{4}{3}$

23. $4ty + t^2 - 5t + 3y^2 - y = 8$ **25.** $k = 10$

Ejercicios 16.2, página 877

1. $y = C_1 + C_2e^{x/3}$ **3.** $y = C_1e^{-4x} + C_2e^{4x}$

5. $y = C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x$ **7.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

9. $y = C_1e^{-4x} + C_2xe^{-4x}$

11. $y = C_1e^{(-3/2+\sqrt{29}/2)x} + C_2e^{(-3/2-\sqrt{29}/2)x}$

13. $y = C_1e^{2x/3} + C_2e^{-x/4}$ **15.** $y = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x)$

17. $y = e^{-x/3}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{3}x + C_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{2}}{3}x\right)$

19. $y = C_1e^{-x/3} + C_2xe^{-x/3}$ **21.** $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$

23. $y = -\frac{3}{4}e^{-5x} + \frac{3}{4}e^{-x}$ **25.** $y = e^{x/2}\left(-\cos\frac{1}{2}x + \operatorname{sen}\frac{1}{2}x\right)$

27. $y = 0$ **29.** $y = e^{2(x-1)} - e^{x-1}$

31. $y'' + y' - 20y = 0$ **33.** $y = C_2\operatorname{sen} x$

35. $y = -2\cos x$ **37.** ninguna solución

39. $y = xe^{2(x-1)}$

Ejercicios 16.3, página 882

1. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x} - 6$

3. $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x} + \frac{1}{2}x + 1$

5. $y = C_1\cos 5x + C_2\operatorname{sen} 5x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$

7. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{4}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{28}{9}x + \frac{80}{27}$

9. $y = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\operatorname{sen} 3x) + \frac{1}{10}e^{3x} - \frac{126}{697}\cos 2x + \frac{96}{697}\operatorname{sen} 2x$

11. $y = \frac{5}{8}e^{-8x} + \frac{5}{8}e^{8x} - \frac{1}{4}$

13. $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + x\operatorname{sen} x + \cos x\ln|\cos x|$

15. $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$

$= C_1\cos x + C_3\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}x\cos x$

17. $y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2x$

19. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}xe^x - \frac{1}{4}xe^{-x} = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x\operatorname{senh} x$

21. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\ln|x| - \frac{1}{4}e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}\,dt,\ x_0 > 0$

23. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} + (e^{-2x} + e^{-x})\ln(1 + e^x)$

25. $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{-x} - e^{-2x}\operatorname{sen} e^x$

27. $y = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}e^x\ln(1 + x^2) + xe^x\tan^{-1}x$

29. $y = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}\ln x - \frac{3}{4}x^2e^{-x}$

31. $y = C_1e^{x/2} + C_2xe^{x/2} + \frac{8}{9}e^{-x} + x + 4$

33. $y = \frac{3}{8}e^{-x} + \frac{5}{8}e^x + \frac{1}{4}x^2e^x - \frac{1}{4}xe^x$

35. $y = C_1x + C_2x\ln x + \frac{2}{3}x(\ln x)^3$

37. $C(x) = C(\infty)(1 - e^{-x/\lambda})$

Ejercicios 16.4, página 890

1. Una masa que pesa 4 lb $\left(\frac{1}{8}\text{ slug}\right)$ sujeta a un resorte se libera desde un punto 3 unidades arriba de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 2 pies/s. La constante del resorte es de 3 lb/pies.

3. $x(t) = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2t$ **5.** $x(t) = -5\operatorname{sen} 2t$

7. Una masa que pesa 2 lb $\left(\frac{1}{16}\text{ slug}\right)$ sujeta a un resorte cuya constante es 1 lb/pie. El sistema se amortigua con una fuerza resistente equivalente numéricamente a dos veces la velocidad instantánea. La masa empieza de la posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 1.5 pies/s.

9. $\frac{1}{4}$ s, $\frac{1}{2}$ s, $x\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-2} \approx 0.14$ **11.** $x(t) = \frac{1}{2}e^{-2t}(\cos 4t + \operatorname{sen} 4t)$

13. ***a)*** $\beta > \frac{5}{2}$ ***b)*** $\beta = \frac{5}{2}$ ***c)*** $0 < \beta < \frac{5}{2}$

15. $x(t) = \frac{1}{625}e^{-4t}(24 + 100t) - \frac{1}{625}e^{-t}(24\cos 4t + 7\operatorname{sen} 4t)$;

$x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.

17. 4.568 C; 0.0509 s

19. $q(t) = 10 - 10e^{-3t}(\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$; $i(t) = 60e^{-3t}\operatorname{sen} 3t$; 10.432 C

Ejercicios 16.5, página 895

1. $y_1(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$, $y_2(x) = c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

3. $y_1(x) = c_0$, $y_2(x) = c_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

5. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^6 + \frac{1}{9\cdot 8\cdot 6\cdot 5\cdot 3\cdot 2}x^9 + \cdots\right]$,

$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{4\cdot 3}x^4 + \frac{1}{7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^7 + \frac{1}{10\cdot 9\cdot 7\cdot 6\cdot 4\cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$

7. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{3}{4!}x^4 - \frac{7\cdot 3}{6!}x^6 - \cdots\right]$,

$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{5}{5!}x^5 + \frac{9\cdot 5}{7!}x^7 + \cdots\right]$

9. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{4^2}{6!}x^6 - \frac{7^2 \cdot 4^2}{9!}x^9 + \cdots\right],$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{2^2}{4!}x^4 + \frac{5^2 \cdot 2^2}{7!}x^7 - \frac{8^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2}{10!}x^{10} + \cdots\right]$

11. $y_1(x) = c_0,\ y_2(x) = c_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}x^n$

13. $y_1(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n},\ y_2(x) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$

15. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{4 \cdot 4!}x^4 + \frac{23 \cdot 7}{8 \cdot 6!}x^6 - \cdots\right],$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{14}{2 \cdot 5!}x^5 - \frac{34 \cdot 14}{4 \cdot 7!}x^7 + \cdots\right]$

17. $y_1(x) = c_0\left[1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \cdots\right],$

$y_2(x) = c_1\left[x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right]$

19. $y = 6x - 2\left[1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\right]$

Revisión del capítulo 16, página 895

A. **1.** verdadero **3.** falso

5. verdadero **7.** verdadero

B. **1.** $y = 0$ **3.** 8 pies

5. $y_p = Ax^2 + Bx + C + Dxe^{2x} + Ee^{2x}$

C. **1.** $x^2 \cos y^3 - y = C$ **3.** $\frac{1}{4}x^2y^{-4} - \frac{3}{2}y^{-2} = -\frac{5}{4}$

5. $y = C_1e^{(1-\sqrt{3})x} + C_2e^{(1+\sqrt{3})x}$ **7.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{5x}$

9. $y = C_1 \cos\frac{1}{3}x + C_2 \operatorname{sen}\frac{1}{3}x$ **11.** $y = -24 \cos 6x + 3 \operatorname{sen} 6x$

13. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{10}xe^{2x} - \frac{13}{100}e^{2x}$

15. $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x) - e^x \cos x \ln|\sec x + \tan x|$

17. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sec x$

19. $y_1(x) = c_0\left[1 - \frac{1}{3 \cdot 2}x^3 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}x^6 - \frac{1}{9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2}x^9 + \cdots\right],$

$y_2(x) = c_1\left[x - \frac{1}{4 \cdot 3}x^4 + \frac{1}{7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}x^7 - \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3}x^{10} + \cdots\right]$

21. $0 < m \leq 2$

23. $x(t) = e^{-4t}\left(\frac{26}{17} \cos 2\sqrt{2}t + \frac{28}{17}\sqrt{2} \operatorname{sen} 2\sqrt{2}t\right) + \frac{8}{17}e^{-t}$

25. $x\left(\frac{1}{10}\right) = 5e^{-0.2} \approx 4.0937$

ÍNDICE ANALÍTICO

D

E

F

ÍNDICE ANALÍTICO

G

H

I

T

V

W

Créditos de fotografías

Tabla de contenido

Página ix (arriba) Cortesía de The Observatories of the Carnegie Institution of Washington; **página x (arriba)** © Corbis/age footstock; **página x (en medio)** © Brand X Pictures/age footstock; **página x (abajo)** © GraphEast/age footstock; **página xi (arriba)** © Netfalls/ShutterStock, Inc.; **página xi (en medio)** © Nancy A. Thiele/ShutterStock, Inc.

Capítulo 10

Entrada de capítulo (en medio) Cortesía de The Observatories of the Carnegie Institution of Washington; **página 556 (izquierda)** © Dennis Donohue/ShutterStock, Inc.; **página 556 (derecha)** Cortesía de The Palomar Observatory, California Institute of Technology; **página 557** © Architect of the Capital; **página 564** © Jan Kliciak/ShutterStock, Inc.; **página 577** © Mircea Bezergheanu/ShutterStock, Inc.; **página 578** © Jgroup/Dreamstime.com; **página 595** Cortesía de Mariner 10, Astrogeology Team, and USGS

Capítulo 11

Página 649 (izquierda) © Martin Mette/ShutterStock, Inc.; **página 649 (en medio)** Cortesía de The North Carolina State Archives; **página 649 (derecha)** © Marcie Fowler — Shining Hope Images/ShutterStock, Inc.

Capítulo 12

Entrada de capítulo (en medio) © Corbis/age footstock

Capítulo 13

Entrada de capítulo (en medio) © Brand X Pictures/age footstock

Capítulo 14

Entrada de capítulo (en medio) © GraphEast/age footstock

Capítulo 15

Entrada de capítulo (izquierda) © Netfalls/ShutterStock, Inc.; **entrada de capítulo (arriba, derecha)** Cortesía de NOAA; **entrada de capítulo (abajo, derecha)** Imagen de Liu, Hu y Yeuh, NASA Jet Propulsion Laboratory; **página 808 (arriba)** Cortesía de NOAA; **página 808 (abajo)** Imagen de Liu, Hu y Yeuh, NASA Jet Propulsion Laboratory

Capítulo 16

Entrada de capítulo (en medio) © Nancy A. Thiele/ShutterStock, Inc.; **página 890** © Kameel4u/Dreamstime.com